Roma

René Gateaux

Traiettoria e destino matematico

Laurent MAZLIAK

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France

Introduzione

- Wiener: Differential spaces (1923)

Now, integration in infinitely many dimensions is a relatively little-studied problem. Apart from certain tentative investigations of Fréchet[1] and E. H. Moore[2], practically all that has been done on it is due to Gâteaux[3], Lévy[4], Daniell[5], and the author of this paper[6]. Of these investigations, perhaps the most complete are those begun by Gâteaux and carried out by Lévy in his *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. In this latter book, the mean value of

Introduzione

- Wiener: Differential spaces (1923)

Now, integration in infinitely many dimensions is a relatively little-studied problem. Apart from certain tentative investigations of Fréchet[1] and E. H. Moore[2], practically all that has been done on it is due to Gâteaux[3], Lévy[4], Daniell[5], and the author of this paper[6]. Of these investigations, perhaps the most complete are those begun by Gâteaux and carried out by Lévy in his *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. In this latter book, the mean value of

- Lévy (1922)

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS
D'ANALYSE FONCTIONNELLE

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

PAUL LÉVY
PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

AVEC UNE PRÉFACE
DE
M. J. HADAMARD
MEMBRE DE L'INSTITUT

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1922

- Wiener: Differential spaces (1923)

> The present paper owes its inception to a conversation which the author had with Professor Lévy in regard to the relation which the two systems of integration in infinitely many dimensions — that of Lévy and that of the author — bear to one another. For this indebtedness the author wishes to give full credit. He

Introduzione

- Wiener: Differential spaces (1923)

> The present paper owes its inception to a conversation which the author had with Professor Lévy in regard to the relation which the two systems of integration in infinitely many dimensions — that of Lévy and that of the author — bear to one another. For this indebtedness the author wishes to give full credit. He

- Ottobre 1912 : Gateaux professore al liceo di Bar-le-Duc. Chiede in aprile 1913 un anno di congedo per andare a Roma.

Roma

- Gateaux nel 1912 comincia una tesi di dottorato sull'analisi funzionale.

- Gateaux nel 1912 comincia una tesi di dottorato sull'analisi funzionale.
- 1910,1911 : Lezioni di Hadamard sull'analisi funzionale al Collège de France.
  1911 : tesi di Paul Lévy
  1912 : Volterra a Parigi : lezioni alla Sorbonne sulle funzione di linea. Redatti da Joseph Pérès e pubblicati nel 1913 come libro.

- Gateaux nel 1912 comincia una tesi di dottorato sull'analisi funzionale.
- 1910,1911 : Lezioni di Hadamard sull'analisi funzionale al Collège de France.
  1911 : tesi di Paul Lévy
  1912 : Volterra a Parigi : lezioni alla Sorbonne sulle funzione di linea. Redatti da Joseph Pérès e pubblicati nel 1913 come libro.
- 1912-1913 : Pérès ottiene una borsa David-Weill per un anno a Roma con Volterra.

Roma

- Gateaux nel 1912 comincia una tesi di dottorato sull'analisi funzionale.
- 1910,1911 : Lezioni di Hadamard sull'analisi funzionale al Collège de France.
  1911 : tesi di Paul Lévy
  1912 : Volterra a Parigi : lezioni alla Sorbonne sulle funzione di linea. Redatti da Joseph Pérès e pubblicati nel 1913 come libro.
- 1912-1913 : Pérès ottiene una borsa David-Weill per un anno a Roma con Volterra.
- *M.Gateaux, actuellement professeur au Lycée de Bar-le-Duc, m'a parlé récemment de ses intentions de demander une bourse d'étude en vue de recherches qui se rattachent à vos travaux. Je lui ai conseillé de demander comme Pérès une bourse David Weill et d'aller à Rome. Je vous communique ci-inclus la lettre dans laquelle il me fait part qu'il a demandé la bourse, et m'indique ses intentions. J'ai l'intention d'appuyer sa demande.* (Borel à Volterra, 18 avril 1913) .

Roma

- Gateaux nel 1912 comincia una tesi di dottorato sull'analisi funzionale.
- 1910,1911 : Lezioni di Hadamard sull'analisi funzionale al Collège de France.
  1911 : tesi di Paul Lévy
  1912 : Volterra a Parigi : lezioni alla Sorbonne sulle funzione di linea. Redatti da Joseph Pérès e pubblicati nel 1913 come libro.
- 1912-1913 : Pérès ottiene una borsa David-Weill per un anno a Roma con Volterra.
- *M.Gateaux, actuellement professeur au Lycée de Bar-le-Duc, m'a parlé récemment de ses intentions de demander une bourse d'étude en vue de recherches qui se rattachent à vos travaux. Je lui ai conseillé de demander comme Pérès une bourse David Weill et d'aller à Rome. Je vous communique ci-inclus la lettre dans laquelle il me fait part qu'il a demandé la bourse, et m'indique ses intentions. J'ai l'intention d'appuyer sa demande.* (Borel à Volterra, 18 avril 1913) .
- *Il fut un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M.Volterra.*(Hadamard 1916).

- *Intégration d'une fonctionnelle.*
  On est alors conduit à définir l'intégrale d'une fonctionnelle continue réelle dans un champ fonctionnel réel.
  Parmi les définitions qu'on peut en donner, voici la plus simple:
  Soit la fonction variable indépendante réelle $f(\alpha); 0 \leq \alpha \leq 1$*, U une fonctionnelle réelle continue de f définie dans l'ensemble des fonctions* $0 \leq f \leq 1$*, continues ou admettant un nombre fini de discontinuités.*
  Bornons nous à définir l'intégrale de U dans le champ des fonctions $0 \leq f \leq 1$*. Divisons l'intervalle* $(0, 1)$ *en n intervalles, les limites de ces intervalles partiels étant considérées comme appartenant à l'un des deux qui lui sont adjacents.*
  Considérons la fonction f égale dans chaque intervalle partiel aux nombres $f_1, f_2, \ldots f_n$ *compris entre 0 et 1.* $U(f)$ *est une fonction des n variables* $f_1 \ldots f_n : U_n(f_1, \ldots, f_n)$.
  Considérons l'expression : $(3) I_n = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 U_n(f_1, \ldots, f_n) df_1 \ldots df_n$
  Faisons augmenter n indéfiniment, chaque intervalle tendant vers 0. Supposons que I_n *tende vers une limite I indépendante des modes de division choisis. Nous dirons que I est l'intégrale de U dans le champ* $0 \leq f \leq 1$. (Gateaux à Borel, 12 avril 1913)

- *Intégration d'une fonctionnelle.*
  On est alors conduit à définir l'intégrale d'une fonctionnelle continue réelle dans un champ fonctionnel réel.
  Parmi les définitions qu'on peut en donner, voici la plus simple:
  Soit la fonction variable indépendante réelle $f(\alpha); 0 \leq \alpha \leq 1$, *U une fonctionnelle réelle continue de f définie dans l'ensemble des fonctions* $0 \leq f \leq 1$, *continues ou admettant un nombre fini de discontinuités.*
  Bornons nous à définir l'intégrale de U dans le champ des fonctions $0 \leq f \leq 1$. *Divisons l'intervalle* $(0, 1)$ *en n intervalles, les limites de ces intervalles partiels étant considérées comme appartenant à l'un des deux qui lui sont adjacents.*
  Considérons la fonction f égale dans chaque intervalle partiel aux nombres $f_1, f_2, \dots f_n$ *compris entre 0 et 1.* $U(f)$ *est une fonction des n variables* $f_1 \dots f_n$: $U_n(f_1, \dots, f_n)$.
  Considérons l'expression : $(3) I_n = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 U_n(f_1, \dots, f_n) df_1 \dots df_n$
  Faisons augmenter n indéfiniment, chaque intervalle tendant vers 0. Supposons que I_n *tende vers une limite I indépendante des modes de division choisis. Nous dirons que I est l'intégrale de U dans le champ* $0 \leq f \leq 1$. (Gateaux à Borel, 12 avril 1913)
- Il 28 agosto 1913 : prima lettera a Volterra. Annuncia il suo arrivo a Roma in ottobre.

- Pochi dettagli sul soggiorno romano.

- Pochi dettagli sul soggiorno romano.
- 4 note nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei , inizio del contenuto della futura tesi
  Borel a Volterra , 1 gennaio 1914 : lieto che Volterra sia contento

Roma

- Pochi dettagli sul soggiorno romano.
- 4 note nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei , inizio del contenuto della futura tesi
  Borel a Volterra , 1 gennaio 1914 : lieto che Volterra sia contento
- 14 febbraio 1914 : Conferenza al seminario matematico dell'Università di Roma.

Roma

- Pochi dettagli sul soggiorno romano.
- 4 note nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei , inizio del contenuto della futura tesi
  Borel a Volterra , 1 gennaio 1914 : lieto che Volterra sia contento
- 14 febbraio 1914 : Conferenza al seminario matematico dell'Università di Roma.
- Torna in Francia nel 1914.
  Scrive a Volterra nel luglio 1914 : borsa della fondazione Commercy accordata per l'anno 1914-1915

- Cronologia precisa della comunicazione della notizia della morte di Gateaux ?

Nella tempesta

- Cronologia precisa della comunicazione della notizia della morte di Gateaux ?
- Cartolina postale del direttore del liceo di Bar-le-Duc (a Fréchet ? a Borel ? a Hadamard ?) ha giocato un ruolo cruciale.

- Dall' agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Académie des Sciences a Gateaux.

Nella tempesta

- Dall' agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Académie des Sciences a Gateaux.
- *[Gateaux] laisse sur le calcul fonctionnel des recherches fort avancées (sa thèse était en grande partie composée, et représentée par des notes présentées à l'Académie), recherches auxquelles M.Volterra, comme moi-même, attache un grand prix.* (Hadamard à Picard, 5 août 1915)

Nella tempesta

- Dall' agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Académie des Sciences a Gateaux.
- *[Gateaux] laisse sur le calcul fonctionnel des recherches fort avancées (sa thèse était en grande partie composée, et représentée par des notes présentées à l'Académie), recherches auxquelles M.Volterra, comme moi-même, attache un grand prix.* (Hadamard à Picard, 5 août 1915)
- C.R.A.S. Paris (1916)

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1916. 791

PRIX PONCELET.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Hadamard, Boussinesq, Vieille; Darboux, rapporteur.)

La Commission vous propose de décerner le prix à M. Charles de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, Correspondant de l'Académie, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

PRIX FRANCOEUR.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Darboux, Boussinesq, Vieille; Hadamard, rapporteur.)

René-Eugène Gateaux est entré, en 1907, à l'École Normale supérieure. A sa sortie, il fut un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M. Volterra. Notre Confrère fut dès l'abord frappé des belles qualités scientifiques de Gâteaux et nous a personnellement fait connaître la haute estime en laquelle il tient son talent.

Nella tempesta

- Dall' agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Académie des Sciences a Gateaux.
- *[Gateaux] laisse sur le calcul fonctionnel des recherches fort avancées (sa thèse était en grande partie composée, et représentée par des notes présentées à l'Académie), recherches auxquelles M.Volterra, comme moi-même, attache un grand prix.* (Hadamard à Picard, 5 août 1915)
- C.R.A.S. Paris (1916)

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1916. 791

PRIX PONCELET.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Hadamard, Boussinesq, Vieille; Darboux, rapporteur.)

La Commission vous propose de décerner le prix à M. Charles de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, Correspondant de l'Académie, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

PRIX FRANCOEUR.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Darboux, Boussinesq, Vieille; Hadamard, rapporteur.)

René-Eugène Gateaux est entré, en 1907, à l'École Normale supérieure. A sa sortie, il fut un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M. Volterra. Notre Confrère fut dès l'abord frappé des belles qualités scientifiques de Gâteaux et nous a personnellement fait connaître la haute estime en laquelle il tient son talent.

- *[Gateaux] allait s'engager dans une voie beaucoup plus audacieuse, et qui promettait d'être d'être des plus fécondes, en étendant au domaine fonctionnel la notion d'intégrale. Nul ne peut prévoir le développement et la portée qui auraient pu être réservés à cette nouvelle série de recherches. C'est elle qui a été interrompue par les événements.*

- *En janvier 1918, j'étais depuis plus de deux mois couché dans un lit d'hôpital, quand je repensai tout à coup à l'analyse fonctionnelle. Dans mes premiers travaux, je n'avais jamais pensé à étendre la notion d'intégrale aux espaces à une infinité de dimensions. Il m'apparut tout à coup qu'il était possible d'aborder ce problème en partant de la notion de moyenne dans une sphère de l'espace des fonctions de carrés sommables. Une telle fonction peut être approchée par une fonction à paliers, le nombre n de ses valeurs distinctes augmentant indéfiniment. La moyenne cherchée peut alors être définie comme limite de la moyenne dans une sphère de l'espace à n dimensions. Il est bien évident que cette limite peut ne pas exister; mais pratiquement, elle existe souvent.* (P.Lévy: Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Blanchard (1970))

- *En janvier 1918, j'étais depuis plus de deux mois couché dans un lit d'hôpital, quand je repensai tout à coup à l'analyse fonctionnelle. Dans mes premiers travaux, je n'avais jamais pensé à étendre la notion d'intégrale aux espaces à une infinité de dimensions. Il m'apparut tout à coup qu'il était possible d'aborder ce problème en partant de la notion de moyenne dans une sphère de l'espace des fonctions de carrés sommables. Une telle fonction peut être approchée par une fonction à paliers, le nombre n de ses valeurs distinctes augmentant indéfiniment. La moyenne cherchée peut alors être définie comme limite de la moyenne dans une sphère de l'espace à n dimensions. Il est bien évident que cette limite peut ne pas exister; mais pratiquement, elle existe souvent.* (P.Lévy: Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Blanchard (1970))
- Cours Peccot nel 1919 : il libro *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* redatto a partire da queste lezioni.

- *En janvier 1918, j'étais depuis plus de deux mois couché dans un lit d'hôpital, quand je repensai tout à coup à l'analyse fonctionnelle. Dans mes premiers travaux, je n'avais jamais pensé à étendre la notion d'intégrale aux espaces à une infinité de dimensions. Il m'apparut tout à coup qu'il était possible d'aborder ce problème en partant de la notion de moyenne dans une sphère de l'espace des fonctions de carrés sommables. Une telle fonction peut être approchée par une fonction à paliers, le nombre n de ses valeurs distinctes augmentant indéfiniment. La moyenne cherchée peut alors être définie comme limite de la moyenne dans une sphère de l'espace à n dimensions. Il est bien évident que cette limite peut ne pas exister; mais pratiquement, elle existe souvent.* (P.Lévy: Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien, Blanchard (1970))
- Cours Peccot nel 1919 : il libro *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* redatto a partire da queste lezioni.
- *M'étant occupé récemment de la question de l'extension de la notion d'intégrale multiple à l'espace fonctionnel, j'en ai parlé à M.Hadamard qui m'a signalé l'existence d'une note de R.Gateaux sur ce sujet. Mais il n'a pas pu m'en donner la référence exacte et je ne puis réussir à la trouver. [...] Quoiqu'encore mobilisé, je travaille à préparer un cours que j'espère professer au Collège de France sur les fonctions de lignes et les équations aux dérivées fonctionnelles et à cette occasion, je voudrais développer davantage certains chapitres de la théorie. [...] Je crois que la généralisation du problème de Dirichlet doit présenter plus de difficultés. Je n'ai pu jusqu'ici profiter pour le cas général de vos travaux sur les fonctions du premier degré et l'extension de la formule de Green. Ceci tient précisément à ce que je n'ai pas encore mis la notion d'intégrale multiple sous une forme commode pour ce but.* (Lévy à Volterra, 3 janvier 1919)

- *Au sujet des travaux de Gateaux, j'ai précisément appris hier que Monsieur Hadamard les avait mis en sûreté à l'Ecole Normale pendant la guerre et vient de les retirer. Rien n'est donc encore publié.*

  (Lévy à Fréchet, 6 janvier 1919)

- *Au sujet des travaux de Gateaux, j'ai précisément appris hier que Monsieur Hadamard les avait mis en sûreté à l'Ecole Normale pendant la guerre et vient de les retirer. Rien n'est donc encore publié.*

  (Lévy à Fréchet, 6 janvier 1919)
- *M.Hadamard vient de trouver plusieurs mémoires non publiés de Gateaux à l'Ecole Normale. Je ne les ai pas encore vus mais peut-être y trouverais-je ce que j'y recherche.*

  (Lévy à Volterra, 12 janvier 1919)

- *Au sujet des travaux de Gateaux, j'ai précisément appris hier que Monsieur Hadamard les avait mis en sûreté à l'Ecole Normale pendant la guerre et vient de les retirer. Rien n'est donc encore publié.*

  (Lévy à Fréchet, 6 janvier 1919)
- *M.Hadamard vient de trouver plusieurs mémoires non publiés de Gateaux à l'Ecole Normale. Je ne les ai pas encore vus mais peut-être y trouverais-je ce que j'y recherche.*

  (Lévy à Volterra, 12 janvier 1919)
- *Nous avons causé avant son départ de Rome des idées générales sur ce sujet mais il n'a rien publié là-dessus. Je pense que dans les notes manuscrites qu'il a laissées, on pourra bien probablement trouver quelques notes sur ce sujet. Je suis heureux qu'elles ne soient pas perdues et qu'elles se trouvent dans vos mains. La question est très intéressante.*

  (Volterra à Lévy, 15 janvier 1919)

- Tema più importante scoperto nelle carte di Gateaux : integrazione in dimensione infinita

- Tema più importante scoperto nelle carte di Gateaux : integrazione in dimensione infinita
- *Le fait qu'il ait choisi le calcul fonctionnel révélait un esprit aux vues larges, dédaigneux du petit problème ou de l'application facile de méthodes connues. Mais le fait prouva que Gateaux était capable de considérer une telle étude sous son aspect le plus large et le plus suggestif. Et c'est effectivement ce qu'il fit, avec l'intégration sur le champ fonctionnel, pour ne mentionner que cet exemple, le plus important, qui représente une voie entièrement nouvelles et de très grandes perspectives pour la théorie.* (Hadamard, 1919).

- Una funzione x è detta *semplice di ordine n* se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su ogni sotto-intervallo $[0, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$.
  Le x_i : coordinate di x.

Destino matematico

- Una funzione x è detta *semplice di ordine n* se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su ogni sotto-intervallo $[0, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$.
  Le x_i : coordinate di x.
- Se x, semplice, nella palla (di L^2) di centro 0 e di raggio 1, si ha $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$: n-esima sezione della palla.
  È una palla di $I\!R^n$ di raggio $\sqrt{n}$.

- Una funzione x è detta *semplice di ordine n* se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \dots, x_n$ su ogni sotto-intervallo $[0, \frac{1}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, 1]$.
  Le x_i : coordinate di x.
- Se x, semplice, nella palla (di L^2) di centro 0 e di raggio 1, si ha $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$: n-esima sezione della palla.
  È una palla di $I\!R^n$ di raggio $\sqrt{n}$.
- Consideriamo un funzionale U definito sull'insieme delle funzioni x tali che $\int_0^1 x(\alpha)^2 d\alpha \leq 1$. La sua restrizione U_n alla n-esima sezione è una funzione di $x_1, x_2, \dots, x_n$. Valor medio:

$$\mu_n = \frac{\int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n} U_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n}{W_n}$$

  dove W_n è il volume della palla in $I\!R^n$ di raggio $\sqrt{n}$.

- Una funzione x è detta *semplice di ordine n* se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su ogni sotto-intervallo $[0, \frac{1}{n}], \ldots, [\frac{n-1}{n}, 1]$.
  Le x_i : coordinate di x.
- Se x, semplice, nella palla (di L^2) di centro 0 e di raggio 1, si ha $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq n$: n-esima sezione della palla.
  È una palla di $I\!R^n$ di raggio $\sqrt{n}$.
- Consideriamo un funzionale U definito sull'insieme delle funzioni x tali che $\int_0^1 x(\alpha)^2 d\alpha \leq 1$. La sua restrizione U_n alla n-esima sezione è una funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Valor medio:

$$\mu_n = \frac{\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leq n} U_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n}{W_n}$$

  dove W_n è il volume della palla in $I\!R^n$ di raggio $\sqrt{n}$.
- Sotto certe condizioni, la successione (μ_n) ammette un limite : è la media o l'**integrale** di U sulla palla (di L^2) di centro 0 e di raggio 1.

Destino matematico

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione

Destino matematico

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione
- Si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$. Il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$: $(\sqrt{n - z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_{n-1} = volume della palla unitaria in dimensione $n-1$. Si noti: $V_k = V_{k-1} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta$.

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione
- Si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$. Il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$: $(\sqrt{n-z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_{n-1} = volume della palla unitaria in dimensione $n-1$. Si noti: $V_k = V_{k-1} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta$.
- Media di U sulla n-esima sezione (parametrizzazione $z = \sqrt{n} \sin\theta$) $\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n \theta d\theta$.

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione
- Si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$. Il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$: $(\sqrt{n-z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_{n-1} = volume della palla unitaria in dimensione $n-1$. Si noti: $V_k = V_{k-1} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta$.
- Media di U sulla n-esima sezione (parametrizzazione $z = \sqrt{n}\sin\theta$) $\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n \theta d\theta.$
- Valori preponderanti del numeratore : θ vicino a 0. Per n grande, questo integrale diventa vicino a $\int_{-\eta}^{\eta} f(\sqrt{n}\sin\frac{\psi}{\sqrt{n}})\cos^n \frac{\psi}{\sqrt{n}} \frac{d\psi}{\sqrt{n}}$

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione
- Si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$. Il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$: $(\sqrt{n-z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_{n-1} = volume della palla unitaria in dimensione $n-1$. Si noti: $V_k = V_{k-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta$.
- Media di U sulla n-esima sezione (parametrizzazione $z = \sqrt{n} \sin \theta$) $\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n} \sin \theta) \cos^n \theta d\theta.$
- Valori preponderanti del numeratore : θ vicino a 0. Per n grande, questo integrale diventa vicino a $\int_{-\eta}^{\eta} f(\sqrt{n} \sin \frac{\psi}{\sqrt{n}}) \cos^n \frac{\psi}{\sqrt{n}} \frac{d\psi}{\sqrt{n}}$
- Taylor : per n e η tendenti all'infinito, la media di U sulla n-esima sezione tende a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$. È l' integrale di U sulla palla.

Principale risultato di René Gateaux : aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. Esempio fondamentale : $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f continua e α un punto fissato dell'intervallo $[0, 1]$

- $x(\alpha)$ è una delle coordinate se x è nella n-esima sezione
- Si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$. Il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio $\sqrt{n}$ con l'iperpiano $x(\alpha) = z$: $(\sqrt{n-z^2})^{n-1}.V_{n-1}$ dove V_{n-1} = volume della palla unitaria in dimensione $n-1$. Si noti: $V_k = V_{k-1} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^k \theta d\theta$.
- Media di U sulla n-esima sezione (parametrizzazione $z = \sqrt{n} \sin\theta$) $\frac{1}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n} \sin\theta) \cos^n \theta d\theta$.
- Valori preponderanti del numeratore : θ vicino a 0. Per n grande, questo integrale diventa vicino a $\int_{-\eta}^{\eta} f(\sqrt{n} \sin \frac{\psi}{\sqrt{n}}) \cos^n \frac{\psi}{\sqrt{n}} \frac{d\psi}{\sqrt{n}}$
- Taylor : per n e η tendenti all'infinito, la media di U sulla n-esima sezione tende a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$. È l' integrale di U sulla palla.
- Generalizzabile : $U(x) = \int_{[0,1]^n} d\alpha_1 \ldots d\alpha_p f[x(\alpha_1), \ldots, x(\alpha_p), \alpha_1, \ldots, \alpha_p]$ Integrale :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{[0,1]^n} d\alpha_1 \ldots d\alpha_p \int_{\mathbb{R}^n} dx_1 \ldots dx_p f(x_1, \ldots, x_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) e^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_p^2}{2}}$$

- *Pour ma part, j'ai appris les premiers éléments du calcul des probabilités au printemps de 1919, grâce à Carvallo qui m'avait demandé de faire trois conférences sur ce sujet aux élèves de l'Ecole Polytechnique. Je suis d'ailleurs arrivé en trois semaines à des résultats nouveaux. Mais jamais je ne revendiquerai pour mes travaux de calcul des probabilités une date antérieure à 1919. Je peux même ajouter, et je l'ai dit un jour à M.Borel, que je n'ai guère vu qu'en 1929 l'importance des problèmes nouveaux que posait la théorie des probabilités dénombrables. Mais j'étais préparé par le calcul fonctionnel à l'étude des fonctions d'une infinité de variables et beaucoup de mes idées sur l'analyse fonctionnelle sont devenues sans effort des idées applicables au calcul des probabilités.* (Lévy à Fréchet, 23 avril 1945)

- *Pour ma part, j'ai appris les premiers éléments du calcul des probabilités au printemps de 1919, grâce à Carvallo qui m'avait demandé de faire trois conférences sur ce sujet aux élèves de l'Ecole Polytechnique. Je suis d'ailleurs arrivé en trois semaines à des résultats nouveaux. Mais jamais je ne revendiquerai pour mes travaux de calcul des probabilités une date antérieure à 1919. Je peux même ajouter, et je l'ai dit un jour à M.Borel, que je n'ai guère vu qu'en 1929 l'importance des problèmes nouveaux que posait la théorie des probabilités dénombrables. Mais j'étais préparé par le calcul fonctionnel à l'étude des fonctions d'une infinité de variables et beaucoup de mes idées sur l'analyse fonctionnelle sont devenues sans effort des idées applicables au calcul des probabilités.* (Lévy à Fréchet, 23 avril 1945)
- Rinnovamento dell'insegnamento delle probabilità a l'Ecole Poytechnique (calcolo degli errori in balistica).

- *Pour ma part, j'ai appris les premiers éléments du calcul des probabilités au printemps de 1919, grâce à Carvallo qui m'avait demandé de faire trois conférences sur ce sujet aux élèves de l'Ecole Polytechnique. Je suis d'ailleurs arrivé en trois semaines à des résultats nouveaux. Mais jamais je ne revendiquerai pour mes travaux de calcul des probabilités une date antérieure à 1919. Je peux même ajouter, et je l'ai dit un jour à M.Borel, que je n'ai guère vu qu'en 1929 l'importance des problèmes nouveaux que posait la théorie des probabilités dénombrables. Mais j'étais préparé par le calcul fonctionnel à l'étude des fonctions d'une infinité de variables et beaucoup de mes idées sur l'analyse fonctionnelle sont devenues sans effort des idées applicables au calcul des probabilités.* (Lévy à Fréchet, 23 avril 1945)
- Rinnovamento dell'insegnamento delle probabilità a l'Ecole Poytechnique (calcolo degli errori in balistica).
- Coscienza progressiva che i problemi di analisi funzionale si esprimono sotto una forma probabilistica.

- Come entrava la probabilità nelle considerazioni di Lévy sugli spazi funzionali ?

- Come entrava la probabilità nelle considerazioni di Lévy sugli spazi funzionali ?
- In $I\!R^n$, parte della palla di centro 0 e di raggio $\sqrt{n}$, compresa tra gli iperpiani : $z = \xi_1$ e $z = \xi_2$ (z è una delle coordinate). Rapporto tra il volume di questa porzione e quello dell'intera palla :

$$\frac{\int_{\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\xi_2}{\sqrt{n}}} \cos^n \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n \theta d\theta}$$

Quando $n \to +\infty$, tende a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (1)$$

- Come entrava la probabilità nelle considerazioni di Lévy sugli spazi funzionali ?
- In $I\!R^n$, parte della palla di centro 0 e di raggio $\sqrt{n}$, compresa tra gli iperpiani : $z = \xi_1$ e $z = \xi_2$ (z è una delle coordinate). Rapporto tra il volume di questa porzione e quello dell'intera palla :

$$\frac{\int_{\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\xi_2}{\sqrt{n}}} \cos^n \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n \theta d\theta}$$

Quando $n \to +\infty$, tende a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx. \tag{1}$$

- Interpretazione : Se la funzione x è "scelta a caso" nella palla di L^2 di centro 0 e di raggio 1,

$$P(\xi_1 \leq x(\alpha) \leq \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

- Integrale di $x \mapsto U(x) = f[x(\alpha)]$ sulla palla: speranza matematica di U data da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$$

- Integrale di $x \mapsto U(x) = f[x(\alpha)]$ sulla palla: speranza matematica di U data da
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$$
- Interpretazione probabilistica **onnipresente** nella terza parte delle Leçons d'Analyse Fonctionnelle. Lévy aveva coscienza della profonda originalità.

Destino matematico

- Integrale di $x \mapsto U(x) = f[x(\alpha)]$ sulla palla: speranza matematica di U data da
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi$$
- Interpretazione probabilistica **onnipresente** nella terza parte delle Leçons d'Analyse Fonctionnelle. Lévy aveva coscienza della profonda originalità.
- Disinteresse abbastanza generale dei matematici francesi per il calcolo delle probabilità. Può spiegare l'assenza nelle carte di Gateaux di referimento alla densità gaussiana (sebbene entrasse in maniera evidente nella media)

- estate 1922 : Wiener passa qualche settimana con Lévy a Pougues les Eaux. Discussero sulle *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Lévy (1970) : *j'ai des raisons de penser que ma troisième partie est à l'origine de son mémoire*.

- estate 1922 : Wiener passa qualche settimana con Lévy a Pougues les Eaux. Discussero sulle *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Lévy (1970) : *j'ai des raisons de penser que ma troisième partie est à l'origine de son mémoire*.
- *The present paper owes its inception to a conversation which the author had with Professor Lévy in regard to the relation which the two systems of integration in infinitely many dimensions - that of Lévy and that of the author - bear to one another. For this indebtedness the author wishes to give full credit.* (Wiener, 1923)

- estate 1922 : Wiener passa qualche settimana con Lévy a Pougues les Eaux. Discussero sulle *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Lévy (1970) : *j'ai des raisons de penser que ma troisième partie est à l'origine de son mémoire*.
- *The present paper owes its inception to a conversation which the author had with Professor Lévy in regard to the relation which the two systems of integration in infinitely many dimensions - that of Lévy and that of the author - bear to one another. For this indebtedness the author wishes to give full credit.* (Wiener, 1923)
- Gateaux ora tratatto come precursore : Lévy è la principale fonte di ispirazione.
  Gateaux had begun investigations on integration in infinitely many dimensions which had been **carried out by Lévy** (Wiener, 1923)

- Utilizzazione degli studi di Lévy sulla palla a n dimensioni e della definizione di Gateaux-Lévy dell'integrale per :
  1) *dedurre* la forma gaussiana degli incrementi
  2) *definire* la misura corrispondente nello spazio delle funzioni continue (misura di Wiener)
  3) *ottenere* l'espressione della media di un funzionale analitico

- Utilizzazione degli studi di Lévy sulla palla a *n* dimensioni e della definizione di Gateaux-Lévy dell'integrale per :
  1) *dedurre* la forma gaussiana degli incrementi
  2) *definire* la misura corrispondente nello spazio delle funzioni continue (misura di Wiener)
  3) *ottenere* l'espressione della media di un funzionale analitico
- (Lévy, 1970)

> Puisque j'ai décidé de ne rien cacher de ma propre psychologie, le moment est venu de dire que, parmi les occasions que je n'ai pas su saisir, celle d'avoir laissé à Wiener la découverte de cette fonction X(*t*) est, malgré le fait que l'existence des précurseurs en diminue l'importance, une de celles qui me laissent le plus de regrets. Tout me préparait à la faire, et je crois que j'y serais arrivé, un ou deux ans plus tard. Mais Wiener m'a devancé. Je ne pus qu'indiquer, dans un fascicule du Mémorial des Sciences mathématiques publié en 1925, le lien qui existe entre les idées de Wiener et celles de Gâteaux. Je ne me dis que bien plus tard que mon livre de 1922 avait sans doute contribué à la découverte de Wiener.

Grazie della vostra attenzione !