RENÉ GATEAUX : TRAIETTORIA E DESTINO MATEMATICO

LAURENT MAZLIAK
LABORATOIRE DE PROBABILITÉS ET MODÈLES ALÉATOIRES,
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, PARIS, FRANCE

Vorrei ringraziare i miei colleghi Gianna e Fabio, che ho conosciuto 25 anni fa in un'altra vita, per avere organizzato la presentazione di questa piccola mostra René Gateaux, morto esattamente un secolo fa sui campi di battaglia della Francia del nord. Roma ha giocato un ruolo chiave nella carriera matematica di Gateaux, e mi sembra dunque un'occasione felice che la sua memoria sia ricordata in questa sede. La mostra presenta una serie di aspetti della sua breve vita. Vorrei per questa presentazione tornare con alcuni dettagli sul suo background matematico e sulla serie di eventi che ha fatto sì che conosciamo ancora oggi il suo nome.

Come cercherò di mostrare oggi, studiando il caso di René Gateaux possiamo farci un'idea di quella che era all'inizio del ventesimo secolo la vita di un giovane studioso brutalmente interrotta dalla guerra; ma possiamo anche seguire la storia di un capitolo importante dell'analisi matematica del ventesimo secolo che lega in maniera sorprendente l'analisi funzionale con la moderna teoria della probabilità.

Cominciamo dall'articolo fondamentale di Wiener, "Differential space" dove si introduce il primo modello matematico di moto browniano. Questo lavoro fu pubblicato nel 1923, ossia nove anni dopo la morte di René Gateaux. Wiener segnala nell'introduzione che al cuore della sua teoria si trova la questione dell'integrazione in spazi di dimensione infinita:

> Ora, l'integrazione in spazi di infinite dimensioni è un problema relativamente poco studiato. Salvo alcuni tentativi di ricerca di Fréchet e E.H. Moore, praticamente tutto quello che è stato fatto si deve a Gateaux, Lévy, Daniell, e all'autore di questo articolo. Di queste ricerche, forse le più complete sono quelle iniziate da Gateaux e portate avanti da Lévy nelle sue Leçons d'analyse fonctionnelle.

Il libro di Paul Lévy al quale si riferisce Wiener è stato pubblicato un anno prima (1922), immediatamente dopo il corso tenuto da Lévy nel 1919-1920 al Collège de France, sul quale torneremo più tardi. Wiener ha scoperto il libro subito dopo la sua pubblicazione, e, presente in Francia nell'estate 1922, ne ha subito discusso lungamente con Lévy. Del resto, nel suo articolo del 1923, Wiener non nasconde certo questa fonte dove si trova la forma d'integrazione in dimensione infinita da lui ricercata.

Nell'ottobre 1912, Gateaux è professore al liceo di Bar-le-Duc e già dalla fine del 1912 chiede di beneficiare di un anno di congedo per andare a Roma. Stava infatti per cominciare una tesi di dottorato sull'analisi funzionale, una disciplina che Vito Volterra aveva creato nel corso degli anni novanta del dell'Ottocento e che, grazie a Hadamard, si era molto sviluppata in Francia all'inizio del ventesimo secolo. Nel 1910, Hadamard ne aveva fatto il soggetto delle sue lezioni al Collège de France, nel 1911 Paul Lévy aveva difeso una brillante tesi su questo argomento e, nel 1912, Volterra era venuto a Parigi a tenere un corso alla Sorbona sulla teoria delle funzioni di linea. Questo corso era stato redatto da Joseph Pérès, che nello stesso anno ottenne una borsa di studio per recarsi a Roma, una delle prime borse della fondazione David-Weill attribuite a uno studente della facoltà di scienze. Anche Gateaux si candidò per ottenere questa borsa nel 1913, appoggiato da Borel:

> Il Signor Gateaux, attualmente professore al Liceo di Bar-le-Duc, mi ha recentemente parlato delle sue intenzioni di chiedere una borsa di studio in vista delle sue ricerche legate ai vostri lavori. Gli ho consigliato di chiedere come Pérès una borsa David-Weill e di andare a Roma. Vi allego la lettera nella quale mi comunica che ha chiesto la borsa e mi indica le sue intenzioni. Ho intenzione di appoggiare la sua candidatura.

Come scrive più tardi Hadamard:

> Fu uno di coloro che, inaugurando una tradizione che non applaudiremo mai abbastanza, andarono a Roma a formarsi ai metodi e alle teorie di Volterra.

Su questo possediamo un documento straordinario: la lettera che Gateaux inviò a Borel (il quale la trasmise a Volterra) contenente il programma di ricerca per il suo anno a Roma. E' una lettera molto lunga, di una decina di pagine. Non avrò qui il tempo di analizzare questo programma ma si può osservare che Gateaux parla già di integrazione in dimensione infinita e che pensa di affrontare tale questione con un metodo alla Riemann. Il 28 agosto 1913 Gateaux annuncia a Volterra il suo arrivo a Roma in ottobre. Abbiamo pochi dettagli sul suo soggiorno romano (una volta a Roma, Gateaux non scrive più a Volterra!) Tuttavia, sembra aver fatto prova di una bella energia. Quattro note sono pubblicate una dopo l'altra nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, che costituiscono nello spirito l'inizio del suo lavoro di tesi. Il primo gennaio 1914, Borel scrive a Volterra di essere lieto che Volterra sia contento del lavoro di Gateaux. Il 13 febbraio Gateaux fa una conferenza al seminario matematico dell'università di Roma.

Gateaux torna in Francia nel giugno 1914 e chiede immediatamente una nuova borsa (questa volta della fondazione Commercy) per poter ritornare a Roma durante l'anno 1914-15. Ma è mobilitato il 2 agosto, e alla fine ucciso il 3 ottobre. Non sappiamo esattamente come la notizia della morte di

Gateaux sia stata comunicata al mondo accademico. Una cartolina postale, inviata dal direttore del liceo di Bar-le-Duc nel dicembre 1914, e che ho ritrovato per caso all'Accademia delle Scienze di Parigi ha giocato un ruolo cruciale. Il direttore segnala infatti che Gateaux ha lasciato alla madre dei documenti contenenti appunti di capitoli della sua tesi.
Dall'agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Accademia delle Scienze a Gateaux. Scrive nell'agosto 1915 al secrétaire perpétuel Emile Picard:

> [Gateaux] lascia sul calcolo funzionale delle ricerche molto avanzate (la sua tesi era in gran parte redatta e rappresentata dalle note presentate all'Accademia), ricerche alle quali il Signor Volterra, e io stesso, attribuiamo un grande valore.

Il premio Francoeur è attribuito nel 1916, a titolo postumo, a René Gateaux. Nel suo rapporto Hadamard scriveva:

> [Gateaux] cominciò a percorrere una strada molto più audace e che prometteva di essere tra le più feconde, estendendo al dominio funzionale il concetto di integrale. Nessuno può prevedere lo sviluppo e la portata che avrebbero potuto essere riservati a questa nuova serie di ricerche. E' proprio questa che è stata interrotta dagli eventi.

Nel suo libro autobiografico del 1970, Paul Lévy scrive:

> Nel gennaio 1918, ero da oltre due mesi steso sopra un letto di ospedale, quando ripensai tutto a un tratto all'analisi funzionale. Nei miei primi lavori, non avevo mai pensato di estendere la nozione di integrale agli spazi di infinite dimensioni. Mi è parso di un tratto che fosse possibile affrontare questo problema partendo dalla nozione di media su una sfera dello spazio di funzioni di quadrato sommabile. Una tale funzione può essere approssimata da una funzione a scala, il cui numero n dei suoi valori distinti aumenti indefinitamente. La media cercata si può allora definire come il limite della media su una sfera dello spazio a n dimensioni. E' evidente che questo limite potrebbe non esistere; ma, praticamente, esso esiste quasi sempre.

Nel dicembre 1918, viene chiesto a Lévy di fare il cours Peccot al Collège de France. Teoricamente, questo corso è riservato a un giovane matematico promettente di meno di 30 anni e Lévy ne ha 32; ma la guerra è stata una tale ecatombe che bisogna fare delle eccezioni al regolamento. Il libro del 1922 Leçons d'Analyse Fonctionnelle è redatto a partire da questo corso. Lévy prende contatto con Maurice Fréchet, il grande specialista del momento sull'integrazione in spazi astratti, per chiedergli consiglio.

> Essendomi occupato di recente della questione dell'estensione della nozione di integrale multiplo agli spazi funzionali, ne ho parlato con Hadamard che mi ha segnalato l'esistenza

> di una nota di R. Gateaux su questo soggetto. Ma non mi ha potuto dare il riferimento esatto e non riesco a trovarla. [...] Benché sia ancora arruolato, lavoro per preparare un corso che spero di poter tenere al Collège de France sulle funzioni di linea e le equazioni alle derivate funzionali, e in questa occasione vorrei sviluppare ulteriormente alcuni capitoli della teoria. [...] Credo che la generalizzazione del problema di Dirichlet debba presentare maggiori difficoltà. Non ho potuto fino ad ora utilizzare per il caso generale i vostri lavori sulle funzioni di primo grado e l'estensione della formula di Green. Ciò è dovuto al fatto che non ho ancora messo la nozione di integrale multiplo sotto una forma comoda per questo scopo.

Qualche giorno più tardi, Lévy scrive a Fréchet:

> Per quanto riguarda i lavori di Gateaux, ho saputo proprio ieri che Hadamard li aveva messi in sicurezza all'Ecole Normale durante la guerra e che li ha appena ritirati. Nulla è quindi stato ancora pubblicato.

Su consiglio di Hadamard, scrive a Volterra:

> Hadamard ha trovato varie memorie non pubblicate di Gateaux all'Ecole Normale. Non le ho ancora viste ma forse vi troverò quello che cerco.

Volterra risponde immediatamente:

> Abbiamo discusso prima della sua partenza da Roma su delle idee generali riguardo a questo argomento, ma non ha pubblicato niente a riguardo. Penso che, nelle note manoscritte che ha lasciato, si potrebbero molto probabilmente trovare delle note su questo soggetto. Sono felice che non siano andate perdute e che si trovino nelle vostre mani. La questione è molto interessante.

Hadamard incarica Lévy di realizzare un'edizione postuma delle carte di René Gateaux alla sua memoria, ed è questo lavoro che serve a Lévy per preparare il suo futuro cours Peccot. La cosa più importante che scopre riguarda l'integrazione in dimensione infinita negli spazi funzionali.
Vediamo un po' quello che fa Gateaux. Una funzione x è detta semplice di ordine n se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su ogni sottointervallo $[0, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$. Le x_i sono dette coordinate di x.
Se si considera allora una funzione semplice x in una palla di raggio 1 dell'insieme delle funzioni di quadrato integrabile (cioè L^2 munito della misura di Lebesgue), si ha $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$. Tali funzioni formano la n-esima sezione della palla di L^2 considerata. E' dunque una palla di IR^n di raggio $\sqrt{n}$.

Consideriamo un funzionale U definito sull'insieme delle funzioni x tali che $\int_0^1 x(\alpha)^2 d\alpha \leq 1$ (ciò che noi chiamiamo una palla di L^2). La sua restrizione U_n alla n-esima sezione è una funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il cui valor medio è dato da

$$\mu_n = \frac{\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq n} U_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n}{W_n}$$

dove W_n è il volume della palla in IR^n di raggio $\sqrt{n}$. Sotto certe condizioni, la successione (μ_n) ammette un limite: è la media o l'integrale di U sulla palla di L^2 di raggio 1.
Il principale risultato di René Gateaux è di aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. L'esempio fondamentale è $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f è una funzione continua fissata e α un reale fissato dell'intervallo $[0, 1]$. Se x è nella n-esima sezione, $x(\alpha)$ è dunque una delle coordinate. Quando si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$, il volume (di dimensione $n - 1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$ è dato da $(\sqrt{n - z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_n è il volume della palla unitaria in dimensione n. Si noti che questo volume verifica la relazione di ricorrenza $V_n = V_{n-1} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$.
La media di U sulla n-esima sezione è allora data (con la parametrizzazione $z = \sqrt{n} \sin \theta$ da

$$\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n} \sin \theta) \cos^n \theta d\theta.$$

Gateaux usa allora un metodo similare a quello di Laplace. I valori preponderanti dell'integrale al numeratore si ottengono quando θ è prossimo a 0. Per n grande, questo integrale diventa prossimo a

$$\int_{-\eta}^{\eta} f(\sqrt{n} \sin \frac{\psi}{\sqrt{n}}) \cos^n \frac{\psi}{\sqrt{n}} \frac{d\psi}{\sqrt{n}}$$

Si ha inoltre che $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.
Uno sviluppo di Taylor permette allora di ottenere che, per n e η tendenti all'infinito, la media di U sulla n-esima sezione tende a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi.$$

Gateaux definisce questa quantità come l'integrale di U sulla palla.
Si vede dunque che Gateaux aveva cambiato il suo punto di vista iniziale, poiché un approccio diretto alla Riemann non gli avrebbe permesso di concludere. Ha avuto bisogno invece di considerare la convergenza delle medie.
Gateaux mostra inoltre che il risultato è generalizzabile per una funzione del tipo $U(x) = \int_{[0,1]^n} d\alpha_1 \ldots d\alpha_p f[x(\alpha_1), \ldots, x(\alpha_p), \alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ il cui

integrale è dato da

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}}\int_{[0,1]^n} d\alpha_1\dots d\alpha_p \int_{IR^n} dx_1\dots dx_p f(x_1,\dots,x_p,\alpha_1,\dots,\alpha_p)\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_p^2}{2}}$$

A questo punto, accade una straordinaria coincidenza che lo spirito fecondo di Lévy riesce a sfruttare magistralmente. Oggi, Paul Lévy è soprattutto noto come uno dei maggiori probabilisti del ventesimo secolo. Ma nel 1919 egli non conosceva ancora la teoria della probabilità. Come lui stesso scrive:

> Da parte mia, ho appreso i primi elementi di calcolo delle probabilità nella primavera del 1919, grazie a Carvallo che mi aveva chiesto di fare tre conferenze su questo argomento all'Ecole Polytechnique. Sono allora giunto in tre settimane a dei nuovi risultati. Ma mai rivendicherei per i miei lavori di probabilità una data anteriore al 1919. Posso anche aggiungere, e l'ho detto un giorno a Borel, che non ho visto che nel 1929 l'importanza dei nuovi problemi che poneva la teoria delle probabilità numerabili. Ma ero preparato per il calcolo funzionale allo studio delle funzioni di infinite variabili e molte delle mie idee sono divenute senza sforzo delle idee applicabili al calcolo delle probabilità.

Come si vede, è per necessità di insegnamento che Lévy ha dovuto studiare il calcolo delle probabilità. La guerra aveva in effetti dimostrato quanto certe tecniche di probabilità si erano rivelate importanti (in particolare nel calcolo degli errori in balistica) e la direzione dell'Ecole Polytechnique suggerì di rinforzare l'insegnamento di questa disciplina. Progressivamente, Lévy prende coscienza che è sotto una forma probabilistica che si esprimono, nel modo più naturale, i problemi di analisi funzionale che lo interessano.
Cerchiamo di capire sull'esempio fondamentale come la probabilità entrava nelle considerazioni di Lévy sugli spazi funzionali.
In IR^n, si consideri la parte della palla di centro 0 e raggio $\sqrt{n}$, compresa tra gli iperpiani : $z = \xi_1$ et $z = \xi_2$ (dove z è una delle coordinate). Il rapporto tra il volume di questa porzione e quello dell'intera palla è dato da

$$\frac{\int_{\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\xi_2}{\sqrt{n}}} \cos^n\theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n\theta d\theta}$$

Quando $n \to +\infty$, questo rapporto tende a

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Lévy avanza allora l'interpretazione seguente: Se la funzione x è "scelta a caso" nella palla di L^2 di centro 0 e di raggio 1, la probabilità che $x(\alpha)$ sia compreso tra ξ_1 e ξ_2 è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

Altrimenti detto, la legge della variabile aleatoria $x(\alpha)$ è una gaussiana. Questo gli permette per esempio di interpretare immediatamente la media del funzionale U che a x associa $f(x(\alpha))$ ottenuta da Gateaux sotto la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi)e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi.$$

come se fosse una speranza matematica in relazione alla legge gaussiana. Questa interpretazione probabilistica diventa onnipresente nella terza parte delle Leçons d'Analyse Fonctionnelle consacrata alle questioni di integrazione. Lévy aveva allora coscienza della profonda originalità del suo approccio e, come lui stesso ammette, sperava che il testo ricevesse l'attenzione che meritava. Ne fu deluso. Bisogna qui segnalare il disinteresse abbastanza generale (per non dire il disprezzo. . .) dei matematici francesi per il calcolo delle probabilità a partire dalla metà dell'800; Poincaré e Borel erano due eccezioni che nessuno in Francia aveva ancora seguito. Questo può dunque spiegare l'assenza nelle carte di Gateaux di ogni riferimento alla densità gaussiana, sebbene essa entrasse in maniera evidente nell'espressione delle sue medie.

Se il libro passa quasi inosservato in Francia, esso trova invece in Wiener un lettore appassionato. Nell'estate del 1922, Wiener venne a trascorrere qualche settimana in Francia e soggiornò con Lévy a Pougues les Eaux, una città termale al centro della Francia, dove discussero sul libro. Come scriveva nella sua autobiografia, Lévy aveva ragione di pensare che la terza parte del suo libro fosse all'origine della memoria di Wiener sul moto browniano. In ogni caso, come ho già detto, Wiener non nasconde questa influenza:

> Il presente articolo ha ricevuto il suo incipit grazie a una conversazione che l'autore ha avuto con il Professor Lévy riguardo alla relazione che è alla base dei due sistemi di integrazione in un numero infinito di dimensioni – quello di Lévy e quello dell'autore. Per questo suo debito, l'autore desidera dare pieno credito.

Gateaux è ora trattato da Wiener come un precursore ed è Lévy che è dichiarato essere la sua principale fonte di ispirazione. Per la sua costruzione del moto browniano, Wiener utilizza gli studi di Lévy sulla sfera di dimensione n e la definizione di integrale-media di Gateaux-Lévy per

1) dedurre la forma gaussiana degli incrementi

2) definire la misura corrispondente nello spazio delle funzioni continue (misura di Wiener)

3) ottenere l'espressione della media di un funzionale analitico

Lévy ha sempre un po' avuto la mania di insistere sul fatto che egli aveva già scoperto molte cose prima degli altri, il che può essere anche vero, ma non si dice! Tuttavia, gli si rende giustizia per quanto riguarda la misura di Wiener, perché è chiaro che tutto era già pronto nel suo libro del 1922. Gli lascio dunque l'ultima parola:

> Poiché ho deciso di non nascondere nulla della mia propria psicologia, è venuto il momento di dire che, tra tutte le occasioni che non ho saputo cogliere, quella di aver lasciato a Wiener la scoperta di questa funzione … è, malgrado il fatto che l'esistenza di precursori ne diminuisce l'importanza, una di quelle che mi lasciano più rimpianti. Tutto era pronto per fare [questa scoperta], e credo che ci sarei arrivato uno o due anni più tardi. Ma Wiener mi ha preceduto. Non posso che indicare, in un fascicolo del Mémorial des Sciences mathématiques pubblicato nel 1925, il legame che esiste tra le idee di Wiener e quelle di Gateaux. Mi sono reso conto solo molto più tardi che il mio libro del 1922 aveva senza dubbio contribuito alla scoperta di Wiener.

In ogni caso, è chiaro che è attraverso il lavoro di Lévy e il loro recupero da parte di Wiener che il nome di René Gateaux ci è ancora noto oggi ...
Grazie della vostra attenzione.