

## Analisi Vettoriale - A.A. 2003-2004

Foglio di Esercizi n. 8

**Esercizio 1** Dire se le funzioni

$$\frac{\sin^2(x)}{(x^2 + 1)x}, \quad \frac{e^x - 1}{x^2}, \quad \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso classico o improprio negli intervalli  $[0, 1]$  e  $(0, +\infty)$ .

**Esercizio 2** Dimostrare che la funzione

$$x^\beta e^{-x}$$

è integrabile in senso improprio nell'intervallo  $(1, +\infty)$  per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$  e calcolare l'integrale per  $\beta = 0, 1, 2$ .

**Esercizio 3** Dire per quali  $\beta > 0$  esiste l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^\beta x} dx$$

In questi caso si applichi la definizione calcolando quando possibile anche l'integrale improprio.

**Esercizio 4** Verificare che esiste l'integrale improprio

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

e determinarne il valore.

**Esercizio 5** Dire se è integrabile in senso improprio la funzione  $\log(x^2 + y^2)$  nell'insieme  $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ . Se integrabile, si calcoli esplicitamente tale integrale improprio.

**Esercizio 6** Dire per quali  $\beta > 0$  esiste l'integrale improprio

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1 + (x^2 + y^2)^\beta} dx dy$$

**Esercizio 7** Dire per quali  $\beta$  esiste l'integrale doppio improprio

$$\int \int_C \frac{(x - y)^3}{(x^2 + y^2)^\beta}, \quad C = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e, per i  $\beta$  possibili, calcolare l'integrale.