DIARIO DELLE LEZIONI DI ALGEBRA I

A.A. 2018-19

Ernesto Spinelli

Mercoledì 3 Ottobre

Esercitazione su divisibilità tra interi, numeri primi, principio di induzione, massimo comun divisore, equazioni congruenziali e sistemi di equazioni congruenziali.

Martedì 9 Ottobre

Presentazione della parte del Corso sulla Teoria dei Gruppi. Definizione di semigruppò, monoide, gruppo e gruppo abeliano. Esempi: l'insieme degli elementi invertibili di un monoide, l'automorfo di una struttura algebrica, il gruppo simmetrico su di un insieme X . Il gruppo delle trasformazioni di un rettangolo che non sia un quadrato: il gruppo di Klein (e sua presentazione tramite tabella di Cayley). Il gruppo delle trasformazioni di un poligono regolare con n lati: il gruppo diedrale D_{2n} e presentazione dei suoi elementi a partire da un ribaltamento ed una rotazione. Sottogruppi di un gruppo. Teorema di caratterizzazione dei sottogruppi di un gruppo. I sottogruppi banali di un gruppo. Sottogruppo generato da un sottoinsieme di un gruppo. Descrizione di tutti i sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme $H \subseteq G$ sia un sottogruppo: la relazione $\sim_H$. Descrizione delle classi di equivalenza rispetto a $\sim_H$. Classi laterali destre di un sottogruppo di un gruppo e suo trasversale destro.

Mercoledì 10 Ottobre

Teorema di Lagrange sull'ordine dei sottogruppi di un gruppo finito. Classi laterali sinistre di un sottogruppo di un gruppo. Indice di un sottogruppo di un gruppo. Congruenze. Sottogruppi normali e loro caratterizzazione. Esempi di sottogruppi normali di un gruppo. Il gruppo dei quaternioni Q_8 ed il reticolo dei suoi sottogruppi. Definizione di gruppi hamiltoniani (gruppi non-abeliani in cui ogni sottogruppo è normale) e alcune osservazioni su di essi. Gruppo quoziente G/H di un sottogruppo normale H in G ed epimorfismo canonico. Proprietà semplici degli omomorfismi tra gruppi. Nucleo e immagine di un omomorfismo. Teorema di

fattorizzazione (dimostrazione da completare). Corollario: il Teorema di omomorfismo per gruppi.

Giovedì 11 Ottobre

Completamento della dimostrazione del Teorema di fattorizzazione. Soluzione di alcuni esercizi. La relazione di normalità tra sottogruppi non è transitiva. Sottogruppo degli automorfismi interni, $\text{Inn}(G)$, di $\text{Aut}(G)$ (che è normale) e centro, $Z(G)$, di un gruppo G : $G/Z(G)$ è isomorfo a $\text{Inn}(G)$.

Venerdì 12 Ottobre

$Z(G)$ è un sottogruppo caratteristico. Immagine ed antiimmagine di un sottogruppo normale tramite un omomorfismo. Teorema di corrispondenza per i sottogruppi del gruppo quoziente. I sottogruppi di $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$. Teorema del parallelogramma. Sottostruttura generata. Ancora sul sottogruppo generato da un sottoinsieme di un gruppo. Gruppi finitamente generati e gruppi ciclici. Esempi. Ordine di un elemento del gruppo.

Mercoledì 17 Ottobre

Esercizi sugli ordini degli elementi di un gruppo finito e gruppi ciclici. L'automorfo di S_3 e di un gruppo ciclico.

Mercoledì 24 Ottobre

Esercizi su permutazioni coniugate. Ordine di una permutazione. I sottogruppi di A_4 . A_5 è semplice. A_n è semplice per ogni $n \geq 5$ (senza dimostrazione). Gli unici sottogruppi normali di S_n .

Mercoledì 31 Ottobre

Esercizi di preparazione al compito su equazioni congruenziali, sistemi di equazioni congruenziali, Teorema di omomorfismo per gruppi. Alcune applicazioni dei Teoremi di Sylow: un gruppo di ordine 455 è ciclico.

Mercoledì 21 Novembre

Esercizi su: sottoanelli ed ideali (primi e massimali) di un anello, omomorfismi di anelli ed applicazioni del Teorema di omomorfismo.

Mercoledì 28 Novembre

Esercizi su irriducibilità di polinomi e massimalità degli ideali da essi generati, inversi di polinomi in opportuni quozienti e sistemi di equazioni alle congruenze in anelli di polinomi. Generalizzazione del Teorema Cinese del Resto.

Mercoledì 5 Dicembre

Esercizi su domini euclidei ed interi di Gauss.

Venerdì 11 Gennaio

Esercizi di preparazione al compito su Teoremi di Sylow, interi di Gauss ed estensioni di campi.