La derivata di Gateaux

A. Siconolfi
Università di Roma *La Sapienza*

Roma, Ottobre 2014

Data una funzione $F : X \to Y$, con X, Y spazi di Banach, e $x \in X$ si considerano i rapporti incrementali direzionali

$$\frac{F(x+hv)-F(x)}{h} \qquad \text{per } v \in X,\ h \in \mathbb{R}$$

Data una funzione $F : X \to Y$, con X, Y spazi di Banach, e $x \in X$ si considerano i rapporti incrementali direzionali

$$\frac{F(x+hv) - F(x)}{h} \qquad \text{per } v \in X,\ h \in \mathbb{R}$$

si dice che F è derivabile nel senso di Gateaux almeno quando essi hanno limite per $h \to 0$ qualsiasi sia v.

Data una funzione $F : X \to Y$, con X, Y spazi di Banach, e $x \in X$ si considerano i rapporti incrementali direzionali

$$\frac{F(x+hv)-F(x)}{h} \qquad \text{per } v \in X,\ h \in \mathbb{R}$$

si dice che F è derivabile nel senso di Gateaux almeno quando essi hanno limite per $h \to 0$ qualsiasi sia v.

In questo caso

$$v \mapsto \lim_{h\to 0} \frac{F(x+hv)-F(x)}{h} =: DF(x,v)$$

da X a Y non è più che omogenea, cioè

Data una funzione $F : X \to Y$, con X, Y spazi di Banach, e $x \in X$ si considerano i rapporti incrementali direzionali

$$\frac{F(x+hv) - F(x)}{h} \qquad \text{per } v \in X,\ h \in \mathbb{R}$$

si dice che F è derivabile nel senso di Gateaux almeno quando essi hanno limite per $h \to 0$ qualsiasi sia v.

In questo caso

$$v \mapsto \lim_{h \to 0} \frac{F(x+hv) - F(x)}{h} =: DF(x, v)$$

da X a Y non è più che omogenea, cioè

$$DF(x, \lambda\, v) = \lambda\, DF(x, v) \qquad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{R}.$$

In un'accezione più ristretta (differenziabile nel senso di Gateaux) si richiede invece che

$$v \mapsto DF(x, v)$$

sia una mappa lineare limitata, cioè in più

In un'accezione più ristretta (differenziabile nel senso di Gateaux) si richiede invece che

$$v \mapsto DF(x, v)$$

sia una mappa lineare limitata, cioè in più

$$\begin{aligned} DF(x, v+w) &= \lambda\, DF(x, v) + DF(x, w) && \text{per ogni } v,\ w \text{ in } X \\ \|DF(x, v)\|_Y &\leq \|v\|_X && \text{per un opportuno } M > 0 \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ indicano le norme di X e Y rispettivamente.

In un'accezione più ristretta (differenziabile nel senso di Gateaux) si richiede invece che

$$v \mapsto DF(x, v)$$

sia una mappa lineare limitata, cioè in più

$$\begin{array}{rcll} DF(x, v+w) & = & \lambda\, DF(x, v) + DF(x, w) & \text{per ogni } v,\ w \text{ in } X \\ \|DF(x, v)\|_Y & \leq & \|v\|_X & \text{per un opportuno } M > 0 \end{array}$$

$\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ indicano le norme di X e Y rispettivamente.

Se il limite dei rapporti incrementali è uniforme per x che varia nella palla unitaria di X allora la funzione si dice differenziabile nel senso di Fréchet (René Fréchet 1878–1973).

In un'accezione più ristretta (differenziabile nel senso di Gateaux) si richiede invece che

$$v \mapsto DF(x, v)$$

sia una mappa lineare limitata, cioè in più

$$\begin{array}{rcll} DF(x, v+w) & = & \lambda\, DF(x, v) + DF(x, w) & \text{per ogni } v,\ w \text{ in } X \\ \|DF(x, v)\|_Y & \leq & \|v\|_X & \text{per un opportuno } M > 0 \end{array}$$

$\| \cdot \|_X$, $\| \cdot \|_Y$ indicano le norme di X e Y rispettivamente.

Se il limite dei rapporti incrementali è uniforme per x che varia nella palla unitaria di X allora la funzione si dice differenziabile nel senso di Fréchet (René Fréchet 1878–1973).

Questa condizione si esprime anche richiedendo

$$\lim_{\|v\|_X \to 0} \frac{\|F(x+v) - F(x) - DF(x, v)\|_Y}{\|v\|_X} = 0.$$

Supponiamo ora che F sia Lipschitziana (Rudolf Lipschitz 1832–1903), cioè

Supponiamo ora che F sia Lipschitziana (Rudolf Lipschitz 1832–1903), cioè

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L \|x_1 - x_2\| \qquad \text{per } L > 0, \text{ ogni } x_1,\, x_2 \text{ in } X$$

Supponiamo ora che F sia Lipschitziana (Rudolf Lipschitz 1832–1903), cioè

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L \|x_1 - x_2\| \qquad \text{per } L > 0, \text{ ogni } x_1, x_2 \text{ in } X$$

Allora vale il Teorema (Henri Lebesgue (1875–1941) in dimensione 1, Hans Rademacher (1892–1969) ogni dimensione finita).

Supponiamo ora che F sia Lipschitziana (Rudolf Lipschitz 1832–1903), cioè

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L\,\|x_1 - x_2\| \qquad \text{per } L > 0, \text{ ogni } x_1,\, x_2 \text{ in } X$$

Allora vale il Teorema (Henri Lebesgue (1875–1941) in dimensione 1, Hans Rademacher (1892–1969) ogni dimensione finita).

Theorem

Se F è Lipschitziana e X, Y sono di dimensione finita allora F è differenzabile in ogni punto di X eccetto un insieme trascurabile.

Supponiamo ora che F sia Lipschitziana (Rudolf Lipschitz 1832–1903), cioè

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_Y \leq L\,\|x_1 - x_2\| \qquad \text{per } L > 0, \text{ ogni } x_1,\, x_2 \text{ in } X$$

Allora vale il Teorema (Henri Lebesgue (1875–1941) in dimensione 1, Hans Rademacher (1892–1969) ogni dimensione finita).

Theorem

Se F è Lipschitziana e X, Y sono di dimensione finita allora F è differenzabile in ogni punto di X eccetto un insieme trascurabile.

- Per funzioni come nel teorema le due nozioni di differenziabilità nel senso di Gateaux e Fréchet coincidono;
- trascurabile va interpretato in senso opportuno (misura di Lebesgue).

Si pongono due domande naturali:

- Il risultato può essere generalizzato a spazi di Banach di dimensione infinita ?

Si pongono due domande naturali:

- Il risultato può essere generalizzato a spazi di Banach di dimensione infinita ?
- Può essere definita una nozione di derivata più debole anche sui punti di non differenziabilità dell'insieme trascurabile ?

Si pongono due domande naturali:

- Il risultato può essere generalizzato a spazi di Banach di dimensione infinita ?
- Può essere definita una nozione di derivata più debole anche sui punti di non differenziabilità dell'insieme trascurabile ?

In tutti e due i quesiti la derivata di Gateaux gioca un ruolo chiave.

Il seguente teorema è il risultato di contributi di vari matematici: Mankiewicz, Christensen, Aronszajn, Phelps 1972–1978.

Il seguente teorema è il risultato di contributi di vari matematici: Mankiewicz, Christensen, Aronszajn, Phelps 1972–1978.

Theorem

Se F è Lipschitziana, X è separabile e Y ha la proprietà di Radon Nikodym allora F è differenziabile secondo Gateaux in X eccetto un insieme trascurabile.

Il seguente teorema è il risultato di contributi di vari matematici: Mankiewicz, Christensen, Aronszajn, Phelps 1972–1978.

Theorem

Se F è Lipschitziana, X è separabile e Y ha la proprietà di Radon Nikodym allora F è differenziabile secondo Gateaux in X eccetto un insieme trascurabile.

- separabile vuole dire che ammette un insieme numerabile denso
- la proprietà di Radon Nikodym dice che ogni funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R} \to Y$ è differenziabile (equivalentemente in uno dei due sensi) eccetto un insieme trascurabile di $\mathbb{R}$.

Il seguente teorema è il risultato di contributi di vari matematici: Mankiewicz, Christensen, Aronszajn, Phelps 1972–1978.

Theorem

Se F è Lipschitziana, X è separabile e Y ha la proprietà di Radon Nikodym allora F è differenziabile secondo Gateaux in X eccetto un insieme trascurabile.

- separabile vuole dire che ammette un insieme numerabile denso
- la proprietà di Radon Nikodym dice che ogni funzione Lipschitziana $f : \mathbb{R} \to Y$ è differenziabile (equivalentemente in uno dei due sensi) eccetto un insieme trascurabile di $\mathbb{R}$.

Da questo un grande impulso allo studio delle geometrie degli spazi di Banach. Spazi di Asplund ...

All'inizio degli anni 70 dello scorso secolo Frank Clarke modifica per una funzione Lipschitziana $F : X \to \mathbb{R}$ nel modo seguente la derivata di Gateaux

All'inizio degli anni 70 dello scorso secolo Frank Clarke modifica per una funzione Lipschitziana $F : X \to \mathbb{R}$ nel modo seguente la derivata di Gateaux

$$D_c F(x, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ h \to 0^+}} \frac{F(y + hv) - F(y)}{h}$$

All'inizio degli anni 70 dello scorso secolo Frank Clarke modifica per una funzione Lipschitziana $F : X \to \mathbb{R}$ nel modo seguente la derivata di Gateaux

$$D_c F(x, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ h \to 0^+}} \frac{F(y + hv) - F(y)}{h}$$

Con queste modifiche (limsup, limite rispetto h (destro) e soprattutto $y \to x$)

$$v \mapsto D_c F(x, v)$$

diventa, oltre che positivamente omogenea, anche subaddittiva.

All'inizio degli anni 70 dello scorso secolo Frank Clarke modifica per una funzione Lipschitziana $F : X \to \mathbb{R}$ nel modo seguente la derivata di Gateaux

$$D_c F(x, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ h \to 0^+}} \frac{F(y + hv) - F(y)}{h}$$

Con queste modifiche (limsup, limite rispetto h (destro) e soprattutto $y \to x$)

$$v \mapsto D_c F(x, v)$$

diventa, oltre che positivamente omogenea, anche subaddittiva.

Questo permette di definire per dualità un insieme convesso nel duale di X. Si tratta dei gradienti generalizzati di Clarke.

All'inizio degli anni 70 dello scorso secolo Frank Clarke modifica per una funzione Lipschitziana $F : X \to \mathbb{R}$ nel modo seguente la derivata di Gateaux

$$D_c F(x, v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ h \to 0^+}} \frac{F(y + hv) - F(y)}{h}$$

Con queste modifiche (limsup, limite rispetto h (destro) e soprattutto $y \to x$)

$$v \mapsto D_c F(x, v)$$

diventa, oltre che positivamente omogenea, anche subaddittiva.

Questo permette di definire per dualità un insieme convesso nel duale di X. Si tratta dei gradienti generalizzati di Clarke.

Applicazioni in Controllo Ottimo, Calcolo delle Variazioni, teoria delle soluzioni di Viscosità.