Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2018/19

Esercizio guidato sull'esistenza delle radici ennesime di un reale

Esercizio 1. Siano a, b, tali che $0 < a < b$, allora per ogni k naturale sappiamo che $a^k < b^k$ (vedi esercizio 1 del primo foglio). Verificare che

$$b^k - a^k \leq kb^{k-1}(b - a).$$

Suggerimento usare la formula sullo sviluppo $b^k - a^k$, vedi ad esempio Pag 15 prima parte delle note.

Esercizio 2. Fissato $y > 0$ determinare per ogni n un intervallo $I_n = [a_n, b_n]$. Tale che la lunghezza di ogni intervallo I_n sia esattamente $\frac{1}{10^n}$, gli intervalli I_n siano incaplusati e che valga $a_n^k \leq y \leq b_n^k$.

Suggerimento: pensate ai numeri decimali con solo n cifre decimali.

Esercizio 3. Dato $y > 0$, dimostrare che esiste $x > 0$ tale che $x^k = y$.

Suggerimento applicare il postulato sugli intervalli incapsulati agli intervalli definiti nell'esercizio precedente per avere un candidato x. Ragionate sugli intervalli $\overline{I}_n$ associati all'esercizio precedente e definiti come $\overline{I}_n = [a_n^k, b_n^k]$. Osservate che sia x^k che y appartengono a tutti gli intervalli $\overline{I}_n$. Usando l'Esercizio 1 deducete che $|x^k - y|$ deve essere nullo.

Esercizio 4. Osservare che per ogni $y > 0$ esiste un unico $x > 0$ tale che $x^k = y$. Questa prende il nome di radice n-sima di y.

Esercizio 5. Se k è pari e $y > 0$ osservare che esistono almeno due valori reali tali che $x^k = y$. Se invece $y < 0$ non esiste nessun valore x tale che $x^k = y$.

Esercizio 6. Se k è dispari dimostrare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste x tale che $x^k = y$.

Suggerimento ragionare su $-y$ quando y è negativo.

Dimostare che tale x è sempre unico

Riassumendo per ogni y reale la radice ennesima si può definire:

i) sempre se $y \geq 0$ e in tal caso essa è sempre non negativa per definizione;

ii) solo per k dispari se $y < 0$ e in tal caso la radice ennesima sarà anch'essa negativa.