

# DIARIO DELLE LEZIONI DI ISTITUZIONI DI MATEMATICA

A.A. 2019-20

## Lunedì 30 Settembre

Presentazione del Corso. Gli insiemi numerici:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ . Assiomi che definiscono  $\mathbb{R}$  e prime proprietà. Introduzione al simbolismo matematico: quantificatori, descrizioni di insiemi, unione ed intersezioni di insiemi, l'insieme vuoto. Dall'ordinamento totale di  $\mathbb{R}$  alla sua rappresentazione sulla retta. Gli intervalli (limitati ed illimitati). Semplici esercizi sulla veridicità di affermazioni (coinvolgenti numeri). Disuguaglianza tra numeri: proprietà elementari.

## Mercoledì 2 Ottobre

Ancora qualche esercizio su uguaglianza e disuguaglianza tra numeri. Proporzioni e percentuali: esempi ed esercizi. Potenze di un numero reale ad esponente intero, di un numero reale non-zero ad esponente intero negativo, radice  $n$ -ma di un numero reale positivo, potenze di un numero reale positivo ad esponente razionale. Proprietà delle potenze. Qualche esercizio.

## Giovedì 3 Ottobre

Potenze di un un numero reale positivo ad esponente reale: proprietà e monotonia. Logaritmo in base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) di un numero reale positivo: definizione e proprietà. Ordine di grandezza di un numero  $x$  e legame col  $\log_{10}x$ . Introduzione al linguaggio dei polinomi (o meglio, delle funzioni polinomiali): grado, coefficiente direttore e termine noto. Somma e prodotto di polinomi: stima del grado della somma e calcolo di quello del prodotto.

## Lunedì 7 Ottobre

Ancora sui polinomi. Principio di identità dei polinomi e di annullamento del prodotto. Radici di un polinomio. Scomposizioni in fattori irriducibili (polinomi di grado 1 e/o polinomi di grado 2 con discriminante negativo) di

polinomi reali e ricerca delle loro radici razionali se a coefficienti interi. Identità notevoli. Funzioni polinomiali razionali. Calcolo algebrico con funzioni razionali. Esercizi su logaritmi, ordini di grandezza e funzioni razionali.

## **Mercoledì 9 Ottobre**

Ancora qualche esercizio sulle funzioni razionali. Il piano cartesiano. Ascissa ed ordinata di un punto. Corrispondenza 1 : 1 tra punti del piano e coppie ordinate di numeri reali. Distanza tra due punti. Rette ed intersezioni tra rette. L'equazione della retta: coefficiente angolare e termine noto.

## **Giovedì 10 Ottobre**

Ancora sull'equazione della retta. Esercizi. Misura in radianti di un angolo e relazione colla misura in gradi. Seno e coseno di un angolo: definizione e formule notevoli (valori, addizione e sottrazione di angoli, duplicazione, relazioni fondamentali). Il Teorema di Carnot e quello dei seni.

## **Lunedì 14 Ottobre**

Dimostrazione delle formule di addizione e sottrazione. Alcuni esercizi di trigonometria. Il concetto di funzione: dalla legge ad un sottoinsieme del prodotto cartesiano. Dominio, codominio ed immagine di una funzione. Equazioni di primo e secondo grado: il calcolo delle radici. Disequazioni di primo e secondo grado. La relazione tra il segno di  $ax^2 + bx + c$  ed il segno di  $a$ . Esercizi su equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Equazioni che coinvolgono funzioni razionali: insieme di definizione.

## **Giovedì 17 Ottobre**

Ancora esercizi su equazioni e disequazioni coinvolgenti funzioni razionali: in particolare, il segno di una funzione. Sistemi di equazioni e disequazioni: esercizi. Definizione di valore assoluto di un numero. Equazioni e disequazioni col valore assoluto: come si trova l'insieme delle soluzioni.

## Lunedì 21 Ottobre

Ancora esercizi su equazioni e disequazioni col valore assoluto. Radice  $n$ -ma di un numero reale: il caso  $n$  pari ed il caso  $n$  dispari. Equazioni e disequazioni coi radicali: come si trova l'insieme delle soluzioni.

## Mercoledì 23 Ottobre

Esercizi su equazioni e disequazioni coi radicali. Primi passi nello studio di funzioni: insieme di definizione o dominio di una funzione, grafico di una funzione, segno di una funzione ed informazioni sul suo grafico. Esercizi sulla ricerca del dominio di funzioni.

## Giovedì 24 Ottobre

Massimo e minimo di un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}$  e sua unicità (se esiste), maggioranti e minoranti per  $X$ , estremo inferiore e superiore di  $X$ . Definizione di insieme limitato (superiormente/inferiormente). Esempi. Ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  limitato superiormente (inferiormente) ha estremo superiore (inferiore). Alcune osservazioni su  $\mathbb{Q}$  (dove manca l'assioma di completezza) e su  $\mathbb{N}$  (ogni sottoinsieme non-vuoto di  $\mathbb{N}$  ha minimo). Funzione (reale di variabile reale) limitata (superiormente/inferiormente). Osservazioni sul grafico di una funzione. Definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biettiva (non necessariamente nel caso di funzioni reali di variabili reali). Definizione (rigorosa) di insieme finito. Numero di funzioni iniettive e biettive tra insiemi finiti. Funzione reale di variabile reale crescente, decrescente, strettamente crescente e strettamente decrescente. Se una funzione è strettamente crescente o decrescente nel suo dominio è iniettiva, ma non vale il viceversa.

## Lunedì 28 Ottobre

Somma, prodotto e quoziente di funzioni. Composizione di funzioni: quando è possibile definirla. Inversa di una funzione: quando esiste e come calcolarla (graficamente ed analiticamente). Esercizi. Funzioni pari e funzioni dispari: interpretazione grafica. Inizio dello studio delle funzioni elementari: funzione potenza  $n$ -ma, funzione radice  $n$ -ma, funzione esponenziale di base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ). Definizione del numero di Nepero  $e$  ed alcune sue proprietà:  $e$  è irrazionale e trascendente (ovvero non è radice di nessun polinomio a coefficienti in  $\mathbb{Q}$ ).

## Mercoledì 30 Ottobre

Funzione logaritmica di base  $a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ), funzione potenza ad esponente reale non-intero, funzione parte intera e funzione parte decimale di un numero reale (quale esempio di funzione periodica). Definizione formale di funzione periodica (e di periodo di una funzione). Le funzioni seno e coseno e le funzioni arcoseno ed arcocoseno.

## Giovedì 31 Ottobre

Funzione tangente e cotangente: definizione ed interpretazione geometrica. Funzione arcotangente. Funzioni definite a tratti: valore assoluto e funzione caratteristica di un insieme. Esempi. Introduzione ai limiti di funzioni: interpretazione intuitiva. Limite reale di una funzione per  $x$  che tende ad un punto di accumulazione  $x_0$  per il suo dominio: limite destro, limite sinistro, esistenza del limite. Esempi.

## Lunedì 4 Novembre

Ancora sul concetto di limite: punti di accumulazione (a destra/sinistra) di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ . Limite reale di una funzione per  $x$  che tende ad un punto di accumulazione  $x_0$  per il suo dominio: unicità. La funzione  $x^{-n}$  per  $n \in \mathbb{N}$ . Quando il limite per  $x$  che tende a  $x_0$  è  $\pm\infty$ . Il limite quando  $x$  diventa grande o piccolo: definizione del limite per  $x$  che tende a  $\pm\infty$  di una funzione. I limiti delle funzioni elementari. Introduzione alle operazioni tra limiti.

## Mercoledì 6 Novembre

Operazioni tra funzioni e loro limiti. Forme indeterminate. Limiti delle funzioni razionali. Definizione unica di limite attraverso gli intorni di punti di  $\overline{\mathbb{R}}$ . Limite delle funzioni composte. Esercizi.

## Giovedì 7 Novembre (1 ora)

Un Teorema di confronto per i limiti (o Teorema dei carabinieri). Un criterio di convergenza a zero ed un criterio di divergenza. Applicazioni ed esercizi sui limiti.

## Lunedì 11 Novembre

Esercizi su domini e limiti di funzioni.

## Giovedì 14 Novembre

Esercitazione in classe.

## Lunedì 18 Novembre

Correzione dell'esercitazione. Due limiti notevoli: il limite per  $x$  che tende a 0 di  $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$  e di  $\frac{e^x-1}{x}$ . Applicazioni ed esercizi.

## Mercoledì 20 Novembre

Qualche altro esercizio sui limiti. Asintoti del grafico di una funzione: definizione ed interpretazione geometrica. Asintoti obliqui (a destra e/o a sinistra), asintoti orizzontali (a destra e/o a sinistra): condizioni necessarie e sufficienti per la loro esistenza. Intersezioni del grafico con gli asintoti obliqui e/o orizzontali: le funzioni  $\frac{\operatorname{sen}x}{x}$  e  $x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}$ . Asintoti verticali (a destra e/o a sinistra, sopra o sotto). Tracciare il grafico di una funzione: determinare il dominio, determinare le eventuali intersezioni con gli assi, determinare il segno della funzione, calcolare i limiti della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione per determinare gli eventuali asintoti. Alcuni esercizi.

## Giovedì 21 Novembre

Un altro esercizio sullo studio del grafico di una funzione: dominio, eventuali intersezioni con gli assi, segno della funzione, limiti della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione, asintoti. Funzioni continue in un punto ed in un sottoinsieme del dominio: definizione intuitiva e formale (anche usando il concetto di intorno). Esempi: le funzioni elementari sono continue, le funzioni parte intera e parte decimale di un numero reale, tangente e cotangente non lo sono (nel loro dominio). Punti di discontinuità e salto della funzione in un punto di discontinuità: punti di discontinuità eliminabile, di I specie e di II specie. Esempi. Somma, prodotto e (qualora possibile) rapporto di funzioni continue è una funzione continua. Se  $f$  è una

funzione continua in un punto  $x_0$ ,  $g$  una funzione, per cui abbia significato la funzione composta  $g \circ f$ , continua in  $f(x_0)$ , allora  $g \circ f$  è continua in  $x_0$ . Teorema di esistenza di zeri: sia  $f$  funzione reale di variabile reale continua in un intervallo  $I$  del dominio; se esistono  $x_1, x_2 \in I$  tali che  $f(x_1)f(x_2) < 0$ , allora esiste  $x \in I$  tale che  $f(x) = 0$  (senza dimostrazione). Applicazione: un polinomio di grado dispari ammette una radice. Teorema di permanenza del segno: sia  $f$  funzione reale di variabile reale continua in un punto  $x_0$  del dominio  $D$ ; se  $f(x_0) > 0$ , allora esiste  $V$  intorno di  $x_0$  tale che  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in V \cap D$ .

## Lunedì 25 Novembre

Piccolo sunto sulle funzioni continue. Il Teorema di Weierstrass: l'immagine di un intervallo chiuso e limitato tramite una funzione continua  $f$  è un intervallo chiuso e limitato (senza dimostrazione). Massimo e minimo assoluto di una funzione e punti di massimo e minimo assoluto. Nell'ipotesi del Teorema di Weierstrass una funzione ha massimo e minimo assoluti. Corollario (o Teorema dei valori intermedi): nelle ipotesi del Teorema di Weierstrass, se  $m$  e  $M$  sono il valore minimo e massimo di  $f$ , rispettivamente, allora per ogni  $m \leq \mu \leq M$  esiste  $c$  nel dominio di  $f$  tale che  $f(c) = \mu$ . Generalizzazione del Teorema di Weierstrass: l'immagine di un intervallo  $I$  tramite una funzione continua  $f$  su  $I$  è un intervallo (ed assume tutti i valori compresi tra  $\inf_{x \in I} f(x)$  e  $\sup_{x \in I} f(x)$ ). Ricerca dei massimi e dei minimi: il concetto di derivata. Rapporto incrementale  $R_{f,x_0}(x)$  di una funzione  $f$  in un punto  $x_0$  interno al dominio. Il limite del rapporto incrementale per  $x$  che tende a  $x_0$ : se tale limite esiste ed è in  $\mathbb{R}$ , esso si dice la derivata di  $f$  nel punto  $x_0$ ,  $f'(x_0)$ . Funzione derivabile in un punto  $x_0$  e nel suo insieme di definizione (che prendiamo un intervallo aperto). Funzione derivata. Interpretazione fisico-geometrica: la pendenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto  $x_0$ , la velocità istantanea del moto di un corpo su di una retta. Se una funzione è derivabile in un punto, allora è continua in quel punto, ma non vale il viceversa. Calcolo delle derivate: la funzione costante. Derivate delle funzioni elementari:  $x^n$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $a^x$ .

## Mercoledì 27 Novembre

Algebra delle derivate: derivata della somma, del prodotto e del quoziente di funzioni. Derivata della funzione composta. Derivata della funzione inversa. Applicazione al calcolo delle derivate delle funzioni elementari:  $x^{-n}$ ,

$x^\alpha$ ,  $\log_a x$ ,  $\operatorname{tg}x$ ,  $\operatorname{cot}gx$ ,  $\operatorname{arsen}x$ ,  $\operatorname{arccos}x$ ,  $\operatorname{arctg}x$  (e comportamento di queste funzioni negli eventuali punti del dominio in cui non sono derivabili). Esercizi sul calcolo di derivate.

## **Giovedì 28 Novembre**

Qualche altro esercizio sul calcolo delle derivate. Derivazione, monotonia e ricerca dei punti di massimo e/o minimo: definizione di punto di massimo e minimo relativo di una funzione. Condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché un punto  $x_0$  interno all'intervallo di definizione di una funzione sia di massimo o minimo relativo. Applicazione: ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti nelle ipotesi del Teorema di Weierstrass. Un esempio. I Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy e loro interpretazione grafica.

## **Lunedì 2 Dicembre**

Un'applicazione del Teorema di Lagrange: monotonia e segno di una funzione derivabile. I passi per lo studio qualitativo del grafico di una funzione. Esercizi sullo studio di funzioni (e disegno del loro grafico).

## **Mercoledì 4 Dicembre**

Il Teorema di de L'Hopital. Casi in cui è possibile applicarlo:  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ . Esercizi sul Teorema di de L'Hopital. Ancora esercizi sullo studio di funzioni.

## **Giovedì 5 Dicembre**

Definizione di funzione convessa e suo significato geometrico. Condizioni necessarie e sufficienti affinché una funzione sia convessa che coinvolgono la monotonia della derivata prima (e quindi il segno della derivata seconda, ove sia possibile definirla). Ancora esercizi sullo studio di funzioni.

## **Lunedì 9 Dicembre**

Ancora esercizi sullo studio di funzioni.

## **Mercoledì 11 Dicembre**

Esercitazione in classe.

## **Giovedì 12 Dicembre**

Correzione dell'esercitazione.