Analisi vettoriale - A.A. 2003/04

Secondo esonero - 27 novembre 2003

Soluzioni:

1. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + x^2y^2, \\ \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione:

$y' = y + x^2y^2$ é un'equazione differenziale di Bernoulli: possiede la soluzione

$$y \equiv 0$$

pertanto ogni altra soluzione $y(x)$, per il teorema di unicitá, non si annulla mai.
Dividendo per $-y^2$ si ottiene

$$-y^{-2}y' = -y^{-1} - x^2$$

che, posto $y^{-1} = z$ rappresenta l'equazione lineare di primo ordine in z

$$z' = -z - x^2 \tag{1}$$

Integrale generale:

- soluzioni dell'omogenea associata $z' = -z \quad z_0(x) = c\,e^{-x}$
- soluzione equazione completa: cerchiamone una come

  $$\overline{z}(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

  sostituendo si deve avere

  $$A = -1, B = 2, C = -2$$

  quindi

  $$\overline{z}(x) = -x^2 + 2\,x - 2$$

L'integrale generale dell'equazione (1) é pertanto

$$z(x) = c\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2$$

La condizione iniziale $y(0) = \frac{1}{2}$ implica, per la (1), $z(0) = 2$ e, quindi,

$$z(0) = c - 2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = 4 \quad \rightarrow \quad z(x) = 4\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2$$

Disegnati separatamente i grafici di $4\, e^{-x}$ e di $x^2 - 2x + 2$

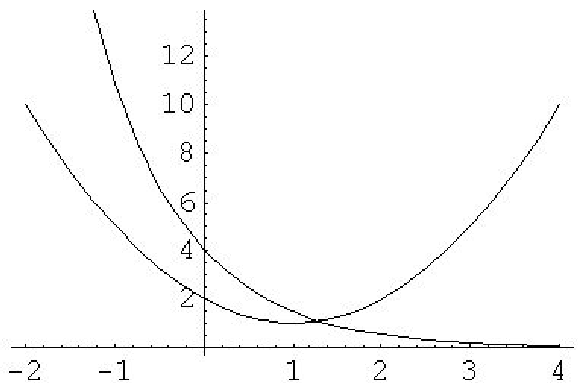

FIGURA 1. I due termini $4\, e^{-x}$ e $x^2 - 2x + 2$

si riconosce agevolmente che essi si intersecano in x_0, poco dopo $x = 1$: quindi

$$z(x_0) = 0$$

e quindi la considerazione di

$$y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

sará lecita solo a sinistra di tale x_0.
La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{4\, e^{-x} - x^2 + 2x - 2}$$

soluzione definita per $x < x_0$.

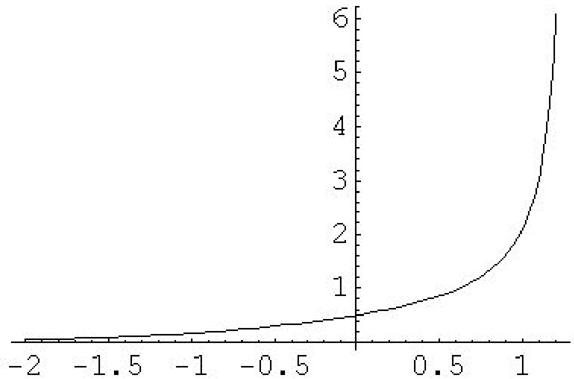

Figura 2. Il grafico della soluzione $y(x)$ del primo esercizio

2. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1+x+y}{1-(x+y)}, \\ \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Indicato con $z = x + y, \quad \rightarrow \quad z' = 1 + y'$ il problema assegnato si trasforma nel seguente

$$z' - 1 = \frac{1+z}{1-z}, \quad z(0) = 2$$

Ne segue, a conti fatti l'equazione di tipo autonomo in z

$$z' = \frac{2}{1-z}$$

$$\int (1-z)dz = \int 2dx \quad \rightarrow \quad z - \frac{1}{2}z^2 = 2x + c$$

Ne segue

$$z(x) = 1 \pm \sqrt{1 - (4x + 2c)}$$

Tenuta presente la condizione $z(0) = 2$ se ne deduce

$$2 = 1 \pm \sqrt{1 - 2c}, \quad \rightarrow \quad 1 = 1 - 2c \quad \rightarrow \quad c = 0$$

e quindi,

$$z(x) = 1 \pm \sqrt{1 - 4x}$$

La condizione $z(0) = 2$ determina la scelta del segno avanti alla radice

$$z(x) = 1 + \sqrt{1 - 4x} \quad \rightarrow \quad y(x) = 1 + \sqrt{1 - 4x} - x$$

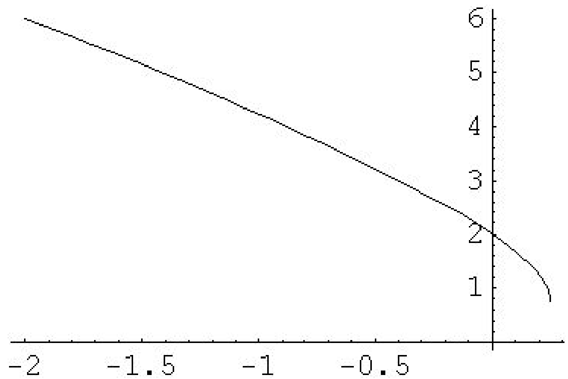

FIGURA 3. La soluzione del secondo esercizio.

La soluzione osservata esiste per

$$1 - 4x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{4}$$

per l'ovvia *esistenza* della radice quadrata.
Ma del resto l'espressione

$$y(x) = 1 + \sqrt{1-4x} - x \quad \Leftrightarrow \quad x + y(x) - 1 = \sqrt{1-4x}$$

fa riconoscere che la soluzione non potrebbe comunque passare per un punto in cui

$$x + y = 1$$

l'equazione differenziale stessa, in tale punto non é definita !
Notate inoltre che

$$\lim_{x \to 0.25^-} y'(x) = -\infty$$

e quindi che la soluzione é, di fatto definita per

$$x < \frac{1}{4}$$

La soluzione trovata é una

soluzione in grande,

cioé é definita in tutto l'intervallo delle x in cui é definita l'equazione differenziale: cosa che non accade, ad esempio, per la soluzione del primo esercizio.

3. Esercizio

Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}\, y' - \; 4\, \frac{1}{x^2}\, y = 1, \\ \\ y(1) = 0, \\ \\ y'(1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare di secondo ordine, non omogenea, a coefficienti variabili di tipo Eulero, definita per $x \neq 0$. Tenuto conto che le condizioni iniziali assegnate si riferiscono a $x = 1$ lavoreremo comunque nel semiasse

$$x > 0.$$

- Soluzioni dell'equazione omogenea: soluzioni nella forma
  $y = x^\lambda$ si approda all'equazione algebrica in λ
  $$\lambda^2 - 4 = 0$$
  dalla quale si deducono i due esponenti
  $$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2$$
  e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea é
  $$y_0(x) = A\, x^2 + B\, x^{-2}$$
- Equazione completa: cerchiamone una soluzione nella forma (metodo della variazione delle costanti)
  $$\overline{y}(x) = A(x)\, x^2 + B(x)\, x^{-2}$$
  Il sistema che devono soddisfare le due derivate $A'(x)$ e $B'(x)$ é il seguente
  $$\begin{cases} A'\, x^2 + B'\, x^{-2} = 0 \\ 2A'x - 2B'x^{-3} = 1 \end{cases}$$
  Ne segue, risolvendo il sistema, e tenendo conto che lavoriamo con $x > 0$,
  $$A'(x) = \frac{1}{4x} \quad B'(x) = -\frac{1}{4}x^3$$

quindi

$$A(x) = \frac{1}{4}\ln(x), \quad B(x) = -\frac{1}{16}x^4$$

da cui la soluzione dell'equazione completa

$$\overline{y}(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 - \frac{1}{16}x^2$$

L'integrale generale dell'equazione assegnata é pertanto

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x^{-2} + \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 - \frac{1}{16}x^2$$

ovvero, riassumendo in un unico termine il primo e l'ultimo addendo,

$$y(x) = A\,x^2 + B\,x^{-2} + \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2 \tag{2}$$

Per soddisfare le condizioni iniziali occorre che

$$\begin{cases} y(1) = A + B = 0 \\ y'(1) = 2A - 2B + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad \rightarrow \quad A = B = 0$$

La soluzione richiesta é pertanto

$$y(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\,x^2$$

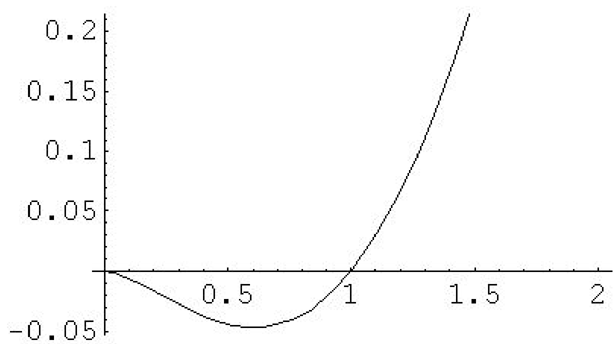

Figura 4. La soluzione $y(x)$ del terzo esercizio.

3.1. Usiamo la sostituzione $x = e^t$.

La sostituzione $x = e^t$ conduce alle seguenti trasformazioni

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} &= x\,\frac{dy}{dx} \\ \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} \end{cases}$$

L'equazione differenziale si trasforma, nella nuova variabile t nella seguente

$$y''(t) - 4y(t) = e^{2t}$$

- soluzioni omogenea associata:

$$y_0(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$$

- soluzione particolare equazione completa: cerchiamola nella forma $\overline{y}(t) = A\,t\,e^{2t}$, sostituendo si trova che deve essere $A = 1/4$
- Integrale generale dell'equazione:

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}$$

Tornando alla variabile x si ottiene pertanto

$$y(x) = Ax^2 + Bx^{-2} + \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$$

espressione naturalmente uguale alla (2) precedente.

Osservazione 3.1. *Anche la soluzione di questo esercizio é*

soluzione in grande

infatti essa é definita in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$ *lo stesso in cui sono definiti i coefficienti dell'equazione differenziale.*

4. Esercizio

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + (1-\alpha)\,y' - \alpha\,y = e^{2x}$$

al variare del parametro α.

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- Equazione omogenea associata: $y'' + (1-\alpha)\ y' - \alpha\ y = 0$, soluzioni della forma $y(x) = e^{\lambda\, x}$

$$\lambda^2 + (1-\alpha)\,\lambda - \alpha = 0 \quad \to \quad \lambda = \frac{1}{2}\left\{\alpha - 1 \pm \sqrt{(1+\alpha)^2}\right\}$$

ne segue

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \alpha$$

- Integrale generale dell'omogenea:

$$\begin{cases} \alpha \neq -1 & \Rightarrow \qquad y_0(x) = A\, e^{-x} + B e^{\alpha\, x} \\ \\ \alpha = -1 & \Rightarrow \qquad y_0(x) = (A\, + B\, x\,)\, e^{-x} \end{cases}$$

- Soluzione particolare della completa:

$$\begin{cases} \alpha \neq 2 & \Rightarrow \qquad \overline{y}(x) = \frac{1}{3(2-\alpha)} e^{2x} \\ \\ \alpha = 2 & \Rightarrow \qquad \overline{y}(x) = \frac{1}{3} x e^{2x} \end{cases}$$

Integrale generale dell'equazione completa:

$$\begin{cases} \alpha \neq -1, \alpha \neq 2 & \Rightarrow \qquad y(x) = A\, e^{-x} + B e^{\alpha\, x} + \frac{1}{3(2-\alpha)} e^{2x} \\ \\ \alpha = -1 & \Rightarrow \qquad y(x) = (A\, + B\, x\,)\, e^{-x} + \frac{1}{9} e^{2x} \\ \\ \alpha = 2 & \Rightarrow \qquad y(x) = A\, e^{-x} + B e^{2\, x} + \frac{1}{3} x e^{2x} \end{cases}$$

Si noti, nella seconda e terza delle espressioni precedenti, come le formule siano espresse direttamente con il valore α speciale cui si riferiscono.