Il problema didattico dell’insegnamento-apprendimento della ‘definizione’.

- non è banale.
- è un problema culturale.

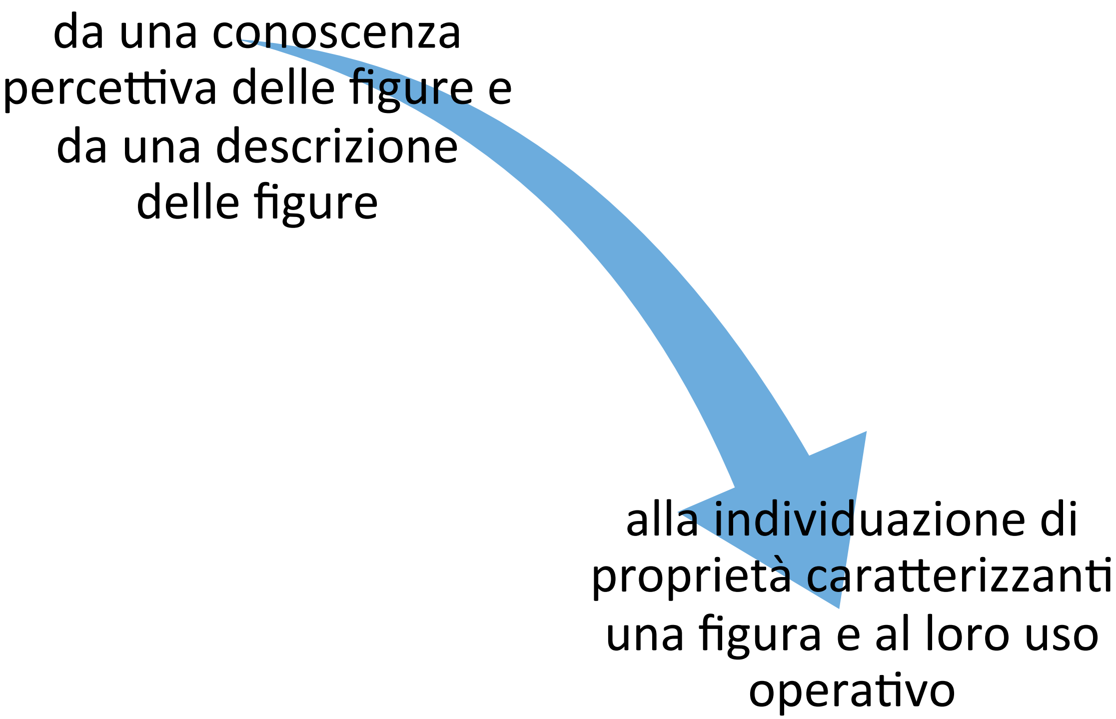
Una scienza culturalmente stratificata, una scienza antica ‘condensa’ nel linguaggio e nelle definizioni interi suoi campi di sviluppo.

La trasmissione culturale (scolastica e non) di questa scienza rovescia, inevitabilmente, sui ragazzi e sui non-esperti interi settori e lunghi periodi di evoluzione attraverso termini e definizioni.

Pensiamo alla matematica, ma anche alla geologia, oppure, alla musica, alla poetica, alla fisiologia, all'informatica, ….

Ci occuperemo delle definizioni in geometria elementare ma l’approccio alle definizioni ed alla acquisizione di termini specifici è problema trasversale.

Alcune definizioni di figure elementari hanno avuto una evoluzione storica e questo ci permette di inquadrare le difficoltà che incontrano i ragazzi sia in una prospettiva di potenziale evoluzione cognitiva di alcune definizioni che di sviluppo del concetto stesso di definizione.



Si farà riferimento ad una esperienza condotta di alcune classi dell'area romana e documentata in

Batini M., Cannizzaro L., Cavallaro B., De Santis C., Lombardi V., Menghini M. & Percario L.: 2004, *Figure Geometriche e Definizioni*. *Un itinerario guidato per l'inizio della scuola secondaria,* Centro Ricerche Didattiche, UGO MORIN, Collana "Quaderni di ricerca didattica" della rivista L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate.

Ricerca nel sito: http://www.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/

➔ Le riviste ➔ Quaderno Figure Geometriche …

Schede finali quaderno

Discussione

Per i docenti di Scuola Secondaria di Primo Grado è al centro della attenzione il problema didattico di spiegare cos’è un certo oggetto geometrico, una certa figura.

Per i docenti di Scuola Secondaria di Secondo Grado è al centro dell'attenzione l'uso delle definizioni per dimostrare, il concetto di definizioni equivalenti e la maturazione del concetto di definizione.

Vi proponiamo di ripensare alla Scuola Secondaria di Primo Grado,

ovvero alla fascia di età dagli 11 ai 14 anni:

- quando vengono introdotte le prime definizioni?
- in quale ordine?
- vengono introdotte esplicitamente o implicitamente?
- quale definizione di quadrato viene data per prima?
- quale di parallelogramma?
- quale di cerchio?
- quale di angolo?
- …

Vi proponiamo di ripensare alla Scuola Secondaria di Secondo Grado

e all’uso che promuoviamo delle definizioni.

- quando compaiono le definizioni nella attività di classe?
- vengono usate prevalentemente per
  - riassumere,
  - spiegare,
  - illustrare,
  - classificare
  - dedurre
- vengono usate più classificazioni diverse delle stesse figure.

Gli *Elementi* di Euclide, Libro I, Definizioni

I. **Punto** è ciò che non ha parti.
II. **Linea** è lunghezza senza larghezza.
III. **Estremi** di una linea sono punti.
IV. **Linea retta** è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa
V. **Superficie** è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
VI. **Estremi** di una superficie sono linee.
VII. **Superficie piana** è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa (cioè, alle sue rette).
VIII. **Angolo piano** è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.
IX. Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'**angolo** si chiama **rettilineo**.
X. Quando una retta innalzata su una retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è un **angolo retto**, e la retta innalzata si chiama **perpendicolare** a quella su cui è innalzata.
XI. **Angolo ottuso** è quello maggiore di un retto.
XII. **Angolo acuto** è quello minore di un retto.
XIII. **Termine** è ciò che è estremo di qualche cosa.
XIV. **Figura** è ciò che è compreso da uno o più termini.
XV. **Cerchio** è una figura piana compresa da un'unica linea tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè, sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.
XVI. Quel punto si chiama **centro** del cerchio.
XVII. **Diametro** del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.

XVIII. **Semicerchio** è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E **centro** del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.

XIX. **Figure rettilinee** sono quelle comprese da rette, vale a dire: **figure trilatere** quelle comprese da tre rette, **quadrilatere** quelle comprese da quattro e **multilatere** quelle comprese da più di quattro rette.

XX. Delle figure trilatere, è **triangolo equilatero** quello che ha i tre lati uguali, **isoscele** quello che ha soltanto due lati uguali, e **scaleno** quello che ha i tre lati disuguali.

XXI. Infine, delle figure trilatere, è **triangolo rettangolo** quello che ha un angolo retto, **ottusangolo** quello che ha un angolo ottuso, ed **acutangolo** quello che ha i tre angoli acuti.

XXII. Delle figure quadrilatere, è **quadrato** quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, **rettangolo** quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, **rombo** quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, **romboide** quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera, né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino **trapezi**.

XXIII. **Parallele** sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall’una e dall’altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

La definizione esprime le proprietà sufficienti a distinguere una figura cioè “gli elementi minimi” con i quali descrivere un oggetto di fatto già conosciuto.

Contiene quindi in nucleo l’idea di **condizione necessaria e sufficiente.**

E' fondamentale per il concetto di implicazione:
“se un quadrilatero è un rettangolo allora è un parallelogramma”

Mentre c’è il germe della deduzione nell’affermazione “è necessario avere le proprietà di un parallelogramma per avere quelle di un rettangolo”

Definizioni descrittive e definizioni normative

Definizioni inclusive ed esclusive

confronto concreto

Per avviare un confronto concreto proviamo a riflettere sui punti seguenti:

1- Quale definizione di trapezio isoscele è la più usata durante l’attività didattica?

2- Quale definizione di trapezio isoscele usa il testo che avete in adozione?

3- In quale punto della proposta curricolare viene introdotta ?

4- Quante volte viene richiamata?

5- In quali esercizi è prevista come elemento cruciale?

6- Vengono usate, anche solo occasionalmente, altre definizioni?

Entrando nella scuola secondaria superiore i ragazzi:

- *conoscono le figure geometriche elementari*
- *non hanno familiarità con quelle proprietà specifiche di ciascuna figura che consentono di individuare una definizione*
- *debbono ancora iniziare il percorso che li porterà ad usare più definizioni diverse per lo steso ente e a verificare l'equivalenza di diverse definizioni.*

È compito della scuola superiore promuovere la maturazione del concetto di 'condizione necessaria e sufficiente'.

È compito della scuola superiore promuovere il controllo metacognitivo sull'uso delle diverse definizioni in funzione delle finalità per le quali si compie ogni singolo processo di dimostrazione e in funzione del contesto in cui si opera.

Poincaré scrive

"Per un filosofo o uno scienziato, una definizione è una buona definizione se si applica a tutti gli oggetti che devono essere definiti e si applica solo a questi; è questo ciò che soddisfa le regole della logica.

Ma in educazione non è così; una definizione è una buona definizione se può essere capita dagli allievi."

E così Peano

Da: Le Definizioni in Matematica, Periodico di Matematiche, IV, I, 1921, 175-189

"Le definizioni sono utili ma non necessarie, poiché al posto del definitosi può sempre sostituire il definiente, e perciò eliminare da tutta la teoria il definito …… Le definizioni in una teoria sono arbitrarie……" (p. 189)

La Teoria dei Livelli del pensiero geometrico

è stata formulata dal matematico olandese Pierre van Hiele,

è, a nostro avviso, una buona sintesi di esigenze pedagogiche, cognitive e matematiche

Fondamentali nella teoria di v. H. sono:

- ✓ i livelli di pensiero geometrico
- ✓ le fasi di apprendimento

Sui livelli di pensiero è bene sottolineare che:

> Il passaggio da una struttura meno differenziata ad una differenziata viene definito come *la transizione ad un più alto livello di pensiero*.
>
> "… un individuo raggiunge un più alto livello di pensiero, quando un nuovo ordine del pensiero gli consente, rispetto a certe operazioni, di applicare queste stesse operazioni *a nuovi oggetti*.
>
> Non sarà il solo insegnamento a favorire ciò, ma una serie di occasioni ed esempi certamente determinerà una situazione favorevole."
>
> (van Hiele, 1986)

Il **livello base** è livello visuale, del riconoscimento, della percezione, del simbolo in cui il ragazzo condensa tutte le proprietà di una figura geometrica di cui ha avuto esperienza. Le figure sono rappresentative di tutte le loro proprietà, hanno un carattere di immagine. L'alunno riconosce un rettangolo dalla sua forma e questo gli appare diverso da un quadrato. Dopo avergli mostrato un rombo, un quadrato, un parallelogramma e un rettangolo, egli sarà in grado di riprodurre queste figure senza errori.

Al **secondo livello,** livello della descrizione, dell'analisi, del segnale significativo le figure si riconoscono dalle loro proprietà. Le proprietà risulteranno fissate, stabilmente se confrontate con proprietà analoghe di altre figure.
Quasi per abitudine, i simboli divengono **segnal**i; ad esempio, da tutte le proprietà appartenenti al simbolo rombo (lati uguali, lati paralleli a due a due, angoli opposti uguali, diagonali perpendicolari) ne emerge una (lati uguali) che diviene il *segnale significativo* della figura. Da questo segnale il ragazzo è in grado di anticipare altre proprietà.

L'alunno è in grado di:
- manipolare le caratteristiche note di un modello familiare
- associare il nome di "triangolo isoscele" al triangolo specifico, riconoscendo che due suoi lati sono uguali
- ricavare che anche i due angoli alla base sono uguali

Ma le proprietà non sono ancora ordinate,
- una figura tracciata sulla lavagna con quattro angoli retti è un rettangolo! In questa fase un quadrato non è riconosciuto ancora come un particolare rettangolo.

Il terzo livello (livello teorico, con relazioni logiche e proprio della geometria Euclidea): l'alunno è nelle condizioni di operare 'trasversalmente' con le relazioni note delle figure che conosce; in forza dei teoremi di congruenza egli è capace di dedurre proprietà che riguardano una configurazione geometrica totale, della quale le figure esaminate sono casi particolari. Ma in tale livello il significato intrinseco della deduzione non è ancora chiaro.

un esempio:

Teorema. Le bisettrici degli angoli di base di un triangolo isoscele formano, con la base, un nuovo triangolo isoscele.

Per essere in grado di dimostrare questo teorema si deve sapere che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; perciò anche nel nuovo triangolo gli angoli alla base sono uguali. Ma un triangolo che ha due angoli uguali è isoscele.

E' da tenere presente che tale situazione coinvolge due teoremi uno inverso dell'altro e la capacità di riconoscere la doppia implicazione matematica è tipica del quarto livello.

Al quarto livello, livello della logica formale, delle classificazioni, della definizione della geometria Euclidea**:** l'alunno è in grado di operare 'trasversalmente' con le relazioni note delle figure che conosce, per i teoremi di congruenza deduce proprietà che riguardano una configurazione geometrica totale, della quale le figure esaminate sono casi particolari.

Non è ancora chiaro il significato intrinseco della deduzione.
Comprende le definizioni. Compie deduzione informali.
Il pensiero si occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente.

Il quinto livello studia la natura delle leggi logiche**.**
Non è corredato da commenti, ne' tanto meno da esempi o illustrazioni.
V.H. considera scolasticamente assai raro avere a che fare con questo livello, o con livelli più alti.

L'azione didattica si concentra sul passaggio

dal simbolo $\rightarrow$ *segnale significativo* $\rightarrow$ *alla definizione*

simbolo: *una figura con il complesso delle sue proprietà*

segnale significativo: quella tra le proprietà che richiama alla memoria l'intero simbolo

definizione: la proprietà sufficiente a distinguere la figura

In particolare V.H. stigmatizza:

l'opportunità di una consapevolezza precoce di quali sono le difficoltà che incontra lo studente studiando la geometria.

Non si tratta di prevenire i momenti critici ma piuttosto di prevederli e adeguare l'azione per accompagnare il passaggio.

Osservazione di Hans Freudenthal relativa alla teoria di van Hiele:

Hans Freudenthal, 1994, Ripensando l'educazione matematica. Lezioni tenute in Cina, La Scuola Editrice,

"Ci possono essere incertezze, per esempio nel sapere se un quadrato appartiene ai rombi, o un rombo ai parallelogrammi. L'insegnante può imporre le definizioni per risolvere queste controversie, ma se fa così degrada la matematica a qualcosa che è governata da regole arbitrarie […]. Le proprietà del parallelogramma sono connesse tra loro; una di esse può diventare la fonte dalla quale sorgono le altre. Così ora nasce una definizione, e ora diventa chiaro perché un quadrato deve essere un rombo e un rombo deve essere un parallelogramma. In questo modo lo studente impara a definire, e impara per esperienza che definire è più di descrivere, e che è un mezzo per organizzare deduttivamente le proprietà di un oggetto."

Tornando al lavoro confluito nel Quaderno:

tra le indicazioni didattiche che hanno guidato il lavoro degli insegnanti nelle classi citiamo:

- sollecitare del lavoro autonomo dell'alunno, l'alternanza di lavoro individuale su schede con la discussione in classe;
- proporre esercizi guidati di rinforzo;
- proporre esercizi che alludano a materiali concreti e rinviino all'uso di software dinamici;
- mettere in atto un avvio lento quanto lo richiedono i ragazzi.

Il riepilogo "lento" e dettagliato delle proprietà dei triangoli e dei quadrilateri, con risposte molto guidate poggia su questa teoria.

All'ingresso della Scuola Secondaria di Secondo Grado si potrebbe prevedere qualche forma di rifiuto o di sufficienza da parte dei ragazzi, almeno da parte di alcuni di essi.

In realtà questo non si verifica.

Va infatti tenuto presente che all'inizio di un nuovo ciclo, con un'insegnante e con compagni nuovi, gli alunni sono meno disinvolti e soprattutto sono contenti di vedere che conoscono bene alcune cose.

Vi è anche un ulteriore intento didattico:

- per arrivare ad una certa precisione e uniformità di linguaggio, è auspicabile che i simboli impiegati provengano da una stessa base: è opportuno partire da uno stesso materiale a livello inferiore, ed esaminare se si arriva, con uno stesso punto di partenza, a sviluppare gli stessi domini dei simboli al livello superiore.

Così qualche volta si arriva a chiedere all'alunno di ritagliare una figura, al fine di verificarne le proprietà di simmetria.

Schede del Quaderno:

■ Scheda **1**: vengono proposte semplici costruzioni geometriche di triangoli utilizzando il concetto di simmetria assiale

Consideriamo la simmetria come nota, almeno a livello percettivo. Qualunque sia il metodo di costruzione usato, una successiva discussione in classe farà emergere le caratteristiche dei singoli triangoli (sia quelli disegnati che da disegnare) e la consapevolezza dell'esistenza di invarianti legati a questa trasformazione.

■ Scheda **2:** si classificano i tipi di triangolo (isoscele, equilatero, acutangolo, ottusangolo). Si chiede di disegnare triangoli con particolari caratteristiche.

Primi problemi di linguaggio: per la maggior parte degli studenti "non isoscele" significa equilatero. Una successiva discussione in classe, svolta sull'uso dei termini 'almeno', 'solo', etc., in genere diverte gli alunni e li porta alle risposte corrette e in seguito ad una maggiore attenzione.
Alcuni dei triangoli dell'esercizio 2 non si possono disegnare (quale ottusangolo e rettangolo). Gli alunni devono riflettere sul doppio aggettivo e anche sulla congiunzione "e", questo non è inizialmente facile per tutti.

■ Scheda **3**: si basa sulle proprietà di simmetria del triangolo isoscele e propone una dimostrazione guidata (asse è bisettrice, altezza, mediana).

Si propongono in parallelo altri esercizi sulla simmetria assiale.

■ Scheda **4**: osservazioni e disegni su altezze e mediane di triangolo qualunque. Si torna poi alle proprietà che caratterizzano il triangolo isoscele.

Si propongono Macro con Cabri

■ Scheda **5**: confronto fra proprietà del quadrato e del rettangolo

Non è opportuno qui anticipare le definizioni di queste due figure, ma piuttosto utilizzarle per far ricordare quanto già appreso alla scuola media. E' opportuno, invece, come nelle schede successive, abituare gli allievi, guidando le loro osservazioni, a confrontare le caratteristiche di figure diverse.

■ Scheda **6**: confronto fra proprietà del quadrato e del rombo

Sarà opportuno guidare gli allievi ad osservare che l'essere simmetrico rispetto alla diagonale è una proprietà del quadrato, ma non del rettangolo e che quindi le simmetrie di un quadrato sono maggiori di quelle di un rettangolo. La dimostrazione data nel secondo punto va vista a livello intuitivo e non è opportuno chiedere che l'allievo in questa sede la formalizzi, sapendo per esempio indicare ipotesi e tesi, e nemmeno che la sappia ripetere.

■ Scheda **7:** osservazioni sulle diagonali del rettangolo (misure e angoli).

■ Scheda **8**: confronto fra proprietà del rettangolo e del parallelogramma

Tramite il maccano, si introduce il parallelogramma a partire dal rettangolo. Ciò dovrebbe permettere di 'vedere' più facilmente le proprietà comuni e quelle non comuni alla figura di partenza e alla sua trasformata. La scheda 8 non porta a una sorta di definizione di parallelogramma, come invece la 6 per il rombo, ma nella prima serie di domande si fa appello alla figura con il complesso delle sue proprietà (simbolo) e nella seconda a quella fra le proprietà che richiama alla memoria l'intero simbolo (segnale significativo).

- Scheda **9**: si introduce il trapezio con alcune caratteristiche.

- Nelle schede **10** e **11** attraverso la compilazione di tabelle si invitano gli alunni a riconoscere i quadrilateri dalle loro proprietà e capire quando le proprietà individuano il tipo di quadrilatero. Ovvero corrispondono alla definizione

Nelle scheda 10 si chiede di riconoscere alcune proprietà caratteristiche delle figure.
Nella scheda 11 Si cerca quella tra le proprietà che richiama alla memoria l’intero simbolo, il segnale significativo. Diventano importanti le relazioni. Si passa dal segnale significativo alla definizione (basta..) osservando le varie relazioni dal punto di vista logico.

BIBLIOGRAFIA

Batini M., Cannizzaro L., Cavallaro B., De Santis C., Lombardi V., Menghini M. Percario L.: 2004, Figure Geometriche e Definizioni. Un itinerario guidato per l'inizio della scuola secondaria, Quaderno Monografico di 73 pagine del Centro Ricerche Didattiche, UGO MORIN, Collana "Quaderni di ricerca didattica" della rivista *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*.

Cannizzaro, L. & Menghini, M.: 2001. From geometrical figures to linguistic rigor: Van Hiele's model and the growing of teachers' awareness. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th International conference for the Psychology of Mathematics Education (I-291). Utrecht, Netherlands.

Cannizzaro L. & Menghini, M.: 2004. Geometric Figures from Middle to Secondary School: Mediating Theory and Practice, Proceedings of CERME 3 (2003): TG11, CD, Ed. Plus, Pisa.

De Santis, C. & Percario, Z.: 1997. Dalle costruzioni geometriche al rigore linguistico: un'esperienza didattica all'inizio del biennio. 18° Convegno Nazionale UMI–CIIM, Notiziario U.M.I, supplemento al n.7, 129-132.

Cannizzaro L., Cavallaro B., 2004. Passare dalla descrizione alla deduzione lavorando alla costruzione del concetto di definizione, Atti Incontri con La Matematica, Castel San Pietro 2004 xxxxxxx

Cannizzaro L. & Menghini, M.: 2006. From Middle to High School: Teachers reflecting on the role of definitions with the aid of van Hiele's Theory. Mediterranean Journal For Research In Mathematics Education, 5, 2, 31-48

Bagni G.T., D'Amore B. 1992. La classificazione dei quadrilateri. IMSI, pag. 785

Colombo B. C. 1992. I quadrilateri. IMSI, pag. 785

Bertazzoli L., Pesci A., Tomassini F. 1999. Esplorare quadrilateri con Cabri: un punto di partenza per lo sviluppo di interessanti percorsi geometrici. IMSI, pag. 309

La Teoria di v. H. mette in evidenza che:

- il professore e gli studenti parlano due linguaggi ben differenti, meglio pensano a due livelli differenti
- quando un insegnante sottopone all'attenzione dei suoi studenti una struttura, è portato a guidare l'osservazione secondo una rete di relazioni che gli studenti non possiedono e della quale ignorano il senso
- nonostante il professore spieghi i concetti, i ragazzi non riescono a maturare un vero e proprio apprendimento, impareranno per abitudine a manipolare relazioni matematiche che non conoscono e delle quali non hanno mai visto la nascita
- gli studenti finiscono per disporre della stessa unica rete del professore, identica per tutti, rete nelle quale le relazioni sono di tipo logico e deduttivo
- tale rete risulta senza rapporti con le altre osservazioni maturate dall'allievo; allora egli non conoscerà altro, oltre a ciò che gli è stato insegnato
- è difficile per lo studente conservare nella memoria a lungo termine una rete di relazioni così costruita, non fondata su esperienze sensoriali personali

Esercizio finale (con attenzione al *nostro* uso dell'interpretazione insiemistica)

Cercare, tra le seguenti descrizioni, coppie di definizioni

- equivalenti
- una inclusa nell'altra
- con un'intersezione (eventualmente vuota)

T1 è un quadrilatero che ha una coppia di lati paralleli, mentre gli altri due lati sono uguali

R1 è un quadrilatero che ha 4 angoli uguali

S1 è un quadrilatero che ha 4 lati uguali

K1 è un quadrilatero che ha due coppie di lati consecutivi uguali

T2 è un quadrilatero che ha un asse di simmetria che non è una diagonale

R2 è un quadrilatero che ha due assi di simmetria, che non sono diagonali

S2 è un quadrilatero che ha due assi di simmetria, che sono diagonali

K2 è un quadrilatero che ha un asse di simmetria che è una diagonale

P è un quadrilatero che ha un centro di simmetria

Si dimostra che

R1 ⇔ R2

K1 ⇔ K2

S1 ⇔ S2

T2 => T1 (ovvero T2 è sottoinsieme di T1)

S2 => K2

P => T1

S1 => P

S2 => P