Guido Castelnuovo: un ricordo a 150 anni dalla nascita

Guido Castelnuovo e gli albori della Probabilità e della Statistica Matematica in Italia

relazione di Eugenio Regazzini (a Pavia)[1]

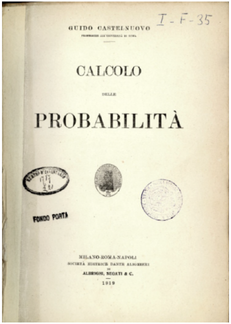
Roma, 5.XI.2015

[1]Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
eugenio.regazzini@unipv.it

G. Castelnuovo
(1865-1952)

Fu nell'anno scolastico 1914-1915 che Guido Castelnuovo scelse, per la prima volta, il Calcolo delle Probabilità come argomento del corso di *Matematiche Superiori*. L'insegnamento continuò, a partire dal 1915-1916, con l'aggiunta della Matematica Attuariale, in un corso autonomo tenuto da F.P. Cantelli.

Dallo scambio continuo di idee col Cantelli unitamente al suo crescente interesse per gli aspetti fondazionali e per talune applicazioni del CdP, nel 1918 vide la luce il trattato *Calcolo delle Probabilità*.



Frontespizio della I edizione di "Calcolo delle Probabilità"

- "Come definire la probabilità"
- "Critica dei fondamenti"
- "Confronto tra determinismo e probabilità"
- "Ricerche sul secondo teorema del limite del Calcolo delle Probabilità e sul problema dei momenti"
- "La teoria degli errori di osservazione"
- "La teoria della dispersione"

Da un lato vi è la probabilità “matematizzata” mediante la cosiddetta definizione di Laplace. Sarebbe di scarso valore se non si assumesse la validità di un “postulato di natura empirica” [*legge impirica del caso* (l.e.c.)] in base al quale la frequenza di un evento “praticamente certo” si avvicina a uno.

P. S. Laplace (1749-1827)

La legge debole dei grandi numeri dovuta a Giacomo Bernoulli (*Ars Conjectandi*, 1713) afferma che

$$P\{|f_n - p| \leq \varepsilon\} > 1 - \eta$$

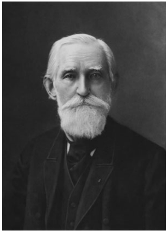
per ogni ε, $\eta > 0$ e $n \geq n_0(\varepsilon, \eta)$.

Allora, dalla l.e.c., ci si attende che la frequenza di $\{|f_n - p| \leq \varepsilon\}$, in un numero grande di n-uple di prove, sia prossima a 1 e che, quindi, f_n sia prossima a p (per p qualunque) in quelle stesse prove.

G. Bernoulli (1654-1705)

Teorema centrale del limite del CdP

In questo caso gli autori di riferimento per il Castelnuovo sono



P. L. Čebyšëv
(1821-1894)

A. A. Markov
(1856-1922)

A. M. Ljapunov
(1857-1918)

oltre a Laplace.

Convergenza debole e problema dei momenti

$(F_n)_{n\geq 1}$ successione di f.r. su $\mathbb{R}$,

$$m_n^{(r)} := \int_{\mathbb{R}} x^r dF_n(x) \qquad (r = 0, 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots)$$

Se $\lim_{n\to+\infty} m_n^{(r)}$ $(= m^{(r)})$ esiste finito per ogni $r \geq 0$, allora esistono *almeno* una f.r. F tale che $m^{(r)}$ ne sia il momento r-esimo per ogni r, e una sottosuccessione $(F_{n'})_{n'}$ di $(F_n)_{n\geq 1}$ tale che $(F_{n'})_{n'}$ converga a F puntualmente.
Se il problema dei momenti relativo a $m^{(r)}$ è determinato, allora F_n converge a F, almeno in tutti i suoi punti di continuità.
Ovviamente, la seconda parte vale nel caso particolare, ma notevolissimo, di $m^{(r)} = \int_{\mathbb{R}} x^r \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ $(r \geq 0)$.

(Fréchet & Shohat, TAMS 1931)

Il *Teorema centrale del limite*

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ n.a. indipendenti, $E(X_i) = 0$, $\sigma_i^2 := Var(X_i)$, $\mu_i^{(\alpha)} := E(|X_i|^\alpha)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\alpha = 3, 4, \ldots$ Se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i^{(\alpha)}}{(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2)^{\alpha/2}} = 0 \qquad \text{per } \alpha = 3, 4, \ldots \tag{*}$$

allora

$$E\Big(\Big(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}}\Big)^r\Big) \to \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} t^r \, dt$$

per $n \to +\infty$, $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Castelnuovo e la statistica (matematica)

"Qual'è la probabilità che il sole sorga domani? si domanda il Condorcet. Egli non pensa quali ipotesi assurde e grottesche occorrerebbe premettere per adoperare qui la teoria delle probabilità delle cause [teorema di Bayes, n.d.r.]. Si deve supporre (e non è questa la sola ipotesi, né la più strana) che il Dio Apollo estragga a sorte ogni mattina l'astro luminoso tra una serie di soli, di cui alcuni hanno l'abitudine di alzarsi ed altri sono affetti da una invincibile pigrizia; e dalla storia del mondo si cerca di dedurre in quale proporzione le due serie di soli si trovino mescolate!"

“Non è dunque opportuno presentare la domanda nella forma che la teoria delle probabilità *a posteriori* aveva adottato: ≪noto l'effetto, qual'è la probabilità di una certa causa?≫ Conviene invece formulare la questione secondo la teoria classica delle probabilità *a priori*: ≪ammesso, in base a considerazioni di qualsiasi natura, che abbia agito una determinata causa, è probabile che essa abbia prodotto l'effetto noto?≫

"Con un dado eseguisco un gran numero di *colpi* e conto quante volte sia apparso ciascuno dei sei punti. Dagli scarti che questi sei numeri presentano rispetto al valore teorico (che è un sesto del numero dei colpi) posso ricavare qualche indizio sulla maggiore o minor perfezione del dado? Fino a prova contraria supporrò il dado esatto ed esaminerò, in questa ipotesi (o *causa* secondo il linguaggio precedente), la probabilità di scarti uguali o superiori agli scarti realmente ottenuti."

“Se questa probabilità riuscirà molto piccola, vorrà dire che l’eventualità di ottenere quei punti con un dado esatto è molto rara,o quasi impossibile. Ed allora sarà giustificato il sospetto che il dado sia difettoso. Formulata, in base a misure geometriche o meccaniche, qualche ipotesi intorno al difetto stesso, potrò con una nuova applicazione del calcolo giudicare la plausibilità, tenendo conto degli effetti che conosco.
Così il calcolo delle probabilità riprende quella essenziale funzione di cui ho discorso nelle prime pagine dell’articolo già citato. Il calcolo ci dà un prezioso criterio per giudicare se sia plausibile che una data causa abbia prodotto un effetto noto, sia quando il caso interviene come agente, sia quando opera come elemento perturbatore.”

Il principio della media aritmetica di Gauss

C.F. Gauss (1777-1855)

$x_1, \ldots, x_n, \ldots$	valori osservati di una grandezza
θ	valore vero della stessa

$$\varphi(x_1 - \theta) \ldots \varphi(x_n - \theta) dx_1 \ldots dx_n$$

θ si assume dotata di legge uniforme sicché

$$f(\theta|\underline{x})d\theta \propto \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i - \theta)d\theta$$

fornisce una legge a posteriori del "valore vero".

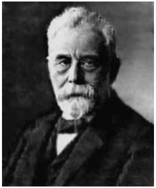
Gauss postula, infine, che il valore vero sia rappresentato dalla media $\sum_{i=1}^{n} x_i/n$, purchè la densità finale

$$\theta \mapsto k \prod_{i=1}^{n} \varphi(x_i - \theta)$$

raggiunga il massimo in corrispondenza a tale media (per ogni $(x_1, \ldots, x_n)$ in $\mathbb{R}^n$ e θ in $\mathbb{R}$). Trova che ciò può accadere se e solo se (...)

$$x \mapsto \varphi(x - \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\theta)^2/2\sigma^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

con θ in $\mathbb{R}$.



W. Lexis (1837-1914)

Consideriamo la tabella delle morti registrate in Italia in T anni successivi.
$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_T$
Consistenza della popolazione all'inizio degli anni corrispondenti
$n_1, n_2, \ldots, n_T$

G. Mortara (1885-1967)

Dall'esame delle frequenze

$$\frac{\nu_1}{n_1}, \ldots, \frac{\nu_T}{n_T}$$

è lecito considerare $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_T$ come numeri di successi governati da una stessa legge binomiale, sicché si possa parlare, ad esempio, di un tasso di mortalità comune?

La risposta costituisce un primo esempio di ragionamento conforme al concetto di test statistico. Si calcolano le dispersioni nei vari gruppi che si avrebbero se l'ipotesi fosse vera e queste, opportunamente riassunte, vengono confrontate con la dispersione osservata nei vari gruppi. Il confronto avviene per mezzo di un opportuno rapporto attribuito a Lexis.

L'opera di Castelnuovo diretta alla promozione della probabilità si distingue, oltre che per l'iniziativa della *Scuola di Scienze Statistiche e Attuariali* presso questa Università, per la costante attenzione a favore della pubblicazione di risultati significativi raggiunti da colleghi più giovani.

R. Benini (1862-1956)

C. Gini (1884-1965)

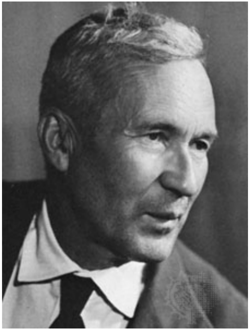
Fu assiduo, infatti, nel presentare Note e Memorie di argomento probabilistico all'Accademia dei Lincei nel quindicennio 1915-1930. Molti di quei risultati oggi si possono giudicare come duraturi.

Ne dò un cenno con riferimento a tre illustri autori: Cantelli, de Finetti, Kolmogorov.

F. P. Cantelli (1875-1966)

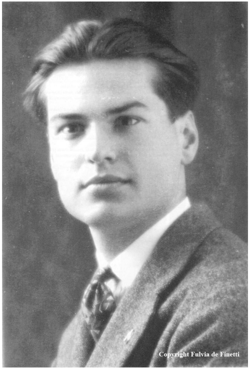
Del primo presentò, nel biennio 1916-1917, i principali contributi alla convergenza di successioni di elementi aleatori, comprendenti il celebre lemma (oggi noto come lemma di Borel-Cantelli) e, soprattutto, la prima formulazione *forte* della legge dei grandi numeri.

Nel 1918 promosse una memoria sullo schema di Lexis, nella quale il Cantelli lasciava aperto il problema dell'unicità della soluzione di una certa equazione integrale, che solo recentemente è stato risolto, in negativo (Kleptsyn e Kurtzmann, in *The Annals of Probability*, settembre 2015).



A.N. Kolmogorov
(1903-1987)

Di Kolmogorov presentò almeno quattro Note (1929, 1930, 1932a,b), le ultime due (ispirate ai lavori di de Finetti su p.i.i.s.) contengono la celebre rappresentazione (trasformata di Fourier) della generica legge infinitamente divisibile con varianza finita.



B. de Finetti
(1906-1985)

Di de Finetti, presentò (insieme a T. Levi-Civita) nel 1930 una fondamentale Memoria sulle successioni di *eventi* scambiabili e, nel 1933, tre Note sull'estensione della rappresentazione a *numeri aleatori*.
Ancora, fra il 1929 e il 1931, le cinque Note in cui de Finetti introduceva il concetto di processo ad incrementi aleatori e stazionari e ne caratterizzava la legge (leggi infinitamente divisibili), prima di Paul Lévy (1934, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa).