C E N T R O   R I C E R C H E   D I D A T T I C H E   U G O   M O R I N

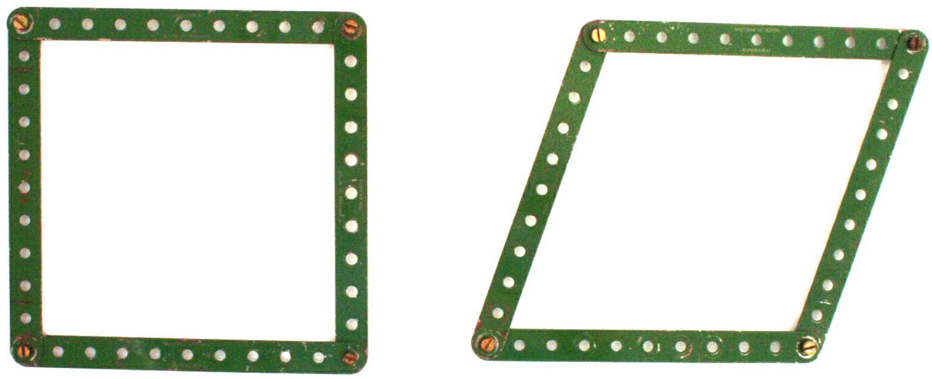
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA
E DELLE SCIENZE INTEGRATE

LA COSTRUZIONE DEL SAPERE MATEMATICO PER LA SOCIETÀ

IN UNA SCUOLA IN TRASFORMAZIONE: CONTENUTI, METODI, STRUMENTI

FIGURE GEOMETRICHE E DEFINIZIONI

UN ITINERARIO GUIDATO PER L'INIZIO DELLA SCUOLA SECONDARIA



MARIA BATINI, LUCILLA CANNIZZARO, BRUNA CAVALLARO, CARLA DE SANTIS, VANNA LOMBARDI, MARTA MENGHINI, LINDA PERCARIO

GRUPPO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
COORDINATO DA LUCILLA CANNIZZARO E MARTA MENGHINI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

FIGURE GEOMETRICHE E DEFINIZIONI

UN ITINERARIO GUIDATO PER L'INIZIO DELLA SCUOLA SECONDARIA

Maria Batini, Lucilla Cannizzaro, Bruna Cavallaro, Carla De Santis,
Vanna Lombardi, Marta Menghini, Linda Percario

Gruppo di Ricerca in Didattica della Matematica
coordinato da Lucilla Cannizzaro e Marta Menghini
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

2004

LA COSTRUZIONE DEL SAPERE MATEMATICO PER LA SOCIETÀ
IN UNA SCUOLA IN TRASFORMAZIONE:
CONTENUTI, METODI, STRUMENTI

INDICE

INTRODUZIONE

Il lavoro[1] nasce dalla constatazione che gli alunni che entrano nella scuola secondaria superiore, pur conoscendo le figure geometriche, non hanno familiarità con le proprietà particolari di esse, vale a dire non sempre sanno evidenziare le differenze specifiche da esprimere nelle definizioni.

D'altra parte, è compito della scuola superiore orientare gli alunni verso una maggiore consapevolezza e verso la *definizione* delle figure geometriche[2], intesa qui come l'espressione degli elementi minimi con i quali descrivere una figura già di fatto conosciuta. Su questo si basa il concetto di "condizione necessaria e sufficiente” e l'avvio alla dimostrazione[3].

---

1 Lavoro effettuato nell’ambito del progetto CNR “ La costruzione del sapere matematico per la società”; e dei programmi di ricerca cofinanziati dal MIUR: “Aspetti lunguistici nella elaborazione dei concetti matematici da parte dei non specialisti” (Prot. 2002013971/005) e “Problemi di insegnamento-apprendimento in matematica: significati, modelli,teorie” (Prot. 2003011072)

2 Relativamente al problema della definizione degli oggetti matematici, si può vedere, sul versante epistemologico:

- G. Peano, *La definizione in matematica*, Periodico di Matematiche, IV , I, 1921, 175-189
- C. Bernardi, "La logica nella didattica: le definizioni", Nuova Secondaria,V, 1 1987, 26-27.

Sul versante didattico:

- F. Furinghetti (a cura di) *Definire, argomentare, dimostrare nel biennio e nel triennio*, Progetto Strategico CNR, Quaderno n. 13, 1992
- J. D. Godino, C. Batanero, *Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici*, Pitagora, Bologna, 1999
- C. Marchini, *Le definizioni e le notazioni: un problema didattico*, Quaderni Dipartimento di Matematica, Università di Lecce, n. 1, 1992
- D. Paola, *Le definizioni: dalla parte degli studenti*, L’insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, 23 A-B, 6, 562-600

3 Questioni didattiche sulla dimostrazione sono discusse in:

- N. Balacheff, *Imparare la prova*, La Matematica e la sua Didattica, 2, 2001, 116 – 149
- R. Duval, *Struttura del ragionamento deduttivo e apprendimento della dimostrazione*, La Matematica e la sua Didattica, 4, 1996, 370-393
- G. Hanna, *Il valore permanente della dimostrazione*, La Matematica e la sua Didattica, 3, 1997, 236-252

E' stato elaborato un itinerario che, con una serie di esercizi, metta via via in evidenza varie proprietà di triangoli e quadrilateri, per arrivare a fissare l'attenzione su quelle proprietà che caratterizzano le varie figure.

Nell'itinerario, guidato principalmente attraverso schede di lavoro individuali, si alternano richieste di costruzioni o manipolazioni geometriche a osservazioni di figure già disegnate.

E' particolarmente importante il modo in cui l'attività è condotta: il lavoro autonomo dell'alunno, l'alternanza delle schede con la discussione in classe, con altri esercizi guidati, ed eventualmente con il laboratorio centrato sull'uso di un software geometrico (quale il Cabri)[4].

Tali indicazioni nascono da un presupposto teorico: la *teoria dei livelli* di van Hiele[5], con la quale il matematico olandese descrive le tappe del pensiero matematico che gli alunni conquistano sulla base di specifiche attività didattiche.

- D. Paola, O. Robutti, La dimostrazione alla prova, in "Matematica e aspetti didattici", Quaderno 45, MPI, 2001, 97-201

[4] Sul software geometrico (ed in particolare Cabri) si vedano:

- Commissione UMI per i nuovi programmi: le nuove tecnologie nell'attività di *insegnamento - apprendimento della matematica*, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 24B, 5, 2001, 407-418
- M. Barra, *Geometria dello spazio*, in "L'insegnamento della geometria dello spazio" quaderno 19/2, MPI (Direzione Classica)-UMI, 1997, 111-146.
- M. Barra, *Cabri, "il movimento", l'equiscomponibilità e le tassellazioni per dimostrare* varie generalizzazioni del teorema di Pitagora e infinite scomposizioni, Progetto Alice, N. 8, Vol. 3, 2002, 201-250.
- P. Boieri, *Introduzione a Cabri-Géomètre,* L'Insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, n.6, 701-717
- G. Finos, *Parallelogrammi (…e Cabri aiuta),* L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, 26A, 1, 2003, 30-47

Segnaliamo inoltre il Bollettino *CabrIRRSAE*, da richiedere a IRRE Emilia Romagna, via U. Bassi 7, 40121 Bologna, o leggibile (e scaricabile) nel sito: http://kidslink.scuole.bo.it/cabri/rivista.htlm.

[5] Per approfondire la conoscenza della teoria di van Hiele è possibile partire dai seguenti riferimenti in lingua italiana:

- H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La Scuola, 1994
- E. Gallo, *Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche*, 18° Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica "Dalla Scuola media alle superiori: continuità nell'insegnamento della matematica", Notiziario U.M.I., Luglio 1997, Supplemento al n. 7, Anno XXIV, 21-34

Su questa teoria poggia la scelta di un lento e dettagliato riepilogo delle proprietà dei triangoli e dei quadrilateri, con risposte molto guidate. A questo livello si potrebbe prevedere qualche forma di rifiuto o di sufficienza da parte dei ragazzi. In realtà l'esperienza ci ha insegnato che questo non si verifica: va, infatti, tenuto presente che all'inizio di un nuovo ciclo, con un insegnante e con compagni nuovi, gli alunni sono meno disinvolti e soprattutto sono contenti di vedere che conoscono bene certi argomenti. In alcuni casi, quando ad esempio si chiede all'alunno di ritagliare una figura al fine di verificarne le proprietà di simmetria, l'insegnante può valutare se accettare che questo passaggio sia solo "mentale".
Vi è un ulteriore intento didattico nella scelta effettuata: se si vuole arrivare ad una certa precisione, e conseguente uniformità, di linguaggio, è auspicabile che i simboli impiegati provengano da una stessa base: bisogna partire dallo stesso materiale a livello inferiore, ed esaminare se si arriva, con uno stesso punto di partenza, a sviluppare gli stessi domini dei simboli superiori.
Le principali figure geometriche sono considerate note a livello *percettivo* (come *simbolo*, nella definizione di van Hiele); non sono date definizioni, anche se l'insegnante si assicurerà che gli alunni possano riconoscere e distinguere le varie figure; solo per triangolo isoscele e equilatero vengono richiamate le proprietà relative ai lati (con riferimento ad un disegno). L'azione didattica si concentra in modo particolare sul passaggio da quello che van Hiele chiama *simbolo* (una figura con il complesso delle sue proprietà) al *segnale significativo* (quella, fra le proprietà, che richiama alla memoria l'intero simbolo), e dal *segnale* alla *definizione* (la proprietà sufficiente a distinguere la figura).

La linea seguita è in accordo con un'affermazione di Hans Freudenthal, secondo cui, "non si può definire un oggetto senza prima conoscerlo".
Riteniamo infatti che lo scopo della corretta definizione, a questo livello scolare, non sia di spiegare cos'è un certo oggetto, ma di spiegare "cos'è una definizione"; essa non può quindi essere impartita prima che l'oggetto, con tutte le sue proprietà, sia conosciuto.

Questa "prudenza" non significa un abbassamento degli obiettivi prefissati, semplicemente si cerca di rimandare il momento di sistemazione linguistica e concettuale da parte dell'insegnante a quando sia possibile una maggiore sintonia tra insegnante e allievo.

L'intero percorso richiede circa 8 ore di lezione. Consigliamo di dedicarvi un paio d'ore a settimana, alternandolo con altri argomenti. Alcune delle schede possono anche essere date per casa.

Nel primo paragrafo viene descritta la teoria dei livelli di van Hiele, segue poi, nel secondo paragrafo, un'ulteriore riflessione storico-didattica sulle definizioni.
Il terzo paragrafo contiene commenti e suggerimenti didattici riferiti alle singole schede di lavoro; in particolare è illustrato l'ausilio offerto dal software Cabri. Tali commenti scaturiscono dalle sperimentazioni del materiale proposto, effettuate negli anni precedenti dalle autrici di questo lavoro e da altri insegnanti della scuola secondaria superiore.
Le schede, predisposte in modo da poter essere direttamente utilizzate nelle classi, sono inserite in fondo al fascicolo.

1. P. M. VAN HIELE E LA TEORIA DEI LIVELLI DI PENSIERO GEOMETRICO

Esponiamo per sommi capi la teoria dei livelli di pensiero geometrico formulata da van Hiele, matematico olandese, collaboratore di H. Freudenthal[5] e docente in una scuola Montessori in Olanda.

Centrale è il concetto di *Struttura*, con valenze cognitive e non solo matematiche. Con dichiarati riferimenti alla Teoria della Gestalt[6], la Struttura ha all'interno della Teoria di van Hiele un valore essenzialmente percettivo; la struttura è contemporaneamente strumento e oggetto di conoscenza. Da un punto di vista didattico, la struttura visuale è quella che si presta ad avviare il lavoro in geometria; la formazione e la trasformazione di strutture guidano allo sviluppo dei simboli.

Gli aspetti fondamentali della Teoria di van Hiele sono tre: i <u>livelli di pensiero</u>, le <u>fasi di apprendimento</u> e l'<u>insight</u> (al quale qui accenniamo solo fugacemente).

I livelli di pensiero

Il tipo di processo coinvolto nel passaggio da una struttura meno differenziata ad una più differenziata viene definito da van Hiele come la transizione ad un più alto livello di pensiero: "… un individuo raggiunge un più alto livello di pensiero, quando un nuovo ordine del pensiero gli consente, rispetto a certe operazioni, di applicare queste stesse operazioni a nuovi oggetti. Non sarà il solo insegnamento a favorire ciò, ma una scelta oculata di esercizi ed esempi certamente determinerà una situazione favorevole."

---

5 Per avere notizie su Hans Freudenthal e sulla sua opera di riflessione didattica, si può consultare la voce *H. Freudenthal* (a cura di M. Barra) dell'*'Enciclopedia Pedagogica, Appendice A-Z,* diretta da Mauro Laeng, Editrice La Scuola, 2002, e il volume postumo: H. Freudenthal, *Ripensando all'educazione matematica*, La Scuola, 1994.

6 Per un inquadramento della teoria psicologica della Gestalt nell'ambito dell'insegnamento – apprendimento della matematica può risultare utile la lettura del 6° capitolo del volume di L. B. Resnick, W.W. Ford, *Psicologia della Matematica e apprendimento scolastico*, SEI, 1991.

I livelli di pensiero, per van Hiele, non sono una struttura collocata all'interno degli argomenti di studio, ma costituiscono una possibile classificazione di momenti appartenenti al pensiero. In geometria van Hiele distingue cinque differenti livelli di pensiero; tratta diffusamente dei primi quattro e definisce il quinto solo come uno dei livelli più alti ai quali si può aspirare non escludendo, per altro, l'esistenza di altri potenziali livelli.

Il **livello base** (livello visuale, o **primo livello**), è il livello del *simbolo*; in cui il ragazzo condensa tutte le proprietà di una figura geometrica di cui ha avuto esperienza. Le figure sono rappresentative di tutte le loro proprietà, hanno un carattere di immagine, appunto un carattere simbolico. Ricordando a piacere le proprietà il ragazzo sa operare con il simbolo, pur senza essere conscio del complesso delle proprietà. Per esempio, egli riconoscerà un rettangolo dalla sua forma e questo gli apparirà diverso da un quadrato; dopo avergli mostrato un rombo, un quadrato, un parallelogramma e un rettangolo, sarà in grado di riprodurre queste figure senza errori. Grazie al possesso di un certo numero di simboli, il ragazzo sarà in grado di dare una certa organizzazione alla materia da studiare.

Al **secondo livello** (livello descrittivo), le proprietà risulteranno fissate stabilmente se confrontate con proprietà analoghe di altre figure. Quasi per abitudine, i simboli divengono segnali (signals); ad esempio, da tutte le proprietà appartenenti al simbolo rombo (lati uguali, lati paralleli a due a due, angoli opposti uguali, diagonali perpendicolari) ne emerge una (lati uguali) che diviene il *segnale significativo* della figura. Da questo segnale il ragazzo è in grado di anticipare altre proprietà.
Le immagini perdono di importanza rispetto alle "relazioni", i simboli e i segnali del livello 1 diventano argomento di studio, ma le proprietà non sono ancora ordinate, e i ragazzi non sono ancora in grado di differenziare le proprietà in termini di definizioni e proposizioni. In questa fase un quadrato non è riconosciuto ancora come un particolare rettangolo.

Il **terzo livello** (livello della geometria Euclidea): il ragazzo comincia ad osservare le varie relazioni dal punto di vista logico. Questo richiede contemporaneamente che egli affini il linguaggio e impari la terminologia tecnica. L'implicazione, e quindi la definizione, acquistano significato all'interno delle relazioni geometriche. Ma in tale livello il significato intrinseco della deduzione non è ancora chiaro. Cominciano ad emergere nuovi principi organizzatori: questa è, secondo Van Hiele, l'essenza della geometria.

Prima di proseguire esaminiamo un esempio:

Teorema. Le bisettrici degli angoli di base di un triangolo isoscele formano, con la base, un nuovo triangolo isoscele.

Per essere in grado di dimostrare questo teorema si deve sapere che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali; perciò anche nel nuovo triangolo gli angoli alla base sono uguali. Ma un triangolo che ha due angoli uguali è isoscele.

Se i ragazzi non sono nelle condizioni di produrre tale ragionamento può essere che non abbiano raggiunto il terzo livello nel quale operano con le relazioni tra le proprietà delle figure; oppure che non abbiano raggiunto il secondo livello, e quindi non siano in grado di operare con le proprietà relative alle figure geometriche. Inoltre è da tenere presente che tale situazione coinvolge due teoremi, uno inverso dell'altro, e la capacità di riconoscere la doppia implicazione matematica è tipica del quarto livello.

Al **quarto livello** (livello della logica formale), i ragazzi cominciano ad essere in grado di distinguere formalmente tra una proposizione e la sua inversa, e possono capire cosa si intende per dimostrazione. Il pensiero si occupa del significato di deduzione, del reciproco di un teorema, della condizione necessaria e sufficiente. Si può iniziare lo studio di un sistema deduttivo di proposizioni.

Il **quinto livello**, studia la natura delle leggi logiche. Van Hiele non lo commenta, né tanto meno fornisce esempi o illustrazioni; egli considera scolasticamente assai più raro avere a che fare con questo livello, o con livelli più alti.

La concezione generale dei livelli è chiarita da alcuni passaggi presenti negli scritti di van Hiele, che sintetizziamo qui di seguito:

a) ad ogni livello appare in modo estrinseco ciò che era intrinseco a livello precedente. A livello base, infatti, le figure sono ugualmente determinate dalle loro proprietà, ma colui che pensa a tale livello non è cosciente di tali proprietà;

b) ogni livello ha i propri simboli linguistici e la propria rete di relazioni che crea i legami tra questi simboli. Una relazione esatta ad un livello, può rivelarsi erronea ad un altro livello. Si pensi ad esempio che al livello base un quadrato non è ancora considerato come un particolare rettangolo;

c) i livelli di pensiero, come già premesso, sono inerenti al pensiero stesso e non ai singoli contenuti;

d) come un bambino non impara la lingua materna attraverso l'ascolto di regole grammaticali ma le deduce dall’uso corrente applicandole per imitazione e per tentativi ed errori, così impara la matematica semplicemente lavorando con la matematica. Le regole diventano esplicitamente discorsive quando ci si interroga sulle attività svolte a livello inferiore. L’applicazione di queste regole ha la sua importanza, ma il ruolo dell’applicazione risiede innanzi tutto nell’esplorazione dei nuovi domini, vicini a quelli nei quali le leggi sono state sviluppate;

e) due persone che ragionano a due diversi livelli hanno difficoltà nel comprendersi. Ciò accade sovente a insegnante e studente. Nessuno dei due riesce a capire il percorso mentale dell’altro e il loro dialogo continua unicamente poiché l’insegnante tenta di intuire il pensiero dello studente e ad esso si uniforma. I ragazzi non riescono a maturare un vero e proprio apprendimento se imparano, per abitudine, a manipolare relazioni matematiche che non conoscono e delle quali non hanno mai visto la nascita. Essi finiscono così per disporre della stessa unica rete dell’insegnante, identica per tutti, rete nella quale le relazioni sono di tipo logico e deduttivo. E’ difficile per lo studente conservare nella memoria a lungo termine una rete di relazioni così costruita, non fondata su esperienze sensoriali personali. Nel migliore dei casi egli non conoscerà altro, oltre a ciò che gli è stato insegnato;

f) due o più persone possono capirsi, in un campo di pensiero determinato, quando esse dispongono di un linguaggio attraverso il quale recepiscono le stesse relazioni tra i segni linguistici. La certezza della matematica risiede nel modo infallibile con il quale il linguaggio matematico può essere usato;

g) la maturazione che conduce ad un livello superiore è un processo essenzialmente di apprendimento e non di ordine biologico. E’ possibile dunque favorire ed accelerare tale processo.

Le fasi dell'apprendimento stimolano il passaggio da un livello inferiore ad un livello superiore e nel passaggio Scuola Media/Scuola Superiore noi ipotizziamo che le fasi subiscano una contrazione temporale ma che nessuna possa essere considerata eliminabile:

1. nella prima fase, fase di **informazione**, gli alunni familiarizzano con il dominio di lavoro, utilizzando il materiale didattico. Questo materiale li mette in contatto con una struttura, e la scoperta dell’esistenza di quest’ultima garantisce loro una base comune sulla quale impiantare una discussione, consentendo loro di avere uno scambio di opinioni sulla struttura stessa;
2. nella seconda fase, fase di **orientazione guidata**, gli studenti esplorano il campo di investigazione per mezzo del materiale. Essi hanno già capito in quale direzione lo studio è diretto; il materiale sarà scelto in modo tale che le strutture caratteristiche vi appaiano poco a poco;
3. durante la terza fase, fase di **esplicitazione**, gli studenti acquisiscono la coscienza delle relazioni, le esperienze effettuate sono collegate a simboli linguistici adeguati; gli studenti affiancano all’argomento di studio un linguaggio idoneo ed imparano ad esprimersi sulle strutture osservate durante gli scambi di idee che avvengono in classe;
4. anche se il dominio di lavoro risulta sufficientemente chiaro, i ragazzi non hanno ancora trovato il loro percorso individuale; nella quarta fase, fase di **orientazione libera**, per mezzo di compiti che hanno diversi metodi di soluzione, scopriranno la loro strada nella rete di relazioni. Ogni sorta di segnale che compare all’interno del campo d’indagine matura in loro la via da seguire verso i simboli;
5. la quinta fase, fase di **integrazione**, viene maturata all’interno del dominio di studio. Gli studenti devono ancora acquisire la visione totale degli strumenti a loro disposizione; tentano

di condensare tutto il campo che il loro pensiero ha esplorato; in questo momento l'insegnante può favorire questo lavoro fornendo delle visioni globali. E' importante che quest'ultime non portino niente di nuovo, esse devono essere unicamente una sintesi di ciò che i ragazzi conoscono già.

Al termine di questa quinta fase, si giunge al nuovo livello di pensiero. L'allievo dispone d'una propria rete di relazioni che si rapporta al dominio esplorato.

Seguiamo, ora, due esempi esaminati da van Hiele.

Analizziamo, dapprima, le <u>fasi di apprendimento</u> che si incontrano nello studio del rombo così come è sviluppato in situazioni di insegnamento largamente diffuse al livello di Scuola Media:

- <u>Prima fase</u>: si sottopone all'attenzione degli studenti una certa figura, chiamata "rombo". Si mostrano altre figure geometriche e si chiede loro se anche quest'ultime sono rombi.
- <u>Seconda fase</u>: si effettua un piegamento del rombo intorno al suo asse di simmetria. Si comincia a dare qualche informazione riguardo le diagonali e gli angoli.
- <u>Terza fase</u>: gli studenti si confrontano sulle proprie idee riguardo alle proprietà del rombo.
- <u>Quarta fase</u>: si richiede di completare la figura di un rombo, assegnando la collocazione di uno o due vertici e di un lato.
- <u>Quinta fase</u>: le proprietà del rombo sono assimilate e memorizzate.

Il secondo esempio è centrato sulla trasformazione: "riflessione":

- <u>Prima fase</u>: si piega un foglio di carta, oppure si osserva in uno specchio. Si può osservare un certo punto **B** ottenuto per riflessione da un punto **A** rispetto ad una retta data **l.** Assegnando, su un quadrettato, l'asse di simmetria con direzione parallela ad una delle direzioni fondamentali del foglio, risulterà assai facile individuare il simmetrico del punto.
- Nella <u>seconda fase,</u> si mostrano una serie di figure geometriche, domandando agli studenti di trovare la loro immagine riflessa rispetto ad una retta data. Si può chiedere loro di

lavorare sul quadrettato, ma risulterà ugualmente valido usare uno specchio, o fogli di carta da piegare. Effettuiamo poi due volte la riflessione rispetto a due rette perpendicolari. Assegnando in modo appropriato un segmento **AB** (con estremi giacenti ciascuno su un asse di simmetria) accadrà che la figura data e la sua riflessa formino insieme un rombo.

- Nella terza fase, si discutono i modi differenti di riconoscere le figure geometriche attraverso opportune riflessioni di altre figure (ad esempio la riflessione di un triangolo isoscele genera un rombo). In questo modo si apprende il linguaggio necessario ad esprimere le relazioni che sono state osservate.
- Nella quarta fase, si propongono esercizi riguardanti figure geometriche con assi di simmetria. Si assegnano, ad esempio, tre vertici di un trapezio isoscele, chiedendo loro di trovare il quarto. Essendo diversi i modi di risolvere il problema, questo rappresenta un esempio di “orientazione libera”.
- Nella quinta fase, si richiede ai ragazzi di riconoscere una simmetria rispetto ad una retta, contemporaneamente si riassumono le caratteristiche di alcune figure aventi asse di simmetria.

Per finire annotiamo che, nella esposizione della Teoria dei Livelli, van Hiele sottolinea che:

- è opportuno sviluppare consapevolezza delle difficoltà che incontra lo studente studiando la geometria; non si tratta di prevenire i momenti critici ma piuttosto di prevederli e adeguare l’azione per accompagnare il passaggio da un livello al successivo;
- è opportuno tenere conto della composizione eterogenea della classe; anche ragazzi che iniziano ad uno stesso livello non è detto che raggiungano il livello successivo contemporaneamente;
- la transizione da un livello al successivo è un processo influenzato dal programma di insegnamento, esso non è possibile senza l’acquisizione di un nuovo linguaggio;
- è importante tenere presente che è necessario un impulso che stimoli lo studente nel passaggio ad un livello successivo.

2. Definizioni, Definizioni Euclidee e Trapezi

L'essenza della geometria di cui parla van Hiele è l'essenza del livello 2, quando l'implicazione e la definizione cominciano ad acquistare significato nell'ambito delle relazioni geometriche. La definizione esprime le proprietà sufficienti a distinguere una figura, cioè gli *elementi minimi* con i quali descrivere un oggetto di fatto già conosciuto. Essa contiene quindi in nucleo l'idea di *condizione necessaria e sufficiente*.
L'idea, ad esempio, che l'insieme dei rettangoli sia contenuto nell'insieme dei parallelogrammi è fondamentale per il concetto di implicazione: “se un quadrilatero è un rettangolo, allora è un parallelogramma”, oppure “è necessario avere le proprietà di un parallelogramma per avere quelle di un rettangolo”. Qui c'è il germe della deduzione.
Ma occorre essere cauti con l'idea di inclusione: lo schema insiemistico nasconde una sottile imposizione che si perpetua nel corso di tutto il curriculum. Gli alunni hanno probabilmente una mentalità *euclidea*, hanno cioè in mente una classificazione di triangoli e quadrilateri basata su idee di regolarità, che va dalle figure più regolari a quelle meno regolari, e non viceversa.

Euclide parla di triangoli nella Definizione XX del libro I degli *Elementi*:
"Tra le figure trilatere, un *triangolo equilatero* è quello che ha tre lati uguali, un *triangolo isoscele* quello che ha solo due lati uguali, e un *triangolo scaleno* quello che ha tre lati distinti".
E parla di quadrilateri nella definizione XXII: "Tra le figure quadrilatere, un *quadrato* è quello che è sia equilatero che rettangolo, un *rettangolo* (letteralmente *oblungo*) quello che è rettangolo ma non equilatero; un *rombo* quello che è equilatero ma non rettangolo; e un *romboide* quello che ha lati e angoli opposti uguali fra loro, ma non è né equilatero né rettangolo. E chiamiamo *trapezi* i quadrilateri diversi da questi."

Euclide sembra seguire un senso estetico, definendo prima figure regolari come un triangolo equilatero o un quadrato, e poi proseguendo verso figure meno regolari. Le definizioni di

Euclide sono buone definizioni? Sicuramente lo sono da un punto di vista percettivo. Forse per questo motivo hanno "seguito" presso gli studenti. E' dunque comprensibile che alcuni insegnanti della scuola media si adattino a questa esigenza: lo scopo della geometria alla scuola media è di osservare, riconoscere, collezionare vari tipi di figure senza pensare ad in ordine logico.

Entrando nella scuola secondaria, forziamo gli alunni in una direzione che è utile per il lavoro futuro, ma dobbiamo renderci conto che inizialmente la loro classificazione delle figure geometriche è diversa. Occorre fare un certo lavoro per correggere questo "errore euclideo".

Al momento in cui comincia a dimostrare, anche Euclide cambia le sue definizioni, così il rettangolo ha quattro angoli retti e non si dice niente dei lati, e il rombo ha quattro lati uguali, e non si dice niente degli angoli.

Un altro problema è relativo all'insieme dei trapezi. Dobbiamo considerare un rettangolo o un quadrato come un particolare trapezio? La classificazione dei parallelogrammi come particolari trapezi è causa di discussioni tra i matematici. Se un trapezio è un quadrilatero con due lati opposti paralleli, allora sicuramente un parallelogramma è un trapezio. Ma allora il parallelogramma, avendo uguali anche gli altri due lati, è un trapezio isoscele, anche se non ha angoli alla base uguali. Questo è il motivo per cui molti autori preferiscono definire il trapezio come un quadrilatero in cui due lati opposti sono paralleli e gli altri due no.

Nei libri di testo italiani il trapezio compare di frequente, perché è utile per formulare esercizi. Ma nessuno dimostra proprietà per il trapezio che poi si trasportano a parallelogrammi e così via. In sostanza l'inclusione dell'insieme dei parallelogrammi nell'insieme dei trapezi non è molto interessante (se anche la consideriamo corretta): può essere utile come esercizio per discutere i concetti di definizione e di implicazione, ma non è il caso di insistervi.

Notiamo anche che per Euclide il *romboide* è il nostro parallelogramma, che si chiamerà poi proprio *parallelogramma* nelle dimostrazioni, quando sarà essenziale metterne in evidenza le caratteristiche relative, appunto, al parallelismo dei lati; *trapezio* è invece un qualsiasi quadrilatero.

Concludiamo questo paragrafo con un'osservazione di Hans Freudenthal relativa alla teoria di van Hiele:

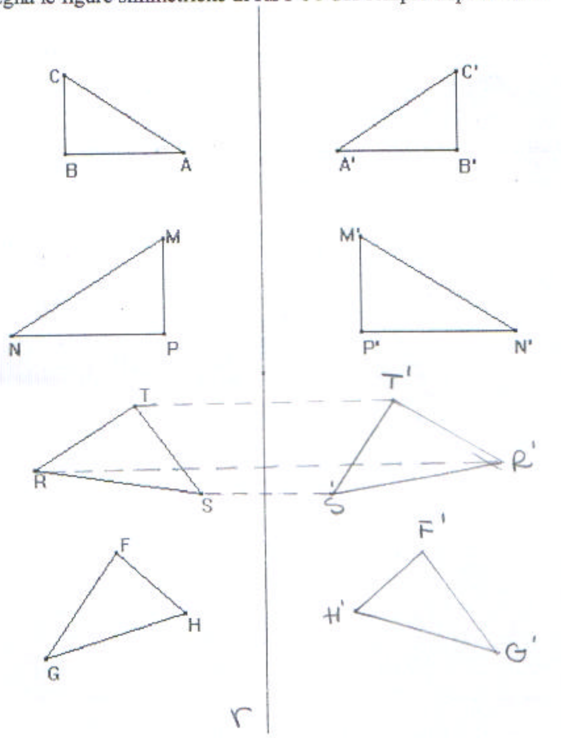
"Ci possono essere incertezze, per esempio nel sapere se un quadrato appartiene ai rombi, o un rombo ai parallelogrammi. L'insegnante può imporre le definizioni per risolvere queste controversie, ma se fa così degrada la matematica a qualcosa che è governato da regole arbitrarie […]. Le proprietà del parallelogramma sono connesse fra loro; una di esse può diventare la fonte dalla quale sorgono le altre. Così ora nasce una definizione, e ora diventa chiaro perché un quadrato deve essere un rombo e un rombo deve essere un parallelogramma. In questo modo lo studente impara a definire, e impara per esperienza che definire è più di descrivere, e che è un mezzo per organizzare deduttivamente le proprietà di un oggetto."

COMMENTI ALLE SCHEDE DI LAVORO

Nota: le schede che vengono riportate ad illustrazione dei commenti provengono da una precedente sperimentazione. Alcuni esercizi possono avere una diversa numerazione, ma saranno comunque riconoscibili nei commenti.
La versione definitiva delle schede si trova in fondo al volume.

ALUNNO...AUGE LUNARDON.................CLASSE II 4F DATA OGGI!(SCA)...

1) Trovi disegnate alcune figure. Per le figure T1 e T2 e per la S1 ed S2 è come se una si riflettesse nell'altra davanti a uno specchio che emerge dal piano della figura lungo la retta r perpendicolarmente al piano. Le figure ABC, A'B'C' si dicono simmetriche una dell'altra, rispetto alla retta r e così pure le figure MNP e M'N'P'.
Disegna le figure simmetriche di RST e FGH sempre rispetto ad r.



Se pieghi il tuo foglio lungo la retta r trovi che le figure di destra coincidono perfettamente con quelle di sinistra: r è l'asse di simmetria per le coppie di figure.
Le figure disegnate sono tutti triangoli.

- HO PIEGATO IL FOGLIO LUNGO LA RETTA r.
- HO SEGNATO I PUNTI DA DIETRO DELLA FIGURA GIÀ DISEGNATA.
- LI HO UNITI.

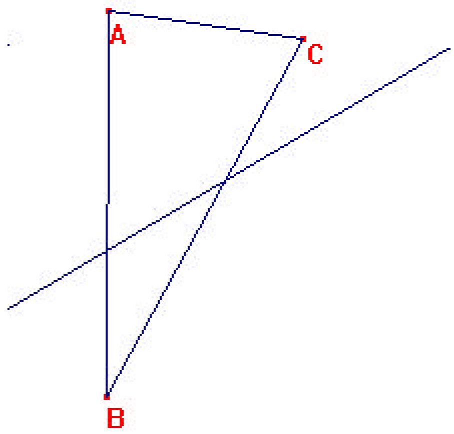
COMMENTI ALLA SCHEDA N. 1

La simmetria è una buona introduzione alle principali costruzioni geometriche. Alcune delle difficoltà incontrate dagli alunni nel disegnare la simmetrica di una figura geometrica sono collegate alle difficoltà d'uso di riga e compasso. L'attuazione dei programmi della scuola media e l'uso di software grafici come Cabri ci permettono comunque di considerare la simmetria come nota, almeno a livello percettivo.

In questa scheda si fanno costruire con la riga e il compasso alcuni triangoli attraverso la simmetria, con l'obiettivo anche di far recuperare eventuali conoscenze sulle trasformazioni geometriche (in particolare la simmetria assiale).

Abbiamo notato che, molti alunni sembrano avere in mente l'immagine del ribaltamento nello spazio e costruiscono il simmetrico di un triangolo sostanzialmente ad occhio, come immagine globale, sulla base di quest'idea. In altri alunni prevale invece l'aspetto costruttivo, la costruzione viene effettuata come corrispondenza punto-punto, ma spesso viene a mancare una riflessione globale sulla figura. Qualunque sia il metodo di costruzione usato, una successiva discussione in classe farà emergere le caratteristiche dei singoli triangoli (sia quelli disegnati che da disegnare) e la consapevolezza dell'esistenza di invarianti legati a questa trasformazione. Tale scoperta è opportuno che rimanga a livello di elaborazione autonoma, senza assumere aspetti formali.

Potrebbe essere utile far ripetere l'esercizio sostituendo la retta di simmetria utilizzata nella scheda con una non verticale, e i triangoli della scheda con altri, aventi lati obliqui che intersecano l'asse di simmetria come nella figura seguente, per arrivare anche al concetto di punto unito.



Proposte per l’uso di Cabri

Si può, volendo, utilizzare in seguito il software Cabri e far ripetere le costruzioni eseguite, facendo anche controllare con il comando ”distanza e lunghezza” e con il comando “area” l’invarianza del perimetro e dell’area dei triangoli; inoltre far vedere con il comando “misura angolo” che anche l’ampiezza degli angoli è rimasta la stessa. Si suggerisce di segnare i vertici dei triangoli con colori diversi per meglio visualizzare le corrispondenze fra i punti.

L’insegnante potrà decidere se far utilizzare direttamente il comando “simmetria assiale”, oppure far costruire la figura simmetrica con i comandi legati alla definizione di simmetria assiale (in Cabri è possibile nascondere i comandi).

L’uso di Cabri può anche servire da spunto per sottolineare la relazione fra vertice di un angolo e l’angolo stesso, facendo notare agli alunni che in Cabri per misurare un angolo occorre segnarlo con tre punti di cui quello centrale è il vertice; ciò permette di avvicinarsi, almeno dal punto di vista grafico, al concetto di angolo. Sarebbe inoltre opportuno invitare gli alunni a mettere per scritto l’algoritmo seguito per ogni costruzione effettuata. La lettura di questi procedimenti può essere di stimolo per una ulteriore discussione in classe.

"Il compito delle definizioni, …, è quello di servire come strumento per articolare una conoscenza già posseduta, per porre ordine ad una realtà che per altre strada è nota." (p. 127)

"....la scelta di termini primitivi e di assiomi conferisce un significato convenzionale alla conoscenza scientifica, o almeno alla sua presentazione in forma comunicabile. Nel convenzionalismo ricade ogni dottrina secondo cui la verità di una proposizione ... dipende sempre da un precedente accordo (esplicito o tacito) stipulato fra coloro che devono fare uso di tali proposizioni. … mi sorge spontanea la domanda se quel patto che il convenzionalismo richiede tra coloro che devono utilizzare gli strumenti matematici è mai stato esplicitato tra docente e studente o se è rimasto sempre tacito, da parte del docente, ed incompreso nella sua sostanza da parte del discente." (p. 128 e 129)

Da: Carlo Marchini, *Le definizioni e le convenzioni, un problema didattico*, 1992, in C. Marchini (a cura di), Quaderni del Dipartimento di Matematica, Università di Lecce, n. 1, 125-143

ALUNNA MANFRÈ MICAELA .... CLASSE IV D ... DATA 16/03/2001 (SCB)

2) Classificazioni dei triangoli.

2a) Classificazione dei triangoli rispetto ai lati ed i loro nomi:

un triangolo è isoscele quando ha almeno due lati uguali.

Un triangolo con tre lati uguali (ovvero un triangolo equilatero) è isoscele ?

SI ~~**NO**~~

Un triangolo è non isoscele se HA PIÙ DI DUE LATI UGUALI (EQUILATERO) OPPURE SE I LATI SONO DIVERSI TRA LORO (SCALENO)

2b) Classificazione rispetto agli angoli

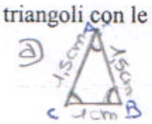
un/il triangolo rettangolo: ha un angolo retto e gli altri due acuti

un/il triangolo ottusangolo: ha un angolo ottuso e gli altri due acuti

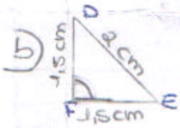
un/il triangolo acutangolo: ha tre angoli acuti

3) Disegna, quando è possibile, i triangoli con le caratteristiche indicate:

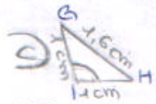
a) isoscele e acutangolo; a)



b) isoscele e rettangolo; b)

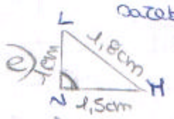


c) isoscele e ottusangolo; c)



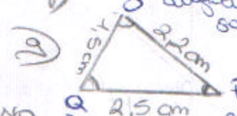
d) equilatero e rettangolo; d) NO Perchè l'ipotenusa del triangolo non sarebbe uguale ai due cateti.

e) non isoscele e rettangolo; e)



f) ottusangolo con un angolo retto; f) NO Perchè se un triangolo è ottuso gli altri due angoli devono essere acuti. Infatti la loro somma dà 180°, cosa non possibile se fosse presente un angolo retto.

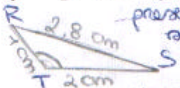
g) non isoscele e acutangolo; g)



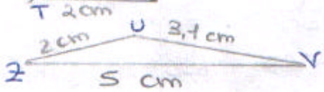
h) con due angoli retti; h) NO ~~Se~~ il triangolo avesse due angoli retti la loro somma sarebbe 180° mentre essa dovrebbe essere quella di tutti e tre ~~gli~~ angoli.

i) con un angolo retto e uno ottuso; i) NO Perchè all'interno del triangolo sarebbe presente un angolo ottuso, retto e acuto, che sommati tra loro non danno 180°.

j) non isoscele e ottusangolo;



k) non isoscele e non rettangolo.



2

COMMENTI ALLA SCHEDA N. 2

Questa scheda ha l’obiettivo di avviare a definizioni corrette e consapevoli, organizzando le precedenti conoscenze degli studenti e permettendo di arrivare alla classificazione dei triangoli.
Già ci rendiamo conto che il nostro linguaggio è impostato sul versante della logica assai più di quello dei nostri alunni: per la maggior parte di loro “non isoscele” significa equilatero. Una successiva discussione in classe, svolta sull'uso dei termini 'almeno', 'solo', etc., in genere diverte gli alunni e li porta alle risposte corrette e in seguito ad una maggiore attenzione.
Alcuni dei triangoli dell'esercizio 2 (3 nella precedente versione qui a fianco) non si possono disegnare (quale ottusangolo e rettangolo). Gli alunni devono riflettere sul doppio aggettivo e anche sulla congiunzione “e”, questo non è inizialmente facile per tutti.
La scheda può contribuire, in parte, a far maturare la consapevolezza sulle proprietà dei vari triangoli e sui connettivi logici, in particolare sulla congiunzione e sulla negazione, senza mai esplicitare l’argomento.
Infatti dalla possibilità o meno di disegnare triangoli aventi due caratteristiche diverse, a volte non compatibili, legate dal connettivo ”e”, si può far comprendere, per esempio, l’influenza del connettivo stesso sulla verità di una proposizione composta, sorreggendo l’analisi logica con l’effettiva possibilità di costruzione del triangolo.
Naturalmente si può, se il programma svolto lo permette, rappresentare secondo Venn l’insieme dei triangoli aventi le caratteristiche indicate, e arrivare alla intersezione fra insiemi e - in particolare dai punti d, f, i - alla costruzione di un insieme vuoto. Suggeriamo inoltre di far riflettere sui punti e, g, j e k - in cui compare il connettivo “non” - e quindi sulle proprietà date come negazione di altre: talora sono emerse difficoltà da parte degli studenti nel rispondere. Si può da questo arrivare anche al concetto di insieme complementare e alla sua effettiva costruzione. Ricordiamo però le difficoltà che il linguaggio insiemistico può nascondere in questa fase: la concretezza della costruzione può essere di aiuto.
Segnaliamo infine anche la difficoltà degli studenti ad usare correttamente i termini angolo retto o angolo di 90° secondo il contesto. Abbiamo, infatti, riscontrato una loro confusione fra

la relazione di perpendicolarità delle rette che determinano l’angolo retto e la misura dell’angolo stesso. Si può ovviare alla confusione facendo utilizzare dei goniometri esistenti in commercio, che hanno una doppia scala in cui l’angolo retto viene misurato con 90 gradi o con 100 gradi.

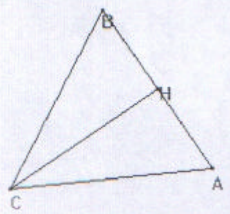
" …. Alan Hoffer ….(annotando il lavoro dei van Hiele) …individua le principali abilità che il fare geometria promuove …:

- ***abilità visive*** *(come vedere se un tetraedro può essere sezionato in un rettangolo)*
- ***abilità verbali*** *(come saper dire che cosa è una circonferenza, partendo dal fatto che una circonferenza è una linea rotonda)*
- ***abilità grafiche*** *(come fare costruzioni con l'uso di strumenti o utilizzare reticolati per rappresentare oggetti descritti verbalmente)*
- ***abilità logiche*** *(come riconoscere argomenti validi o non validi nel contesto fissato per lo studio di una figura)*
- ***abilità applicative*** *(come applicare le proprietà degli esagoni per studiare le proprietà delle celle di un alveare)" (p. 24)*

Da Elisa Gallo, *Continuità e discontinuità nella costruzione delle conoscenze geometriche*, 18° Convegno Nazionale UMI-CIIM sull'Insegnamento della Matematica "Dalla Scuola Media alle Superiori: continuità nell'Insegnamento della Matematica, Notiziario UMI, Luglio 1997, Supplemento al n. 7, Anno XXIV, 21-34

ALUNNO..PAOLA LORENZI..........CLASSE..II..F. DATA..............(SCC)

1) Osserva il triangolo isoscele ABC:



Se ritagli il triangolo e lo pieghi in modo che C stia fermo e A vada su B troverai che le due parti coincidono. La retta che passa per i punti C ed H ottenuta dalla piegatura è asse di simmetria. Il triangolo isoscele quindi oltre ad avere i lati uguali CA e CB ha uguali anche gli angoli CAH e CBH.

Anche gli angoli BCH e HCA risultano...UGUALI................ Pertanto CH è bisettrice.

Ma CH è anche mediana per il triangolo rispetto al lato AB, perché AH è uguale a....HB..........

CH è anche altezza rispetto ad AB perché

a) nella piegatura gli angoli CHA e CHB coincidono / non coincidono (sottolinea la risposta giusta);
b) tali angoli hanno per somma l'angolo AHB che è piatto
c) sono quindi angoli SUPPLEMENTARI

Un lato di un triangolo si usa talvolta chiamarlo base. Si può dire il triangolo ABC è isoscele rispetto alla base AB per indicare che gli altri due lati sono uguali.

2) Il triangolo disegnato è isoscele perché AC = AB.

Avrà anch'esso un asse di simmetria: come devi piegare la figura per ottenere l'asse di simmetria? Sottolinea la risposta giusta

- porto A su C
- porto A su B
- porto B su C

Disegna l'asse di simmetria.

Questo asse è anche mediana?....SI.........

E' anche altezza?......SI........

E' anche bisettrice?.......SI...............

3

COMMENTI ALLA SCHEDA N. 3

In questa scheda si cominciano a precisare le proprietà dei triangoli, in particolare del triangolo isoscele, e si utilizzano le simmetrie assiali come strumento per convalidare tali proprietà: si utilizzano cioè le trasformazioni geometriche a titolo strumentale perché utili ad uno scopo immediato in un problema specifico.

Affrontare lo studio della geometria con l'uso del disegno come strumento privilegiato e più aderente all'intuizione e consente di evitare in un primo momento lo scoglio di un simbolismo astratto: la scoperta e la verifica di relazioni e di proprietà fra gli elementi delle figure geometriche costituisce comunque un momento razionale importante ed una premessa per comprendere poi un procedimento deduttivo.

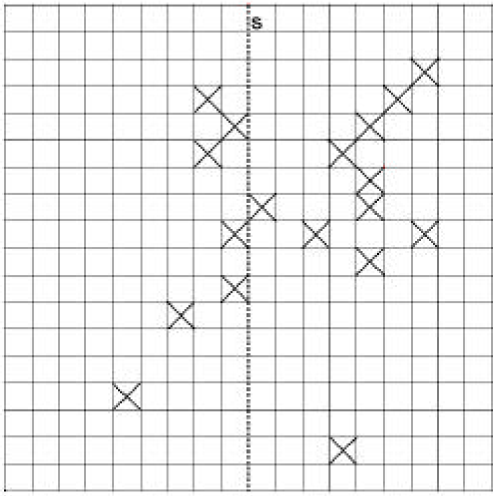
Si ritiene utile pertanto preparare questa fase con una serie di attività sulla simmetria assiale; ne proponiamo degli esempi: alcuni possono sembrare banali, l'opportunità di proporle dipende dal grado di abilità che l'insegnante riscontra nella classe.

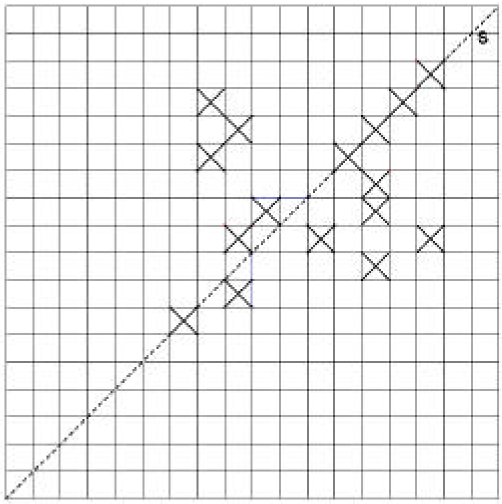
Essi sono mirati alla costruzione, all'individuazione e alle osservazioni sulle simmetrie assiali.

Facciamo notare che, sia negli esercizi delle schede, sia in quelli proposti qui di seguito, si parla di "base" del triangolo isoscele, distinguendo così questo lato dagli altri due lati uguali tra loro. Si tratta di una terminologia di uso frequente, che offre indubbi vantaggi di comunicazione immediata (si parla ad esempio di *angoli alla base* di un triangolo isoscele). Già nella scheda successiva, però, gli studenti dovranno considerare le tre basi di un triangolo.

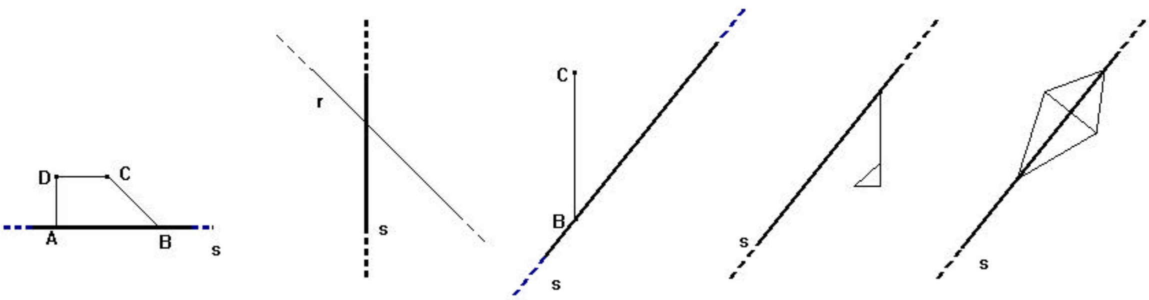
Proposte per ulteriori esercizi

a) Completa le seguenti figure sapendo che esse ammettono la retta s come asse di simmetria:



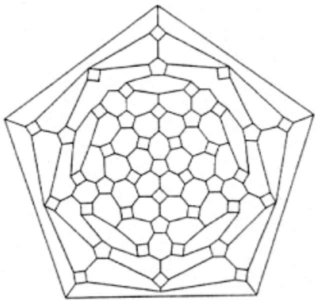


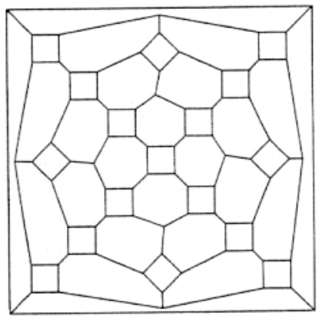
b) Realizza rispetto alla retta s le figure simmetriche di quelle tracciate:

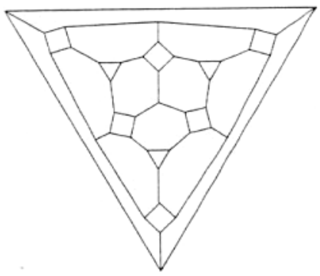


Da queste costruzioni si può prendere lo spunto per mettere in evidenza alcune proprietà delle simmetrie assiali: i punti dell’asse sono punti uniti e per questo rette corrispondenti si intersecano sull’asse; le corrispondenti di rette parallele all’asse sono parallele all’asse; esistono figure unite, le quali cioè ammettono un asse di simmetria.

c) Individua gli eventuali assi di simmetria delle seguenti figure:





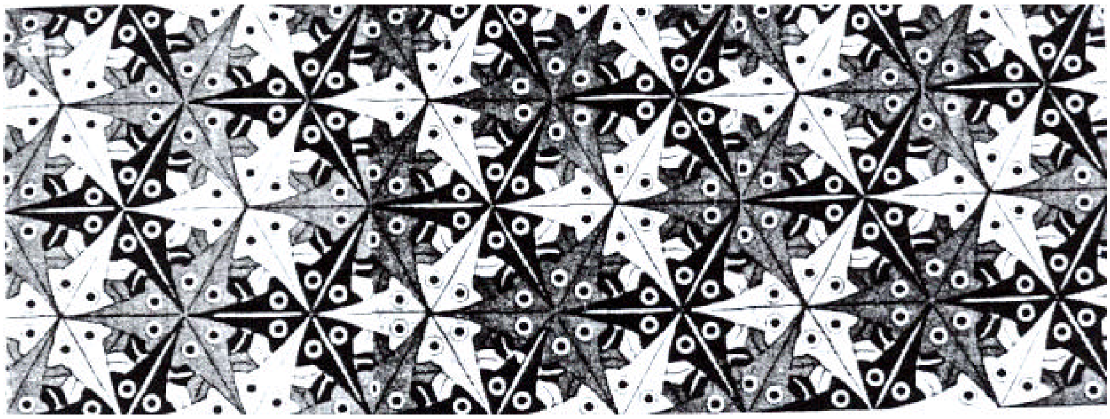


d) Costruisci:

- la figura simmetrica di un triangolo rettangolo rispetto alla retta di un suo cateto;
- la figura simmetrica di un triangolo rettangolo isoscele rispetto alla retta dell'ipotenusa;
- la figura simmetrica di un triangolo isoscele rispetto alla retta della sua base.

In ognuna delle costruzioni riconosci la figura complessiva ottenuta e descrivine le proprietà utilizzando il fatto di avere applicato una simmetria assiale.

e) Osserva i seguenti disegni di Escher e analizzane la costruzione riconoscendo le simmetrie assiali in essi utilizzate



Quest’ultimo esercizio può essere molto stimolante per gli alunni e su di esso si può cominciare a considerare anche altri tipi di isometrie: sta all’insegnante valutare l’interesse e il livello della classe per una proficua discussione.

“La definizione deve procedere dal noto all’ignoto. E’ questa una regola evidente…..
Vediamo … definite le parole <linea, superficie> per le idee geometriche non prima definite <lunghezza, larghezza, altezza, spessore>. Le idee che figurano nei secondi membri (definiente) sono più numerose che quelle nei primi (definito). E allora è naturale il domandarsi, se non convenga sopprimere queste definizioni, assumendo come idee non definite linea e superficie. (p. 183)

“ Dato un ordine alle idee d’una scienza, non tutte si possono definire. Non si può definire la prima idea, che non ha precedenti; ……..Si dice che un’idea è primitiva, relativamente ad un dato ordine, se, in quest’ordine delle idee, essa non si sa definire. Perciò, l’essere un’idea primitiva, non è un carattere assoluto, ma solo relativo al gruppo di idee che si suppongono note.” (p. 186)

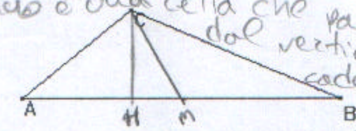
“Le definizioni sono utili ma non necessarie, poiché al posto del definito si può sempre sostituire il definiente, e perciò eliminare da tutta la teoria il definito…….Le definizioni in una teoria sono arbitrarie. …… supposte le definizioni arbitrarie, risulta solo arbitraria la forma della matematica, non il contenuto dei teoremi.” (p. 189)

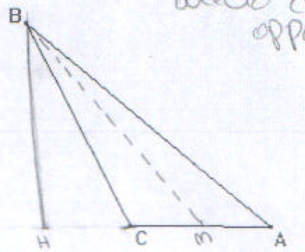
Da Peano G., *Le definizioni in Matematica,* Periodico di Matematiche, IV, I, 1921, 175-189

ALUNNO Valentina Bocci ....CLASSE II S : L.T. DATA 18/04/01 (SCC) 2

ho disegnato l'altezza in base alla sua definizione: h. cade perpendicolare sul lato opposto e m= mediana è una retta che parte dal vertice e cade sul punto medio dell lato opposto

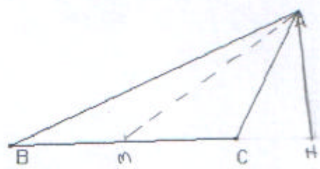
3) Il triangolo disegnato è non isoscele
Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato AB (base);
Altezza e mediana coincidono? SI / ~~NO~~



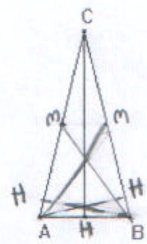


Ruota ora il triangolo ABC e considera AC come base;
Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato AC

Ruota ora il triangolo ABC e considera BC come base;
Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato BC (base);
coincidono? SI/NO
Concludendo il triangolo ABC ha ..3........ altezze
e ...3......... mediane, e sono .diverse tra di loro



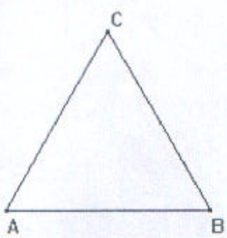
4) Il triangolo disegnato, ABC, è isoscele? ~~SI~~ / NO
Rispetto a quale base? ....A.B...........



Disegna le altezze. Quante sono?....3.........

Disegna le mediane. Quante sono? 3 Nel triangolo isoscele, per disegnare tutte le altezze e tutte le mediane quanti segmenti devi disegnare? ....5.........

5) Il triangolo ABC qui a fianco disegnato è equilatero. ABC è anche un triangolo isoscele? ~~SI~~/NO
Rispetto a quale base? ..AB, BC, AC.....
Quante sono le altezze?...3.................
Quante sono le mediane? ..3..................
Per disegnare tutte le altezze e tutte le mediane nel triangolo equilatero quanti segmenti devi disegnare? .3...



4

COMMENTI ALLA SCHEDA N. 4

L'obiettivo della scheda è quello di sottolineare che altezza e mediana relative alla "base" in un triangolo isoscele coincidono.

Una delle difficoltà è per alcuni alunni ancora quella di 'non ricordare' che in un triangolo ci sono tre altezze, mentre per molti altri è quella di accettare l'esistenza, e quindi disegnare, le altezze esterne nei triangoli ottusangoli.

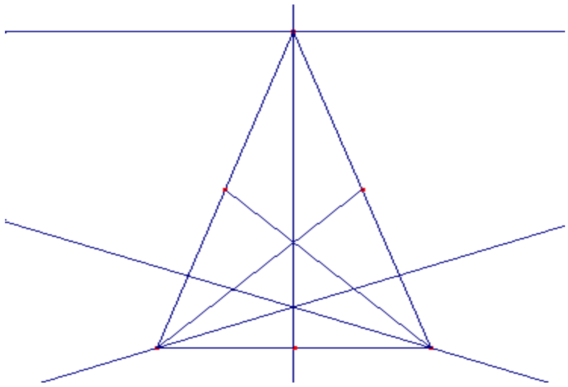
Può quindi essere utile, in un primo momento, "far vedere" le tre altezze utilizzando il metodo del filo a piombo: costruire triangoli di cartone - almeno uno ottusangolo, uno rettangolo e uno acutangolo - posizionare una base parallela al pavimento e far partire dal vertice opposto un filo con un piombino attaccato all'altro estremo. Ripetere il procedimento per i tre vertici.

E' bene tenere presente che il privilegiare la posizione orizzontale, se è funzionale per superare questo tipo di errore, può però creare altri problemi come, per esempio, confermare la convinzione che 'la base' debba sempre essere orizzontale.

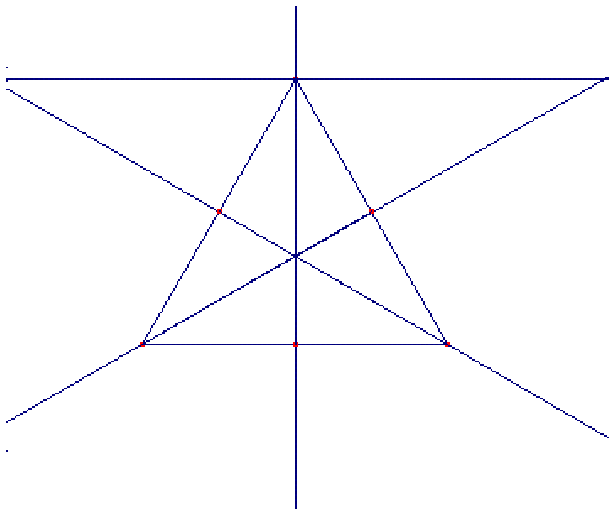
Proposte per l'uso di Cabri

Successivamente si può riproporre la costruzione delle altezze e delle mediane relative ai tre lati utilizzando il Software Cabri. Per fare ciò si può definire una **Macro**, ovvero una sequenza di passaggi che - dato un qualunque triangolo – costruisca le altezze e le mediane, e che, lasciando fissa una base, faccia variare il vertice opposto in due modi:

a) su una qualunque retta parallela alla base, in modo da verificare che solo quando altezza e mediana relative alla base coincidono il triangolo è **isoscele**;



b) su una particolare retta parallela alla base, in modo da verificare che solo quando le tre altezze e le tre mediane coincidono il triangolo è **equilatero**. Una volta individuato un triangolo isoscele, come nel punto a), si può traslare verso l'alto o verso il basso la retta parallela alla base fino ad individuare la posizione in cui si nota che anche le altezze e le mediane relative agli altri due lati coincidono.



Per fare ciò sono necessari due passi.

Il primo passo è disegnare il triangolo con le tre altezze e le tre mediane:

a. Scegliere lo strumento *Triangolo* della barra degli strumenti e disegnare un triangolo con base orizzontale rispetto allo schermo;

b. Per disegnare le tre altezze scegliere lo strumento *retta perpendicolare* della barra degli strumenti e posizionare il cursore prima su un lato del triangolo e poi sul vertice opposto;

c. Per costruire le mediane scegliere prima lo strumento *punto medio* e poi *retta* o *segmento*;

d. Per costruire la retta parallela alla base e passante per il vertice opposto scegliere lo strumento *retta parallela* dalla terza casella.

Il secondo passo è definire la Macro:

a. Scegliere lo strumento *Oggetti iniziali* dall'icona MACRO e "cliccare" sul triangolo: il suo contorno diventerà intermittente;

b. Scegliere lo strumento *Oggetti finali* dall'icona MACRO e cliccare sulle tre altezze, sulle tre mediane e sulla parallela alla base del triangolo: diventeranno intermittenti;

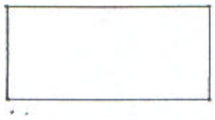
c. Scegliere lo strumento *Definizione della Macro*: si apre una finestra di dialogo che permette di definire se la costruzione è nuova o no, assegnare un nome alla costruzione, inserire un messaggio di aiuto, disegnare l'icona che rappresenta lo strumento costruito, salvare con un nome la macro costruzione. Una volta finita la costruzione cliccando sullo strumento *puntatore* della prima casella si fa muovere il vertice opposto alla base su una qualunque retta ad essa parallela.

Si osserva che solo in una posizione altezza e mediana relative alla base coincidono; si può far misurare con lo strumento *Distanza e lunghezza* la lunghezza dei lati obliqui e verificare entro errori dovuti allo strumento, che sono uguali e che quindi il triangolo è isoscele. C'è poi una posizione del vertice nella quale le tre mediane e le tre altezze coincidono: è il triangolo equilatero.

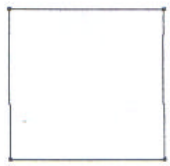
Inoltre si può richiedere la costruzione grafica con matita e riga, verificando se le eventuali difficoltà incontrate nella scheda sono state superate. Si ritiene che questo momento sia più complesso del precedente, perché la perdita di manualità che si osserva in generale nei ragazzi è correlata ad un uso della matita e della riga sempre più limitati.

ALUNNO MARCO PAGNONI .... CLASSE I B ..... DATA 28/4/01 ....(SC...)

1) La figura disegnata è un rettangolo.
   Osservala attentamente: gli angoli sono tutti retti? SI / NO
   I lati opposti sono ..uguali......(uguali / disuguali).



2) La figura disegnata è un quadrato. Osservala attentamente.
   Sia il rettangolo che il quadrato posseggono lati opposti uguali e quattro angoli retti.
   Che cosa distingue un quadrato da un qualsiasi rettangolo? I lati del quadrato sono tutti ..UGUALI..........



Concludendo:

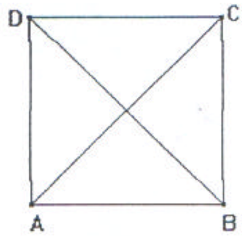
il quadrato ha quattro angoli ...RETTI.. e quattro lati .....UGUALI..........

il rettangolo ha quattro angoli .....!!......e i lati opposti ....UGUALI...........

Il quadrato è rettangolo? SI / NO

Il rettangolo è quadrato? ~~SI / NO~~ NO

3) Vedi disegnato il quadrato ABCD. Il segmento AC è una diagonale
   Se il lato misura 3 cm, calcola la misura della diagonale AC applica il teorema di Pitagora al triangolo ABC.



$$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Ma anche DB è una diagonale dello stesso quadrato. Calcola DB applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD.

$$BD = \sqrt{AD^2+AB^2} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Quante diagonali ha il quadrato? ....2......................................

Le diagonali del quadrato sono uguali / disuguali.

COMMENTI ALLE SCHEDE N. 5, 6 E 7

In queste schede si cominciano ad osservare le proprietà dei rettangoli, dei quadrati e del rombo.

Nella scheda 5 si fa focalizzare l'attenzione degli allievi sul fatto che quadrati e rettangoli sono quadrilateri con tutti e quattro gli angoli retti; i loro lati invece sono uguali per i quadrati mentre per i rettangoli sono solamente uguali a due a due.
Non è quindi opportuno in questa sede anticipare le definizioni di queste due figure, ma piuttosto utilizzarle per far ricordare quanto già appreso alla scuola media.
E' opportuno, invece, abituare gli allievi, guidando le loro osservazioni, a confrontare le caratteristiche di figure diverse. In queste schede quindi gli allievi sono guidati ad affermare che, poiché il quadrato ha i quattro angoli uguali e i quattro lati uguali, è anche un rettangolo, dal momento che il rettangolo ha i quattro angoli uguali e i lati opposti uguali. Cioè il quadrato possiede tutte le proprietà caratterizzanti il rettangolo, ma non è vero il viceversa.

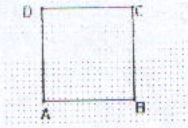
Al punto 1 della scheda 6 (vedi retro) si richiede di ritagliare il quadrato lungo il perimetro e di piegarlo lungo la sua diagonale AC. Non tutti gli allievi cui è stata sottoposta la scheda lo hanno fatto. Molti hanno "immaginato" di fare l'operazione richiesta e taluni hanno piegato invece il foglio lungo la diagonale AC del quadrato. Sarà opportuno che l'insegnante insista nel far tagliare il quadrato solo se vede l'allievo in difficoltà.
Sarà invece opportuno guidare gli allievi ad osservare che l'essere simmetrico rispetto alla diagonale è una proprietà del quadrato, ma non del rettangolo e che quindi le simmetrie di un quadrato sono maggiori di quelle di un rettangolo.

La dimostrazione data nel secondo punto della scheda 6 è una dimostrazione a livello intuitivo e non è opportuno chiedere che l'allievo in questa sede la formalizzi, sapendo per esempio indicare ipotesi e tesi, ma nemmeno che la sappia ripetere.

5

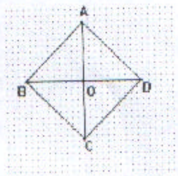
ALUNNO... GENTILE SERENA ... CLASSE IV ..... DATA 6-03-01 (SCD)

4) Nel quadrato ABCD disegna la diagonale AC
Se ritagli poi il quadrato lungo il perimetro e
pieghi successivamente il quadrato lungo la diagonale AC
le due parti coincidono? SI / NO
La diagonale è un asse di simmetria per il quadrato ? SI / NO.



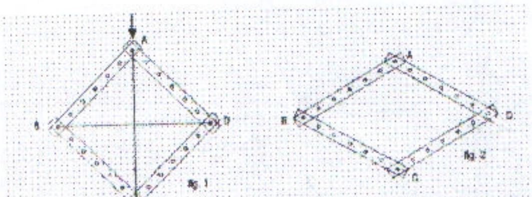
Anche BD è un asse di simmetria per il quadrato ? SI / NO.

5) Vedi nuovamente disegnato il quadrato ABCD ruotato di un angolo retto.
AC è asse di simmetria per il quadrato, perciò BO = OD.
Anche BD è asse di simmetria per il quadrato, quindi
AO = OC
Le diagonali di un quadrato si tagliano a metà ? SI / NO.



Quando pieghi il quadrato lungo la diagonale AC gli angoli AOB e AOD si sovrappongono: sono perciò uguali e, avendo per somma un angolo piatto, sono retti. Le diagonali di un quadrato sono perpendicolari ? SI / NO.

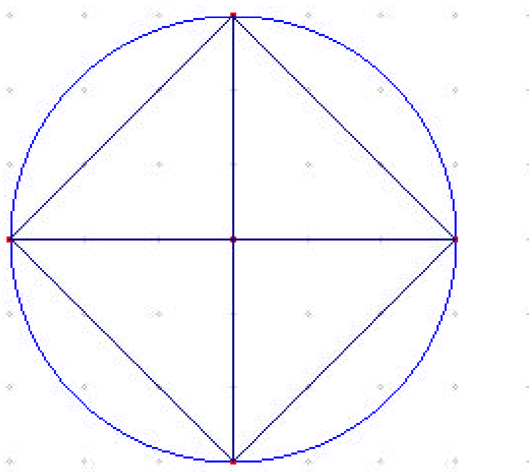
6) Vedi disegnato un quadrato ABCD formato con le aste di un meccano: Se con la stessa pressione

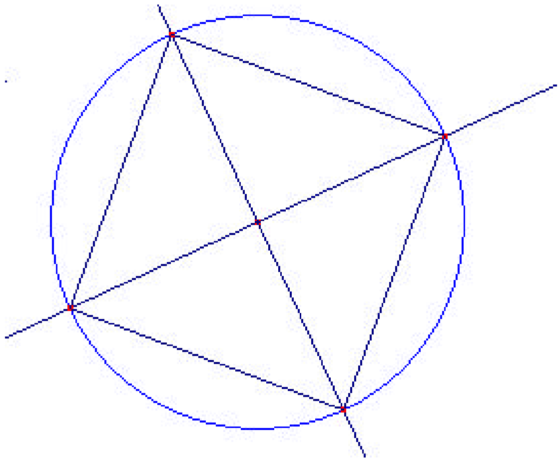


comprimi il quadrato, nei punti A e C, indicati con le frecce, nella direzione AC, i segmenti AO e OC diminuiranno nella loro lunghezza, ma resteranno uguali fra loro (vedi fig.2).
Le diagonali AC e BD sono ancora uguali ? SI / NO.
I lati della figura 2 sono uguali / disuguali.
La figura 2 è un rombo ? SI / NO.
Ti pare che si possa dire: "il rombo è un quadrilatero con i lati tutti uguali" ? SI / NO.
Il quadrato ha tutti i lati uguali: possiamo affermare che è un rombo ? SI / NO.
Possiamo dire che il rombo è un quadrato ? SI / NO.

Proposte per l'uso di Cabri

a) La proprietà precedente può essere invece utilizzata per far costruire un quadrato agli allievi con l'uso di Cabri.





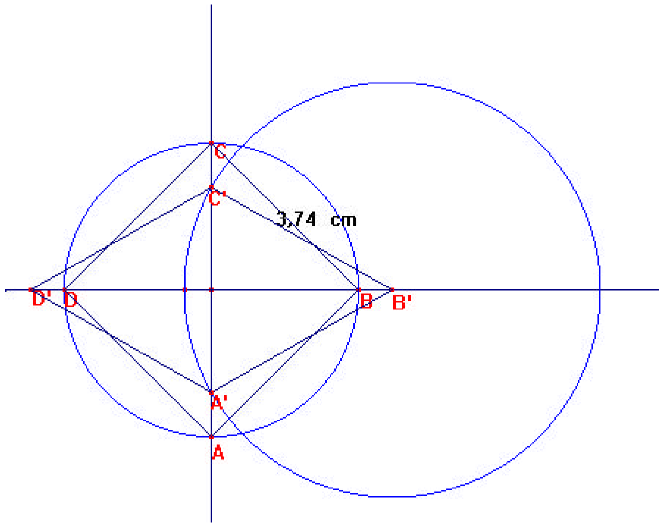
Nella figura a sinistra si sono tracciati gli assi e la griglia, e si è tracciata una circonferenza con centro in un punto della griglia. Sfruttando la griglia si sono tracciati due segmenti perpendicolari con gli estremi sulla circonferenza stessa. Questi estremi sono i vertici del quadrato.

b) Nella figura di destra si è invece tracciata una retta e quindi una sua perpendicolare. Si è quindi tracciata una circonferenza che ha per centro la loro intersezione. I vertici del quadrato sono i punti di intersezione della circonferenza con le due rette perpendicolari.

c) Il terzo punto della scheda 6 utilizza uno strumento che ancor oggi molti ragazzi hanno, il meccano. Il poter utilizzare realmente questo strumento permette di toccare con mano che, schiacciando un quadrato, i lati rimangono uguali e le diagonali fra loro perpendicolari. Ciò a cui si vuol giungere non è una vera e propria definizione del rombo, si vuole piuttosto evidenziarne gli elementi caratterizzanti.

Se il meccano non è disponibile fra gli allievi della classe, si può sostituire con una simulazione con Cabri, creando una macro.

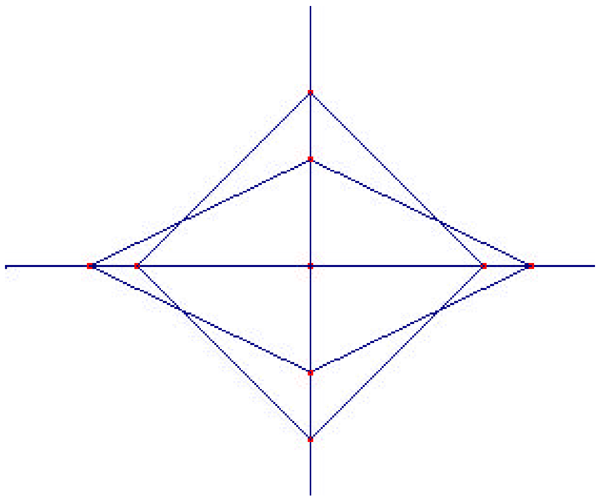
Si traccino due rette perpendicolari e un punto sulla retta orizzontale; si tracci quindi una circonferenza con centro nella loro intersezione e passante per il punto scelto sull'asse orizzontale. Si uniscano i punti di intersezione delle due rette perpendicolari con la circonferenza. Si otterrà il quadrato ABCD. Si misuri il lato CB e si trasporti la sua misura a partire da un punto B', scelto sulla retta DB a poca distanza da B (con trasporto di misura).



Si costruisca una circonferenza che ha centro in B' e raggio il segmento trasportato (la scelta di B' è condizionata dal fatto che questa circonferenza deve intersecare la retta verticale). Si segnino con *intersezione fra due oggetti* le due intersezioni A' e C' della circonferenza con la retta verticale. Si tracci il punto D' come simmetrico di B' nella simmetria centrale di centro il punto di intersezione fra le due rette perpendicolari. Si uniscano i punti ottenuti. Il punto B' si può muovere sulla retta ottenendo i vari rombi di lato uguale al quadrato costruito.

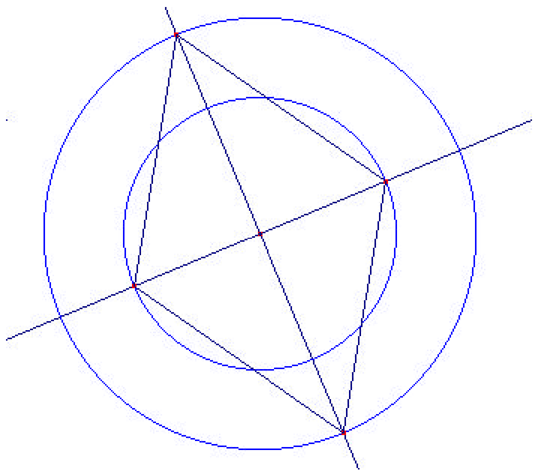
A questo punto si può costruire la macro *Meccano*, dando come dati iniziali nell'ordine le due rette perpendicolari, il loro punto di intersezione e i punti B e B'; come dati finali i segmenti AB, BC, CD, DA lati del quadrato e i segmenti A'B', B'C', C'D', D'A' lati del rombo. Si "clicca" poi su *definisci macro*, dando come nome *Meccano* e le indicazioni utili sui dati iniziali necessari per costruirla. Si salva con nome la macro o in una cartella personale o su Cabri stesso. Chiuso il file, la macro *Meccano* va ricercata dove è stata salvata.

Cliccando sulla macro e dando i dati iniziali si otterrà la seguente figura, nella quale il punto B' è mobile sull'asse orizzontale e permette di vedere i vari rombi ottenibili con lato uguale a quello del quadrato e di riottenere il quadrato quando B e B' coincidono.



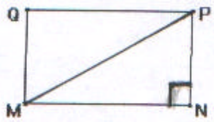
d) Le proprietà del rombo di avere le diagonali perpendicolari e i lati uguali permettono di costruire in modo molto semplice un rombo con Cabri.

Basta ripetere la costruzione fatta per il quadrato, costruendo però due circonferenze con centro comune sempre nel punto di intersezione fra le due rette perpendicolari, ed unire i



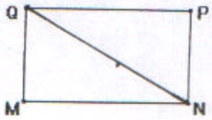
ALUNNO Alessandro Beducci CLASSE IV D DATA 8/4/2001 (SCD)

7) Vedi disegnato il rettangolo MNPQ.
Sapendo che MN misura 4 cm e NP misura 3 cm,
calcola la diagonale MP:



MP = $\sqrt{MN^2+NP^2} = \sqrt{cm\,4^2+cm\,3^2} = \sqrt{25} = 5.$

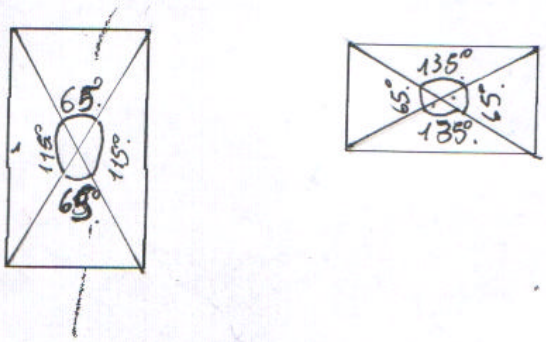
Considera lo stesso rettangolo MNPQ:
calcola la diagonale NQ



NQ = $\sqrt{MN^2+NP^2} = \sqrt{cm\,4^2+cm\,3^2} = \sqrt{25} = 5.$

Le diagonali del rettangolo sono uguali....

8) Vedi disegnati più rettangoli:

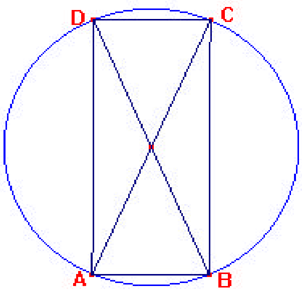


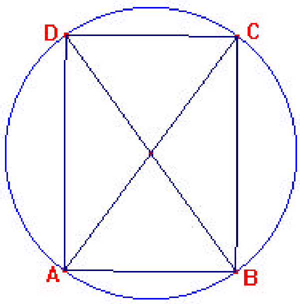
Pensi che si possa affermare che le diagonali del rettangolo sono perpendicolari fra loro?

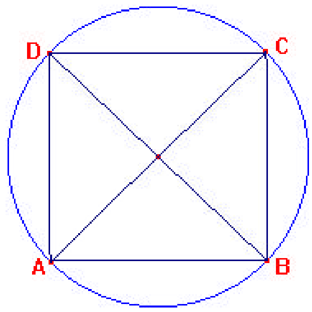
SI / ~~NO~~

punti di intersezione di una retta con una circonferenza e dell’altra retta con l’altra circonferenza. Da questa costruzione viene spontaneo osservare che se le due circonferenze coincidono si ritorna a costruire un quadrato, e quindi il quadrato è un particolare rombo, ma non viceversa.

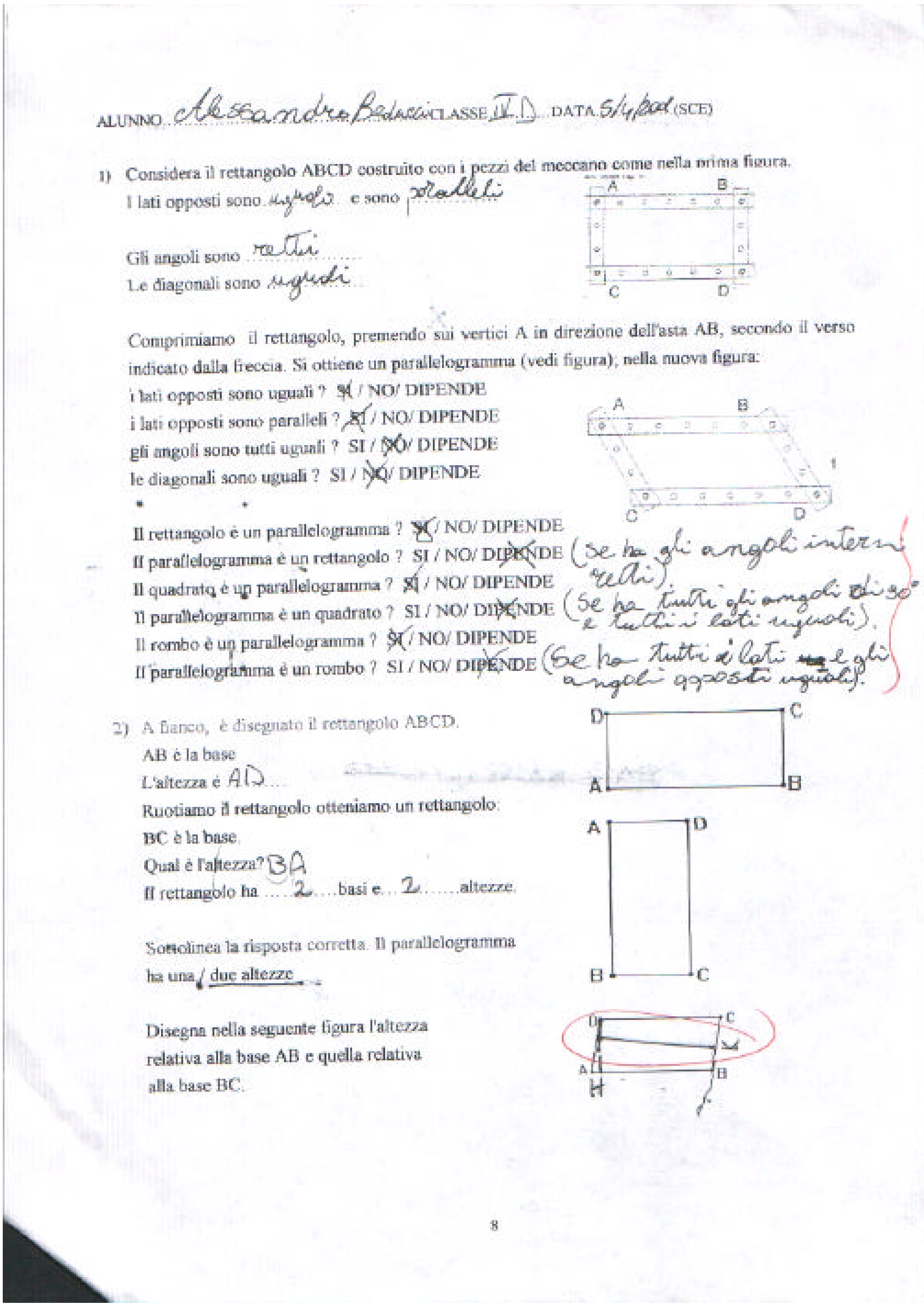
e) Se rimangono alcuni allievi non ancora convinti che le diagonali di un rettangolo non sono fra loro perpendicolari (vedi scheda 7), si può utilmente utilizzare Cabri.







Disegnato un rettangolo si traccino le sue diagonali e si verifichi che l’angolo fra di esse varia al variare della forma del rettangolo (questo è possibile spostando sulla circonferenza il vertice del rettangolo da cui è iniziata la costruzione). Solo quando si ottiene un quadrato le diagonali risultano perpendicolari.



ALUNNO Alessandra Bedeschi CLASSE IV D DATA 5/4/2000 (SCE)

1) Considera il rettangolo ABCD costruito con i pezzi del meccano come nella prima figura.
I lati opposti sono uguali e sono paralleli

Gli angoli sono retti
Le diagonali sono uguali

Comprimiamo il rettangolo, premendo sui vertici A in direzione dell'asta AB, secondo il verso indicato dalla freccia. Si ottiene un parallelogramma (vedi figura); nella nuova figura:
i lati opposti sono uguali ? SI / NO/ DIPENDE
i lati opposti sono paralleli ? SI / NO/ DIPENDE
gli angoli sono tutti uguali ? SI / NO/ DIPENDE
le diagonali sono uguali ? SI / NO/ DIPENDE

Il rettangolo è un parallelogramma ? SI / NO/ DIPENDE
Il parallelogramma è un rettangolo ? SI / NO/ DIPENDE (se ha gli angoli interni retti)
Il quadrato è un parallelogramma ? SI / NO/ DIPENDE
Il parallelogramma è un quadrato ? SI / NO/ DIPENDE (se ha tutti gli angoli di 90° e tutti i lati uguali).
Il rombo è un parallelogramma ? SI / NO/ DIPENDE
Il parallelogramma è un rombo ? SI / NO/ DIPENDE (se ha tutti i lati ~~ug~~ e gli angoli opposti uguali).

2) A fianco, è disegnato il rettangolo ABCD.
AB è la base
L'altezza è AD
Ruotiamo il rettangolo otteniamo un rettangolo:
BC è la base
Qual è l'altezza? BA
Il rettangolo ha 2 basi e 2 altezze.

Sottolinea la risposta corretta. Il parallelogramma ha una / due altezze

Disegna nella seguente figura l'altezza relativa alla base AB e quella relativa alla base BC.

8

COMMENTI ALLE SCHEDE N. 8 E 9

Come nella scheda 6 si è introdotto il rombo a partire dal quadrato richiamando l'esperienza con il meccano, così nello stesso modo nella scheda 8 si introduce il parallelogramma a partire dal rettangolo.

Ciò dovrebbe permettere di 'vedere' più facilmente le proprietà comuni - lunghezza dei lati opposti,… - e quelle non comuni – lunghezza diagonali, angoli…..- alla figura di partenza (rettangolo) e alla sua trasformata (parallelogramma).

La scheda 8 non porta a una sorta di definizione di parallelogramma, come invece la precedente per il rombo, ma nella prima serie di domande si fa appello alla figura con il complesso delle sue proprietà (simbolo) e nella seconda a quella fra le proprietà che richiama alla memoria l'intero simbolo (segnale significativo).

Nella prima serie di domande alcuni alunni possono trovare qualche difficoltà nel rispondere se le diagonali del parallelogramma sono uguali o no.

Proposta per l'uso di Cabri

Per chiarire la prima serie di domande della scheda 8, utilizzando il meccano o anche il software Cabri, si può ricorrere alla situazione limite: quando cioè il lato AB è schiacciato sul lato CD.

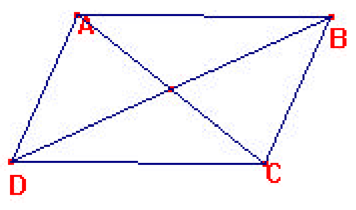


Fig. 1

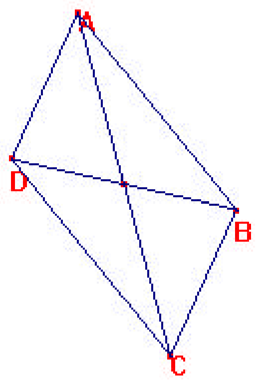
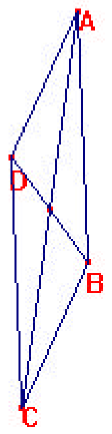


Fig. 2



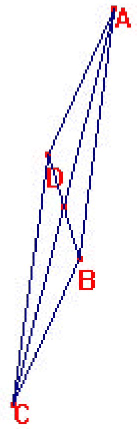


Fig. 3 Fig.4

Il punto 3 della scheda 8, con le risposte articolate in SI, NO, DIPENDE… permette di verificare se l'alunno ha acquisito le proprietà caratterizzanti le figure, e sia quindi in grado di confrontare tali proprietà in modo da sapere quale tra due insiemi di figure include sempre l'altro (per esempio un rettangolo è sempre un parallelogramma ma un parallelogramma è un rettangolo solo se ha tutti gli angoli retti). Il DIPENDE che è stato inserito tra le risposte dovrebbe far ricordare che il disegno sul foglio non è l'unica rappresentazione possibile, e far richiamare alla mente l'esperienza con il meccano o con Cabri.

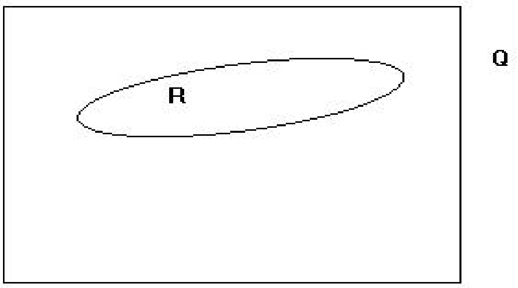
La difficoltà dell' ultimo punto della scheda 8 sta nel disegnare l'altezza del parallelogramma relativa alla base BC: molti ragazzi non la disegnano proprio dimostrando di non avere capito che il rettangolo (che ha due altezze, vedi punto 4) è un caso particolare di parallelogramma (che invece ne verrebbe ad avere una sola).
Si può allora notare con i ragazzi che è improbabile che una delle proprietà che il rettangolo ha in più, come caso particolare di parallelogramma, sia quella di avere un'ulteriore altezza! E si può ricorrere al materiale concreto e costruire un parallelogramma di cartoncino con un filo a piombo, facendo vedere prima l'altezza relativa a una base e poi all'altra.

Nella scheda 9 (vedi retro) si introduce il trapezio: si richiama il simbolo attraverso una figura e si richiedono alcune osservazioni. A questo punto è da sondare l'acquisizione del *simbolo*: molti ragazzi hanno in mente, come trapezio, il trapezio isoscele o il trapezio rettangolo.
Si chiede di disegnare particolari trapezi, osservando le proprietà di intersezione delle diagonali. Si chiede se è vero che il trapezio è un quadrilatero con una coppia di lati paralleli.

C'è un insieme di proprietà visive che chiedono di essere organizzate. La deduzione comincia a questo punto. In questo momento l'insegnante può favorire questo lavoro fornendo delle visioni globali, anche sotto forma di esercizio da svolgere insieme agli alunni, come:

"Utilizzare i diagrammi di Venn per rappresentare i quadrilateri"

Nella figura, se con Q si indica l'insieme dei quadrilateri e con R il sottoinsieme dei

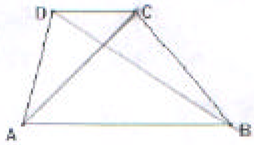


rettangoli, far inserire agli allievi il sottoinsieme dei quadrati. In un secondo momento inserire il sottoinsieme dei rombi, quello dei parallelogrammi e dei trapezi.

La rappresentazione insiemistica costituisce il punto di arrivo dello studio dei quadrilateri: rappresenta un'astrazione a cui si perviene dopo aver a lungo lavorato sulle situazioni concrete particolari. E' importante che le visioni globali non portino a niente di nuovo, ma siano unicamente una sintesi di ciò che gli allievi conoscono già.

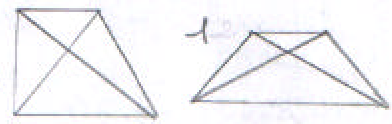
ALUNNO MANFRÈ MICAELA .... CLASSE 1^D .... DATA [illegible] (SCE)

3) La figura a lato rappresenta, come ti ricordi, un trapezio. Ha due lati paralleli.
Disegna le diagonali.
Valuta le seguenti affermazioni:

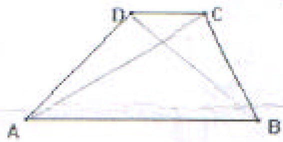


Il trapezio è un quadrilatero con almeno una coppia di lati paralleli — SI / NO
Il trapezio è un parallelogramma — SI / NO
Il parallelogramma è un trapezio — SI / NO
Il rombo è un trapezio — SI / NO

1 Se AD = BC il trapezio si dice isoscele: disegna un trapezio isoscele con le diagonali.
2 Se AD è perpendicolare ad AB il trapezio si dice rettangolo: disegna un trapezio rettangolo con le diagonali.

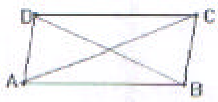


4) Nel trapezio le diagonali si tagliano a metà ? NO

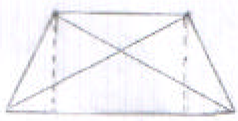


Disegna un trapezio isoscele e un trapezio rettangolo e verifica sulle figure se le diagonali si tagliano a metà. Nel 1° caso NO e anche nel 2°

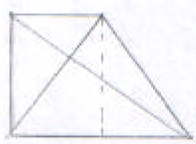
Nel parallelogramma le diagonali si tagliano a metà ? SÍ



TRAPEZIO ISOSCELE



TRIANGOLO RETTANGOLO



9

Non è così immediato, infatti, che tutti i ragazzi, pur collocando correttamente il quadrato nell’intersezione tra rombi e rettangoli, abbiano la consapevolezza che ciò significhi che il quadrato possiede le proprietà di entrambi. In una classe un’alunna, pur avendo rappresentato in modo corretto gli insiemi nell’esercizio precedente, ha detto:

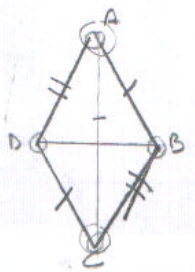
“ Il quadrato è una figura più semplice rispetto a rombi e rettangoli, quindi ha meno proprietà!”

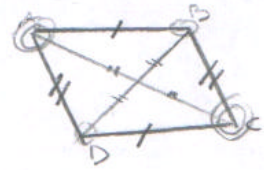
Usando un linguaggio più appropriato l’alunna avrebbe potuto dire che il quadrato è una figura “più regolare”, confermando che gli alunni hanno in mente una classificazione di quadrilateri che va dalle figure “più regolari”, che vedono come “più semplici”, a quelle meno regolari. Nella rappresentazione insiemistica avviene invece il viceversa.
Questa osservazione fa emergere una convinzione sbagliata in questo contesto ma non necessariamente dal punto di vista del senso comune (dove semplicità è veramente il possedere meno proprietà).

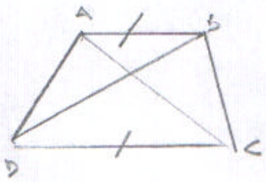
ALUNNO Ruggeri Giorgio CLASSE I V1 DATA 7-4-01 (SCG)

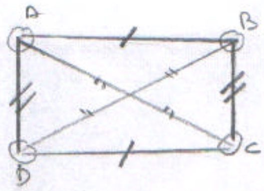
Nella seguente tabella trovi nella prima riga i nomi di alcuni quadrilateri e nella colonna di sinistra alcune affermazioni che esprimono proprietà di particolari tipi di quadrilateri. Segna una X nei riquadri per i quali la proprietà contenuta nella riga corrisponde al nome del quadrilatero della relativa colonna.

E' un quadrilatero che ha ……..	parallelogramma	rettangolo	rombo	trapezio
due coppie di lati opposti paralleli	X	X	X	
una sola coppia di lati opposti paralleli				X
angoli tutti uguali		X		
angoli opposti uguali	X	X	X	
diagonali uguali	X	X		
diagonali perpendicolari			X	
diagonali perpendicolari			X	









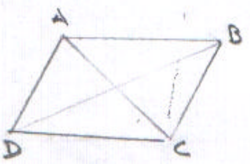
COMMENTI ALLE SCHEDE N. 10 E 11

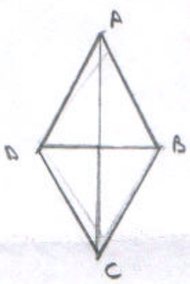
Lo scopo di queste schede, attraverso una sistemazione delle conoscenze operative e teoriche, è di riconoscere i quadrilateri dalle loro proprietà e capire quando le proprietà individuano il tipo di quadrilatero e quindi arrivare al *segnale significativo* ovvero alla *definizione.*
Nella scheda 10 ci sono domande riassuntive su alcune proprietà dei quadrilateri. Ma non si tratta ancora di caratteristiche distintive, che invece entrano in scena nella scheda 11.
La scheda 10, in cui si chiede di riconoscere le figure da alcune proprietà caratteristiche, conduce ad un livello successivo. In particolare, con riferimento agli esempi della tabella, si può chiedere agli alunni "quali delle proprietà indicate sono anche caratterizzanti la figura corrispondente, e quindi possono essere prese come definizioni?" L'insegnante chiederà a questo punto le proprietà caratterizzanti di altri quadrilateri, che possono essere assunte come definizioni degli stessi.
Nella scheda 11 (vedi retro) può condurre una discussione sul significato dei termini "basta", "è necessario", ed introdurre anche termini alternativi, quali "sufficiente", o "se….allora". Di fatto questa scheda esige il passaggio ad un linguaggio con connotazione logica matematica, ma si consiglia di non indulgere troppo, nella discussione successiva, sulla portata logica dei termini usati e di non far perdere al linguaggio il suo significato naturale. Molti alunni segneranno "rombo" nella riga 6 della scheda e questo può essere un momento per presentare il deltoide (aquilone), quadrilatero che gode anch'esso della proprietà di avere le diagonali perpendicolari. Ciò significa farli riflettere sul fatto che questa proprietà è necessaria, ma non sufficiente perché il quadrilatero sia un rombo. Si può quindi far osservare che tutte le righe che cominciano con "è necessario" possono contenere più di una risposta corretta, ma quelle che cominciano con "basta che" hanno al massimo una risposta esatta. In questi casi questa proprietà diventa caratterizzante e quindi può essere considerata una sua *definizione.* Nella domanda della riga 4 (5 nella versione qui a fianco), come in quella della riga 6 (7 nella versione a fianco) non c'è una risposta corretta, alcuni rispondono rettangolo, confondendo la necessità con la sufficienza.

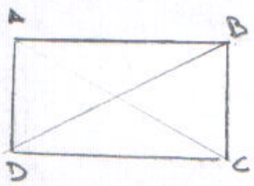
ALUNNO Giorgia Ruggeri CLASSE IV D DATA 7-6-01 (SCF)

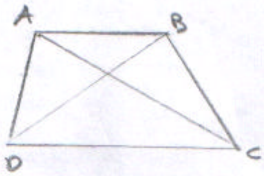
Nella seguente tabella trovi nella prima riga i nomi di alcuni quadrilateri e nella colonna di sinistra alcune affermazioni che esprimono proprietà che specificano tipi particolari di quadrilateri. Segna una X nei riquadri per i quali la proprietà (contenuta nella riga) completa bene il nome del quadrilatero della relativa colonna.

Per un quadrilatero ……	parallelogramma	rettangolo	rombo	trapezio
… basta avere una coppia di lati paralleli per essere un …(e suff)				X
… e' indispensabile avere una coppia di lati paralleli per essere ….	X	X	X	X
… basta avere due coppie di lati paralleli per essere …….	X			
… e' necessario avere due coppie di lati paralleli per essere …..	X	X	X	
… basta avere le diagonali uguali per essere …….	X	X		
… e' necessario avere le diagonali uguali per essere …	X	X		
… basta avere le diagonali perpendicolari per essere ……			X	









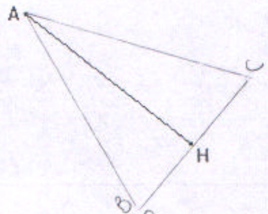
10

Si può allargare il discorso su figure che godono di alcune proprietà che però non sono esaustive per l'individuazione della figura: per esempio, dalle diagonali uguali non si arriva necessariamente ad un rettangolo, così come dalle diagonali perpendicolari non si arriva al rombo, né al deltoide. Su questi casi bisognerà stimolare una larga discussione, favorendo la formulazione di controesempi.

JESSICA SALVI

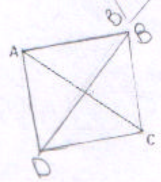
ALUNNO SARA PIERMARIA CLASSE 2^aF DATA 08.06.01 (SCH)

a) Costruisci un triangolo isoscele ABC in cui A è il vertice comune ai due lati uguali e AH è una altezza.
Descrivi il procedimento seguito.



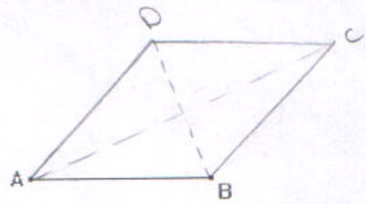
L'ALTEZZA AH CADE ⊥ SULLA BASE $\overline{BC}$
I LATI ALLA BASE SONO UGUALI
E DISEGNATA QUEST'ULTIMA
ABBIAMO UNITO I LATI $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$
AL LORO VERTICE COMUNE ($\hat{A}$)

b) Costruisci il quadrato ABCD per il quale AC sia una diagonale.
Descrivi il procedimento seguito.



-TRACCIO LA DIAGON. ⊥ AD $\overline{AC}$
-UNISCO I PUNTI E OTTENGO
LATI UGUALI, QUINDI 1 QUADRATO

c) Costruisci il rombo ABCD per il quale è assegnato il lato AB.
Descrivi il ragionamento seguito.



NEL ROMBO I LATI SONO A DUE A DUE
PARALLELI; HO TRACCIATO $\overline{DC}$ (// AD $\overline{AB}$)
-ABBIAMO UNITO I PUNTI B-C e A-D
OTTENENDO POI LE DIAGON. ⊥.

d) Costruisci un triangolo isoscele per il quale è assegnato il lato AB e nal quale i lati uguali hanno il vertice comune C.
Desccrivi il procedimento seguito.

-ABBIAMO TRACCIATO L'ALTEZZA ($\overline{CH}$)
RELATIVA AD $\overline{AB}$, UNENDO AL VERTICE
COMUNE $\hat{C}$, I VERTICI ALLA BASE.

12

COMMENTI ALLE SCHEDE DI VERIFICA

Con queste ultime schede si propongono degli esercizi nei quali l'alunno deve essere in grado di utilizzare in maniera mirata le proprietà delle figure: per riconoscere un rombo non deve pensare a tutte le proprietà che conosce, ma dovrebbe bastargli osservare se ha tutti i lati uguali, oppure individuare le proprietà delle diagonali. L'alunno deve essere arrivato ad un momento in cui per lui comincia ad avere significato l'implicazione: riconosciuta una figura attraverso una specificità, allora in essa si pensano verificate tutte le altre proprietà con le quali l'ha finora pensata globalmente. E' ormai in grado di capire che la figura specifica si realizza anche utilizzando una sola delle proprietà che di essa si conosce, purché caratterizzante. Non deve utilizzare la memoria della globalità delle proprietà del parallelogramma, ma costruirlo, per esempio, come un quadrilatero nel quale le diagonali si bisecano: dovrebbe sapere che da questo o da altro si desume il parallelismo e l'uguaglianza delle coppie dei lati opposti. Raggiunta questa capacità l'alunno saprà affrontare la geometria come logica formale, ora e non prima si potrà introdurre un sistema logico-formale.

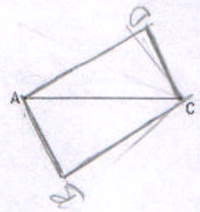
Tutto questo non è così facile da raggiungere: nelle classi in cui è stata proposta questa scheda si è notato che gli alunni tendono ancora a pensare alla figura geometrica nella sua globalità, a realizzarla con la memoria che hanno di essa. Ad esempio nel lavoro di un alunno per l'esercizio 2) della scheda di verifica 1, si trova il disegno di un quadrato ottenuto dopo molti tentativi, testimoniati dalle evidenti cancellature, con la spiegazione "questo è un quadrato e AC una sua diagonale".

Per gli esercizi 3) e 5) (vedi retro) più di un alunno commenta "un rombo non può avere un lato in quella posizione", "non esiste un rettangolo con la diagonale orizzontale" o anche "il segmento AC deve essere un lato del rettangolo", e non realizza il disegno.

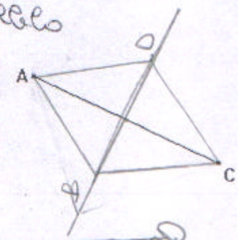
In queste risposte si nota non solo il ricorso alla memoria del simbolo, ma del simbolo rigidamente collocato: evidentemente per questi alunni è mancato un esercizio ben mirato alla manipolazione delle figure. In molti alunni manca comunque la manualità, specialmente in

Caro e Fra (!!)

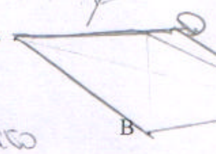
e) Costruisci un rettangolo ABCD per il quale è assegnata la diagonale AC.
Descrivi il procedimento seguito.
Ho tracciato un lato AB e su quello ci siamo basati per costruire 2 lati perpendicolari e 1 parallelo



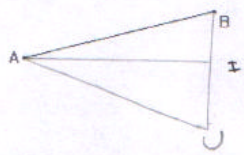
f) Costruisci un rombo ABCD per il quale è assegnata la diagonale AC.
Descrivi il procedimento seguito.
Ho tracciato la diagonale BD e ho costruito i lati basandomi su di essa



g) Costruisci il parallelogramma ABCD per il quale sono assegnati i vertici A, B, C.
Descrivi il procedimento seguito.
Ho unito i vertici A,B,C, ho costruito il triangolo isoscele A-BD e poi ho unito i punti



h) Costruisci un triangolo isoscele per il quale è assegnato il lato AB e in cui A è il vertice comune ai lati uguali.
Descrivi il procedimento seguito.
Ho tracciato AH, ho calcolato il lato CB e ho unito i punti



g) Disegna, quando è possibile, i quadrilateri con le caratteristiche indicate……………

particolari scuole, e i disegni, anche accanto a una corretta spiegazione, sono mal realizzati. Inoltre molte risposte pressoché corrette presentano dei salti di coerenza nella spiegazione: anche questo indica che gli alunni pensano al simbolo della figura che hanno nella loro memoria.

A volte però la realizzazione sorprende positivamente. Nell'esercizio 7) un alunno ha scritto: ”prendo il punto di mezzo del segmento AC e costruisco il simmetrico di B rispetto a tale punto: lo chiamo D. Il quadrilatero ABCD è un parallelogramma perché le sue diagonali AC e BD hanno il punto di mezzo in comune”.
In genere, invece, questa costruzione viene realizzata pensando al parallelismo dei lati opposti. Nella realizzazione su carta è essenziale che gli alunni descrivano il procedimento seguito.

Proposte per l’uso di Cabri
E’ utile far realizzare la scheda anche al computer con Cabrì: in questo modo gli alunni sono obbligati a scegliere i passi della costruzione e non possono adattare l’elemento assegnato all’immagine del risultato finale richiesto. Nella realizzazione su carta è però essenziale che gli alunni descrivano il procedimento seguito.

La scheda di verifica 1 presenta comunque delle difficoltà. Proponiamo, qui di seguito, degli esercizi che preparino gli alunni a porre l’attenzione su specifiche caratteristiche delle figure da disegnare e sul fatto che il verificarsi di esse implica il verificarsi anche delle altre: è un inizio al processo deduttivo. Inoltre con questi esercizi gli alunni dovrebbero migliorare il linguaggio, imparare ad esprimersi con coerenza ed avere anche l’occasione per migliorare la manualità grafica. Anche la discussione collettiva con la classe è un momento molto produttivo per migliorare questi aspetti.

Proposte per ulteriori esercizi

a) Disegna due segmenti consecutivi non adiacenti, AB e AD. Traccia dal punto B la retta r parallela ad AD e dal punto D la retta s parallela ad AB. Le rette r ed s si intersecano nel punto C. Il quadrilatero ABCD gode della proprietà di avere i lati opposti paralleli: è sufficiente questa sola proprietà per dire che esso è un parallelogramma: verifica che esso ha i lati opposti uguali, gli angoli opposti uguali e che le diagonali si intersecano nel loro punto medio.

Per fare queste verifiche si potranno suggerire anche strumenti particolari, come il compasso; se si realizzano le figure al computer con Cabrì, si possono sfruttare anche le isometrie.
Questa verifica non è ancora la dimostrazione, ma può servire per cominciare a fare le dovute distinzioni fra un teorema e il suo inverso o una definizione.

b) Traccia due segmenti consecutivi non adiacenti, AB e AD. Con centro in B traccia la circonferenza di raggio AD e con centro in D la circonferenza di raggio AB. Le due circonferenze hanno due punti di intersezione. Individua con C uno dei due in modo che il quadrilatero ABCD non sia intrecciato. Il segmento BC, essendo un raggio della prima circonferenza, è uguale ad AD; il segmento DC, essendo un raggio della seconda circonferenza, è uguale ad AB. Quindi nel quadrilatero ABCD i lati opposti sono congruenti, perciò esso è un parallelogramma. Esso gode quindi anche delle altre proprietà dei parallelogrammi: ha i lati opposti paralleli, gli angoli opposti uguali, le diagonali che si bisecano; verificalo.

c) Disegna un segmento AC e sia O il suo punto medio. Traccia una retta r passante per O diversa da AC e una circonferenza con centro in O. Tale circonferenza e la retta r hanno due punti di intersezione, B e D; si ha OB = OD perché sono raggi della circonferenza tracciata, perciò il punto O, punto medio di AC è anche punto medio di BD. Nel quadrilatero ABCD le diagonali si bisecano, quindi esso è un parallelogramma.
Verifica che in esso sono valide tutte le altre proprietà dei parallelogrammi.

d) Disegna un segmento AC e tracciane l’asse r. Disegna quindi una circonferenza con centro nel punto medio O di AC: essa interseca l’asse r nei punti B e D. Si ha OB = OD perché sono raggi della circonferenza tracciata. Perciò le diagonali AC e BD del quadrilatero ABCD hanno lo stesso punto medio O, perciò si ha un parallelogramma. Inoltre tali diagonali sono tra loro perpendicolari, quindi ABCD è un rombo.
Verifica che ha i lati uguali.

e) Traccia una circonferenza con centro O e disegna due suoi diametri, AC e BD. I segmenti AC e BD sono diagonali del quadrilatero ABCD e hanno lo stesso punto medio O, perciò il quadrilatero ABCD è un parallelogramma. Inoltre tali diagonali sono uguali tra loro perché sono diametri della stessa circonferenza, perciò il quadrilatero ABCD è un rettangolo.

f) Lo stesso esercizio del punto e), ma si traccino i due diametri tra loro perpendicolari. Il quadrilatero ABCD avendo le diagonali che si bisecano è un parallelogramma, essendo tali diagonali uguali è un rettangolo,essendo tali diagonali perpendicolari è un rombo. Perciò ABCD è un parallelogramma che ha le proprietà di essere un rettangolo e anche un rombo: esso è un quadrato.

Con gli esercizi d), e), f) si può far notare agli alunni come si specifichino le figure con l’aumentare delle proprietà. In tal senso è utile anche la rappresentazione con i diagrammi di Venn.
La scheda di verifica 2 (si veda l’ultima scheda in fondo al volume), vuole rappresentare un momento di sintesi logico-formale di quanto appreso.

commentando l'opera dei van Hiele: "…l'attività del livello inferiore diventa oggetto di considerazione del livello superiore; in altri termini, nel livello superiore questa attività diventa cosciente, e diventa oggetto di riflessione. …"(p. 132)

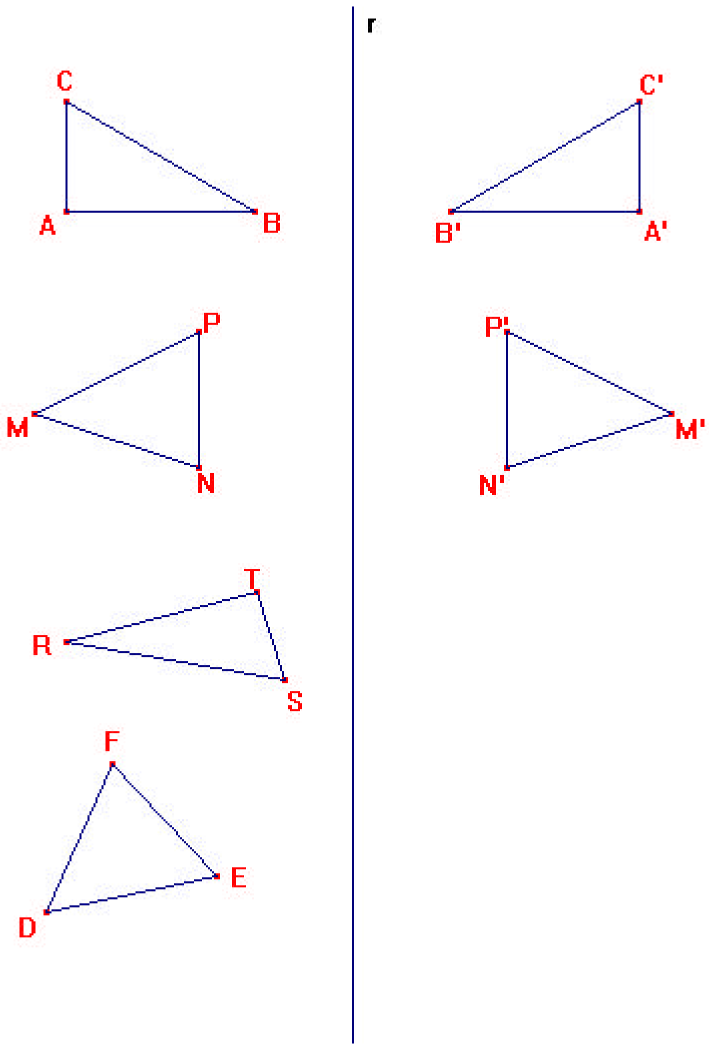
In Freudenthal H., 1994 (traduzione italiana), *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La Scuola

LE SCHEDE DI LAVORO

Scheda 1

ALUNNO……………………………………………….CLASSE……….DATA…………..

1) Trovi disegnate alcune figure. Le figure ABC, A'B'C' si dicono simmetriche una dell’altra, rispetto alla retta *r* e così pure le figure MNP e M'N'P'; è come se una si riflettesse nell’altra davanti ad uno specchio che emerge dal piano della figura lungo la retta *r* perpendicolarmente al piano.
Disegna le figure simmetriche di RST e DEF sempre rispetto ad *r*.



Se pieghi il tuo foglio lungo la retta *r* trovi che le figure di destra coincidono perfettamente con quelle di sinistra: *r* è l'asse di simmetria per le coppie di figure.
Le figure disegnate sono tutti triangoli.

Scheda 2

ALUNNO…………………………………………….CLASSE…………DATA………………

1) Classificazioni dei triangoli.

1a) Classificazione dei triangoli rispetto ai lati ed i loro nomi:

un triangolo è isoscele quando ha almeno due lati uguali.

Un triangolo con tre lati uguali (ovvero un triangolo equilatero) è isoscele ? SI / NO

Un triangolo non è isoscele se ……………………………………………………..

1b) Classificazione rispetto agli angoli

un/il triangolo rettangolo ha un angolo retto e gli altri due……………………………

un/il triangolo ottusangolo ha un angolo ottuso e gli altri due…………………………

un/il triangolo acutangolo ha…………………………………………………………..

2) Disegna, quando è possibile, i triangoli con le caratteristiche indicate:

a) isoscele e acutangolo;

b) isoscele e rettangolo;

c) isoscele e ottusangolo;

d) equilatero e rettangolo;

e) non isoscele e rettangolo;

f) ottusangolo con un angolo retto;

g) non isoscele e acutangolo;

h) con due angoli retti;

i) con un angolo retto e uno ottuso;

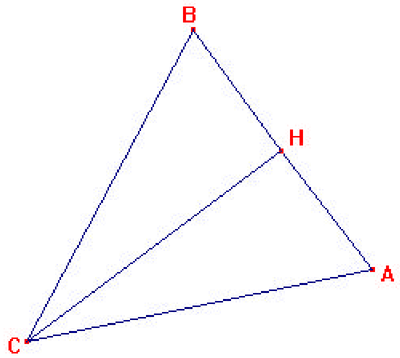
j) non isoscele e ottusangolo;

k) non isoscele e non rettangolo.

Scheda 3

ALUNNO…………………………………………CLASSE……… DATA……………

1) Osserva il triangolo isoscele ABC:



Se ritagli il triangolo e lo pieghi in modo che C stia fermo e A vada su B troverai che le due parti coincidono. La retta che passa per i punti C ed H ottenuta dalla piegatura è asse di simmetria. Il triangolo isoscele quindi oltre ad avere i lati uguali CA e CB ha uguali anche gli angoli CAH e CBH.

Anche gli angoli BCH e HCA risultano……………………………... Pertanto CH è bisettrice.

Ma CH è anche mediana per il triangolo rispetto al lato AB, perché AH è uguale a…………………..

CH è anche altezza rispetto ad AB perché

a) nella piegatura gli angoli CHA e CHB coincidono / non coincidono (sottolinea la risposta giusta);

b) tali angoli hanno per somma l'angolo AHB che è piatto

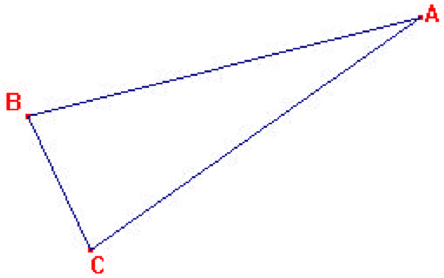
c) sono quindi angoli …………………..

Quando si dice che il triangolo ABC è isoscele rispetto alla base AB si intende indicare che gli altri due lati sono fra loro uguali.

2) Il triangolo disegnato è isoscele perché AC = AB.

Avrà anch'esso un asse di simmetria: come devi piegare la figura per ottenere l'asse di simmetria? Sottolinea la risposta giusta

- porto A su C
- porto A su B
- porto B su C



Disegna l'asse di simmetria.

Questo asse è anche mediana?……………

E' anche altezza?………………

E' anche bisettrice?……………………..

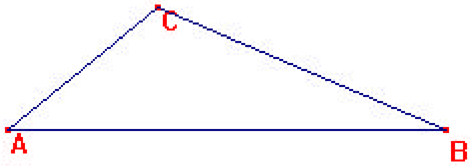
Scheda 4

ALUNNO………………………………………CLASSE……… DATA……………

1) Il triangolo disegnato non è isoscele

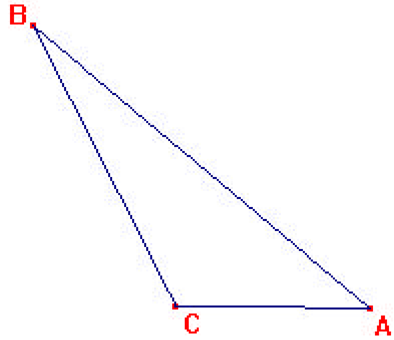
Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato AB (base);

Altezza e mediana coincidono? SI / NO



Ruota ora il triangolo ABC e considera AC come base;

Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato AC

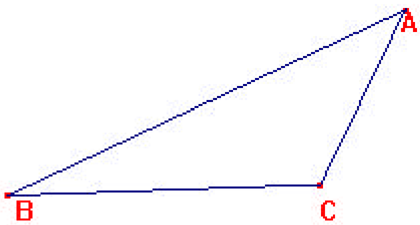


Ruota ora il triangolo ABC e considera BC come base;

Disegna l'altezza e la mediana rispetto al lato BC (base)

coincidono? SI/NO

Concludendo il triangolo ABC ha ………… altezze e …………... mediane, e sono …………………….

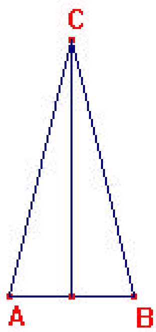


2) Il triangolo disegnato, ABC, è isoscele? SI / NO

Rispetto a quale base? …………………

Disegna le altezze. Quante sono?……………

Disegna le mediane. Quante sono? Nel triangolo isoscele, per disegnare tutte le altezze e tutte le mediane quanti segmenti devi disegnare? ………………



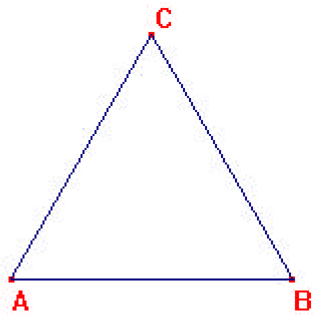
3) Il triangolo ABC qui a fianco disegnato è equilatero. ABC è anche un triangolo isoscele? SI/NO

Rispetto a quale base? …………………….

Quante sono le altezze?……………………

Quante sono le mediane? ……………………

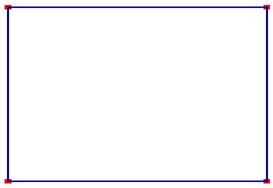
Per disegnare tutte le altezze e tutte le mediane nel triangolo equilatero quanti segmenti devi disegnare? ……



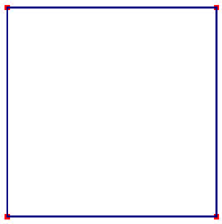
Scheda 5

ALUNNO…………………………………………………CLASSE…………DATA……………

1) La figura disegnata è un rettangolo.
Osservala attentamente: gli angoli sono tutti retti? SI / NO
I lati opposti sono ……………..(uguali / disuguali).



2) La figura disegnata è un quadrato. Osservala attentamente.
Sia il rettangolo che il quadrato posseggono quattro angoli retti.
Che cosa distingue un quadrato da un qualsiasi rettangolo? I lati del quadrato sono tutti ………………..



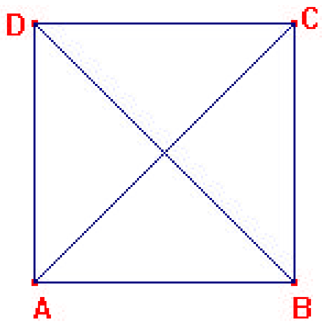
Concludendo:

il quadrato ha i quattro angoli ………….. e i quattro lati …………………….

il rettangolo ha i quattro angoli ………….e i lati opposti …………………….

Possiamo sempre affermare che
un quadrato è un rettangolo? SI / NO
un rettangolo è un quadrato? SI / NO.

3) Vedi disegnato il quadrato ABCD. Il segmento AC è una <u>diagonale</u>.
Se il lato misura 3 cm, calcola la misura della diagonale AC applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC.



AC =

Ma anche DB è una diagonale dello stesso quadrato. Calcola DB applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD.

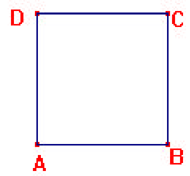
BD =

Quante diagonali ha il quadrato? ……………………………………………..
Le diagonali del quadrato sono uguali / disuguali.

Scheda 6

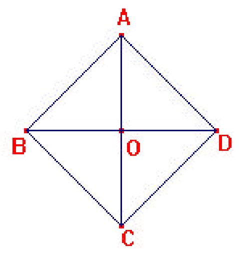
ALUNNO……………………………………………….CLASSE………….DATA…………….

1) Nel quadrato ABCD disegna la diagonale AC
Se ritagli poi il quadrato lungo il perimetro e
pieghi successivamente il quadrato lungo la diagonale AC
le due parti coincidono? SI / NO
La diagonale è un asse di simmetria per il quadrato ? SI / NO.

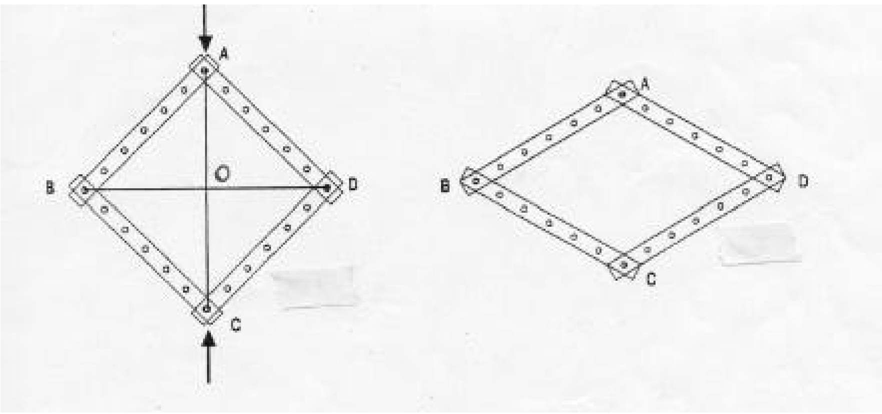


Anche BD è un asse di simmetria per il quadrato ? SI / NO.

2) Vedi nuovamente disegnato il quadrato ABCD ruotato di un angolo di 45°.
AC è asse di simmetria per il quadrato, perciò BO = OD.
Anche BD è asse di simmetria per il quadrato, quindi AO = OC
Le diagonali di un quadrato si tagliano a metà ? SI / NO.
Quando pieghi il quadrato lungo la diagonale AC gli angoli AOB e AOD si sovrappongono: sono perciò uguali, hanno inoltre per somma un angolo piatto e quindi sono retti. Le diagonali di un quadrato sono perpendicolari ? SI / NO.



3) Vedi disegnato un quadrato ABCD formato con le aste di un meccano: Se con la stessa pressione comprimi il quadrato, nei punti A e C, indicati con le frecce, nella direzione AC, i segmenti AO e OC diminuiranno nella loro lunghezza, ma resteranno uguali fra loro (vedi fig.2 a lato)



Le diagonali AC e BD sono ancora uguali ? SI / NO.
I lati della figura 2 sono uguali / disuguali.
La figura 2 è un rombo ? SI / NO.
Ti pare che si possa dire: "il rombo è un quadrilatero con i lati tutti uguali" ? SI / NO.
Il quadrato ha tutti i lati uguali: possiamo affermare che è sempre un rombo ? SI / NO.
Possiamo dire che il rombo è sempre un quadrato ? SI / NO.
Dal modo in cui è stato costruito il rombo puoi dedurre che le diagonali sono perpendicolari ? SI / NO.

Scheda 7

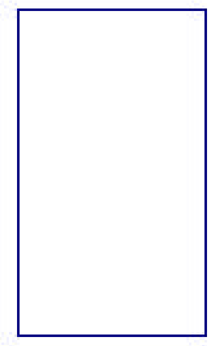
ALUNNO……………………………………………….CLASSE……….DATA………….

1) Vedi disegnato il rettangolo MNPQ.
Sapendo che MN misura 4 cm e NP misura 3 cm,
disegna la diagonale MP e calcolane la misura
MP =

Considera lo stesso rettangolo MNPQ:
calcola la diagonale NQ
NQ =

Le diagonali del rettangolo sono …………………

2) Vedi disegnati più rettangoli:



Pensi che si possa affermare che le diagonali del rettangolo sono perpendicolari fra loro?
SI / NO

Scheda 8

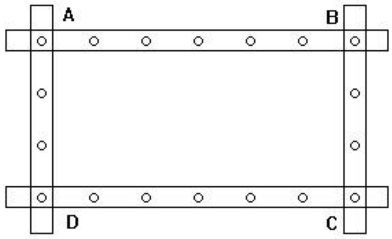
ALUNNO……………………………………………….CLASSE……….DATA………….

1) Considera il rettangolo ABCD costruito con i pezzi del meccano come nella prima figura.

I lati opposti sono……….. e sono ………….

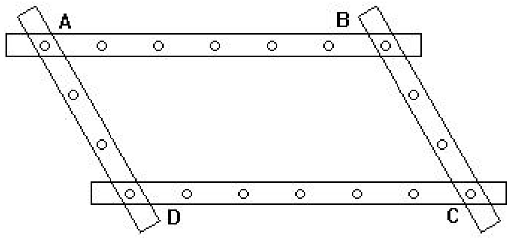
Gli angoli sono ……………..

Le diagonali sono …………..



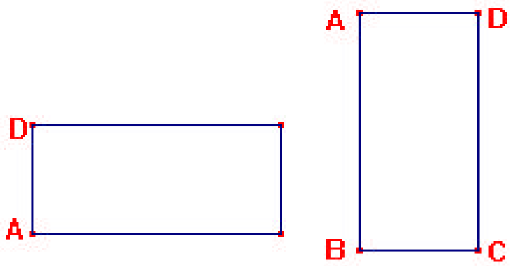
2) Comprimiamo il rettangolo, premendo sul vertice B in direzione dell'asta BA: si ottiene un parallelogramma (vedi figura); nella nuova figura:

i lati opposti sono uguali ? SI/NO/DIPENDE
i lati opposti sono paralleli ? SI/NO/DIPENDE
gli angoli sono tutti uguali ? SI/NO/DIPENDE
le diagonali sono uguali ? SI/NO/DIPENDE

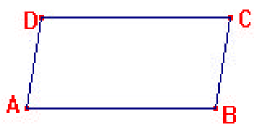


3) Il rettangolo è un parallelogramma ? SI/NO/DIPENDE
Il parallelogramma è un rettangolo ? SI/NO/DIPENDE
Il quadrato è un parallelogramma ? SI/NO/DIPENDE
Il parallelogramma è un quadrato ? SI/NO/DIPENDE
Il rombo è un parallelogramma ? SI/NO/DIPENDE
IL parallelogramma è un rombo ? SI/NO/DIPENDE

4) A fianco, è disegnato il rettangolo ABCD.
AB è la base. L'altezza è ………
Ruotiamo il rettangolo otteniamo un rettangolo:
BC è la base. Qual è l'altezza?
Il rettangolo ha ………..basi e………..altezze.



5) Ricordando l’esperienza appena fatta con il meccano, disegna, nell figura a fianco l’altezza relativa alla base AB.



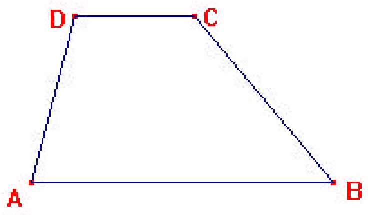
6) Come per il rettangolo, pensiamo il parallelogramma ruotato in modo chela base sia BC.
Qual è allora la sua altezza?
Sottolinea la risposta corretta. Il parallelogramma ha una / due altezze.

Scheda 9

ALUNNO………………………………………………CLASSE……….DATA…………..

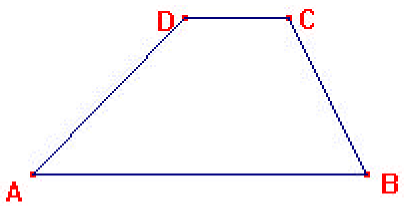
1) La figura a lato rappresenta, come ti ricordi, un trapezio. Ha due lati paralleli.
Disegna le diagonali.

Valuta la seguente affermazione:
il trapezio è un quadrilatero con
solo una coppia di lati paralleli SI / NO



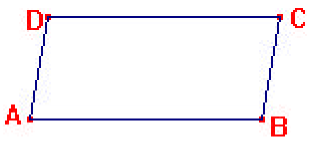
Se AD = BC il trapezio si dice isoscele: disegna un trapezio isoscele con le diagonali.
Se AD è perpendicolare ad AB il trapezio si dice rettangolo: disegna un trapezio rettangolo con
le diagonali.

2) Nel trapezio in figura le diagonali si tagliano a metà ? SI / NO



Disegna un trapezio isoscele e un trapezio rettangolo e verifica sulle figure se le diagonali si tagliano a metà.

Nel parallelogramma le diagonali si tagliano a metà ? SI / NO



Disegna un quadrilatero con diagonali perpendicolari. In quali casi è un rombo?

Scheda 10

ALUNNO……………………………………………….CLASSE……….DATA…………

Nella seguente tabella trovi nella prima riga i nomi di alcuni quadrilateri e nella colonna di sinistra alcune affermazioni che esprimono proprietà di particolari tipi di quadrilateri. Segna una X nei riquadri in modo da completare in modo corretto la frase (ad esempio, la X segnata nella prima riga si legge: un parallelogramma è un quadrilatero che ha due coppie di lati opposti paralleli

E' un quadrilatero che ha …….	parallelogramma	rettangolo	rombo
due coppie di lati opposti paralleli	X		
lati opposti paralleli			
angoli tutti uguali			
angoli opposti uguali			
diagonali uguali			
diagonali che si dimezzano			
diagonali perpendicolari che si dimezzano			

Scheda 11

ALUNNO…………………………………………….CLASSE……….DATA……………

Nella seguente tabella trovi nella prima riga i nomi di alcuni quadrilateri e nella colonna di sinistra alcune affermazioni che esprimono proprietà che specificano tipi particolari di quadrilateri. Segna una X nei riquadri in modo da completare in modo corretto la frase (ad esempio, la X segnata nella prima riga si legge: per un quadrilatero è necessario avere una coppia di lati paralleli per essere un parallelogramma).

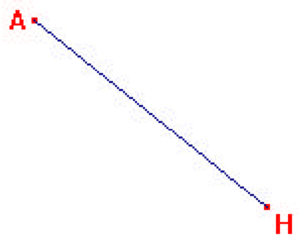
Per un quadrilatero ……	parallelogramma	rettangolo	rombo
… è necessario avere una coppia di lati paralleli per essere un ………	X		
… basta avere due coppie di lati paralleli per essere ….			
..è necessario avere due coppie di lati paralleli per essere …….			
… basta avere le diagonali uguali per essere …….			
… e’ necessario avere le diagonali uguali per essere …			
… basta avere le diagonali perpendicolari per essere ……			
….basta avere lati uguali per essere….			

Scheda di verifica 1

ALUNNO…………………………………………….CLASSE……….DATA…………

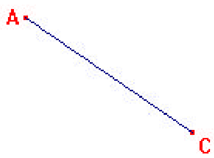
1) Costruisci un triangolo isoscele ABC in cui A è il vertice comune ai due lati uguali e AH è una altezza.

Descrivi il procedimento seguito.



2) Costruisci il quadrato ABCD per il quale AC sia una diagonale.

Descrivi il procedimento seguito.

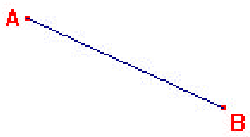


3) Costruisci un rombo ABCD per il quale è assegnato il lato AB.

Descrivi il ragionamento seguito.

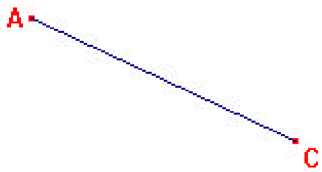
4) Costruisci un triangolo isoscele per il quale è assegnato il lato AB e nel quale i lati uguali hanno il vertice comune C.

Descrivi il procedimento seguito.



5) Costruisci un rettangolo ABCD per il quale è assegnata
la diagonale AC.
Descrivi il procedimento seguito.

6) Costruisci un rombo ABCD per il quale è assegnata
la diagonale AC.
Descrivi il procedimento seguito.



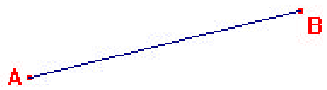
7) Costruisci il parallelogramma ABCD per il quale
sono assegnati i vertici A, B, C.
Descrivi il procedimento seguito.

A .

. C

B .

8) Costruisci un triangolo isoscele per il quale è
assegnato il lato AB e in cui A è il vertice comune
ai lati uguali.
Descrivi il procedimento seguito.



Scheda di verifica 2

ALUNNO………………………………………………….CLASSE………….DATA……………

1) Disegna, quando è possibile, i quadrilateri con le caratteristiche indicate:

1.1) Quadrilatero con quattro lati uguali

1.2) Parallelogramma con quattro angoli uguali

1.3) Parallelogramma con quattro angoli e quattro lati uguali

1.4) Quadrilatero con quattro angoli retti, quattro lati uguali e diagonali uguali

1.5) Parallelogramma con lati paralleli a due a due

1.6) Parallelogramma con le diagonali uguali e perpendicolari

2) Quali delle precedenti descrizioni individuano <u>solo</u> il quadrato?

3) Quali delle precedenti descrizioni individuano <u>anche</u> il quadrato?