GUIDA DIDATTICA PER L'INSEGNANTE

LA VIA DELLA MATEMATICA

I Numeri - La Geometria

di EMMA CASTELNUOVO

« LA NUOVA ITALIA » EDITRICE
FIRENZE

INTRODUZIONE

Sono sempre stata contraria a scrivere una guida sull'uso dei miei testi. Mi sono sempre chiesta, infatti, se anche un solo suggerimento, una sola indicazione non possano influenzare le idee didattiche che ognuno si fa con il suo insegnamento, idee che, essendo frutto della propria esperienza, sono sempre le migliori.

Sono i giovani e i giovanissimi che hanno insistito; cedo oggi al loro gentile invito pensando che questo libretto potrà essere lasciato da parte dai colleghi piú maturi.

Mi chiedo però: come indicare una strada quando accade a me stessa di cambiare di anno in anno non solo l'ordine degli argomenti ma anche il modo d'introdurli e di svilupparli?

D'altra parte, se rifletto, devo senz'altro convenire che vi sono nel mio insegnamento, come nell'insegnamento di qualunque docente, dei punti fermi, dei legami inscindibili fra argomento e argomento, delle idee pedagogiche generali che ho avuto modo di esporre nella mia *Didattica della Matematica*, e che mi auguro di essere riuscita a mettere in rilievo nei due testi.

È proprio alla descrizione dei vari capitoli dei due volumi *La Geometria* e *I Numeri*, e all'uso che se ne può fare in classe, che sono soprattutto dedicate le pagine di questa Guida.

La lettura dei testi in classe

È noto come molti bambini abbiano oggi poca simpatia per la lettura. Non possiamo esigere perciò che, da soli, si mettano a leggere un libro di matematica; al piú, li vedremo sfogliare questi libri fermandosi su qualche illustrazione o su qualche disegno.

Siamo noi che dobbiamo lavorare per loro, ma il lavoro è particolarmente semplice: si tratta di leggere insieme.

Teniamo presente che, soprattutto nella prima classe, un'ora di matematica è troppo lunga; utilizziamo allora l'ultimo quarto d'ora o gli ultimi venti minuti per leggere. L'insegnante legge e i bambini seguono sul libro.

Cominciamo col leggere qualche pagina del 1° Capitolo de *I Numeri* o qualcuna delle prime pagine de *La Geometria*: le une e le altre di carattere storico.

Si legge, ci si ferma talvolta per commentare, si è interrotti altre volte da qualche osservazione dei bambini, da qualche domanda, a cui può accadere di non saper dare una risposta. Quale occasione per dire " non lo so; forse mi posso informare; forse anche voi potete guardare in altri libri... ". Vi sarete fatti amici i bambini, subito, con questa vostra sincerità.

Mentre si legge, si osserva: i bambini sono « presi » da quelle pagine; la classe è calma, serena. Non li abbiamo mai visti, forse, cosí distesi.

Oggi si legge qualche pagina del 1° Capitolo de *I Numeri*, la volta successiva si continua. Ed ecco qualcuno vi dice che, da solo, ha letto altre pagine, a casa; potete dire di avere già ottenuto un gran successo.

Tutto il 1° Capitolo de *I Numeri* e anche il 2° dovranno costituire dei momenti di distensione in classe: si leggeranno durante l'anno, quando c'è tempo, quando ci si vuole distrarre.

E anche le prime pagine di ogni altro capitolo, sia dell'aritmetica che della geometria, saranno oggetto di lettura in classe.

Altre volte, poi, si potrà aprire un argomento con la lettura, e proseguire successivamente con la spiegazione viva.

C'è un capitolo ne *I Numeri* che affascina i ragazzi: è il capitolo 6 sulla struttura del linguaggio; quelle pagine sono da leggere in classe.

Leggere e rileggere: ma non esigere mai una ripetizione o un riassunto. La lettura porterebbe subito a delle preoccupazioni e da piacevole passatempo diventerebbe un'antipatica occupazione.

Leggere e rileggere: il bambino impara a gustare una lettura scientifica, ad ascoltare il compagno che fa un commento, a intervenire a sua volta, a discutere, a... pensare; e a poco a poco gli viene il desiderio di scrivere, anche a lui, di matematica; scrivere cosí, liberamente, con le sue parole che non devono mai essere costrette in schemi fissi dall'insegnante.

La struttura dei testi

Mi sono lasciata andare, mi è sembrato di essere in classe ed ho scritto cosí, di getto, le pagine precedenti. Ma se si vuole valersi di un testo, è il testo che dobbiamo conoscere piú che il modo di far lezione dell'autore. Cercherò dunque in questo numero di mettere in evidenza la linea didattica cui si ispirano i due volumi.

A) La Geometria

Questo libro si apre con un capitolo — il Cap. 1 — in cui non intervengono numeri. L'attenzione è rivolta alla struttura dei poligoni, e, in particolare, dei triangoli e dei quadrilateri. E dico *struttura* nel significato « fisico » della parola: il triangolo ha una struttura statica, ogni altro poligono una struttura dinamica. È proprio questa mobilità dei poligoni articolati che porta in modo spontaneo ad introdurre delle nozioni di matematica che il bambino fa subito « proprie », come la nozione di insieme e di intersezione di insiemi, quella di proprietà invariante, di funzione, di caso limite...

Riflettiamo: l'attenzione è portata su una figura mobile in uno spazio immobile, in uno spazio, cioè, che non subisce esso stesso delle trasformazioni. Si farà osservare, per esempio, che il quadrato appartiene all'insieme dei rombi e che, nel passaggio dall'una all'altra figura, alcune proprietà rimangono invariate, come il parallelismo dei lati. Questa è una proprietà affine e si riscontra anche nelle ombre date dai raggi del sole: l'inquadratura di una finestra rettangolare dà come ombra un parallelogramma. Ora, nel caso del rombo articolato, tutti gli oggetti che lo circondano rimangono fissi, ed è solo il quadrilatero che articoliamo con le mani che subisce la trasformazione affine, mentre nel caso della luce solare ogni oggetto colpito dai raggi del sole dà luogo ad un'ombra in cui si verifica l'invarianza del parallelismo.

Voglio mettere l'accento su questa concezione didattica: nei primi capitoli della geometria si considerano delle figure mobili in uno spazio immobile, in uno spazio cioè che non prende parte alla trasformazione. Io ritengo che sia didatticamente piú opportuno cominciare lo studio della geometria da quello di figure articolabili piuttosto che da quello delle trasformazioni: è piú facile, in tutto un *primo periodo*, « dominare » l'articolarsi di un poligono piuttosto che la trasformazione dell'intero spazio, a cui si arriverà solo in un secondo tempo. (Capp. 8, 9, 10).

Cosí, si troverà che il Cap. 2 è dedicato alla simmetria: non si tratta però dello studio della simmetria nel piano, ma l'attenzione è rivolta alla simmetria di alcune figure piane, in particolare del quadrato. Alla simmetria come particolare isometria si arriverà successivamente (Cap. 8).

E cosí ancora, nel Cap. 6, si studiano le figure simili, in particolare i poligoni simili; ma non è tutto il piano che viene trasformato per similitudine: alla similitudine come trasformazione del piano si arriva nei Capp. 8 e 10: la similitudine apparirà allora come caso particolare di una trasformazione affine e proiettiva.

È da notare come la considerazione di due figure simili sia strettamente legata, da un punto di vista analitico, alla nozione di rapporto, nozione che si precisa ancor meglio quando la similitudine viene vista come trasformazione del piano, portando in modo del tutto naturale allo studio delle grandezze direttamente proporzionali, e, quindi all'espressione analitica di una particolare funzione.

Queste osservazioni mi sembrano opportune se si vuole organizzare tutto il corso in gradi successivi di astrazione. E ritengo molto formativo che in un secondo tempo (possibilmente alla fine della 2^a classe o in 3^a) i ragazzi rivedano le proprietà delle figure, che avevano analizzato come fatti isolati, come « inglobate » nel mondo delle trasformazioni, siano esse affini, proiettive, simili, isometriche.

Come ho detto all'inizio, *La Geometria* si apre con due capitoli in cui non intervengono numeri; intervengono però, da un punto di vista piú largo, strette relazioni fra il mondo geometrico propriamente detto e il mondo analitico e algebrico: cosí la considerazione di figure articolabili porta al concetto di funzione e la legge di composizione delle rotazioni e delle simmetrie nel quadrato porta a riflettere sulla legge additiva dei numeri pari e dispari, e pone dunque l'accento su una identità strutturale. I bambini rimangono impressionati da queste analogie.

È solo a partire dal Cap. 3 (area e perimetro) che il legame geometria-aritmetica diventa piú stretto agli occhi del bambino; il problema dell'area di poligoni isoperimetrici e quello duale del perimetro di poligoni equivalenti conducono a verificare con operazioni numeriche delle intuizioni geometriche e viceversa. Il calcolo non appare piú ai bambini come una cosa arida, essendo vivificato, essendo addirittura imposto, da questa o quella situazione geometrica.

È chiaro che questo 3° capitolo potrà essere svolto prima del 2°; si può essere infatti condotti a parlare di area proprio dalla considerazione dei poligoni articolabili. E, da un punto di vista didattico, questa anticipazione del Cap. 3 può essere opportuna ove si voglia impegnare assai presto l'attenzione dei bambini su esercitazioni scritte.

È sempre il Cap. 3 ad introdurre, in modo del tutto spontaneo, l'espressione analitica di una particolare iperbole ($x.y = 36$), o di una particolare retta ($x + y = 24$), o di una particolare parabola ($y = x^2$). Vorrei far notare però che non s'intende, in questo modo, di dare inizio a una trattazione di geometria analitica; si vuole solo far intravedere, fin dai primi giorni, l'appoggio che « un piano quadrettato » può dare alla risoluzione di semplici problemi « aperti » di geometria, e, quindi, lo stretto legame che sorge spontaneamente con il mondo dei numeri. È solo in un tempo successivo che il ragazzo, ricco ormai di tante conoscenze geometriche, ritroverà e inquadrerà queste prime equazioni di curve in una visione piú larga; proprio allo stesso modo che i capitoli sulle trasformazioni geometriche gli permettono di rivedere da un piú largo punto di vista quelle trasformazioni di figure che aveva precedentemente studiato come fatti isolati muovendo dall'articolazione di qualche poligono.

Dal Cap. 3 si arriva spontaneamente al Cap. 4 sulla scomposizione e composizione delle figure e, quindi, al teorema di Pitagora. Io ritengo che sia particolarmente formativo mettere i bambini, fin dal 1° anno, davanti a una proprietà che non è affatto evidente. E, d'altra parte, basandosi sull'equivalenza per somma e per differenza, la dimostrazione di questo teorema non offre alcuna difficoltà.

Non c'è bisogno di dire che i bambini saranno abituati subito all'uso delle tavole numeriche, e che molto spesso basterà che si valgano, per il valore di radice quadrata, di una sola cifra dopo la virgola.

Questo capitolo può segnare la fine del 1° anno.

Il Cap. 5, da svolgersi nel 2° anno, porta al concetto di angolo e, quindi, a una nozione particolarmente astratta. È chiaro che fin dalla classe precedente e anche alla scuola elementare i bambini hanno tante volte parlato di angolo; ma adesso si vuole « indagare » su questa nozione piú da vicino. Non si tratta però di far apprendere questa o quella definizione: nessuna definizione potrà chiarire un concetto, e in particolare quello di angolo; questa nozione sarà invece « assimilata » a poco a poco attraverso esercitazioni. Verrà cosí introdotta l'unità di misura e i suoi multipli e sottomultipli. E il teorema sulla somma degli angoli del triangolo offrirà tante, varie e talvolta inaspettate esercitazioni atte a legare il calcolo sulle misure a questa o a quella situazione geometrica.

È sempre la nozione di angolo che « domina » il Cap. 6 sulle figure simili: la considerazione di poligoni di grandezza diversa ma di uguale forma chiarisce ancora ulteriormente la nozione di angolo. Questo capitolo è — come si è già detto — strettamente legato a quello delle proporzioni (*I Numeri*, Cap. 10): può dunque — se si crede — servire d'introduzione a quel capitolo.

Nel libro, a seguito del Cap. 6 sulla similitudine, si trova il Cap. 7 dedicato al cerchio; successivamente si trovano i capitoli sulle trasformazioni geometriche e sulla geometria analitica. Molte volte è piú opportuno lasciare al 3° anno la trattazione del cerchio che richiede un notevole sforzo di astrazione, e anticipare invece al 2° anno i capitoli 8, 9, 10, che valgono a ravvivare il programma di 2ª, entusiasmando i ragazzi con tante osservazioni sulla realtà che ci circonda.

Fra questi tre capitoli, il 9°, sulla geometria analitica, può essere svolto, prima dell'8°: sembra addirittura che il piano quadrettato, nostro supporto della geometria analitica, serva ai bambini come un « appoggio di sicurezza », tanto facili, immediate e spontanee gli appaiono le prime questioni.

Riguardo alle trasformazioni, dopo un primo e lungo appoggio concreto che permetterà di scoprire sul vivo le proprietà dell'affinità (esaminando per esempio le ombre di un quadrettato date dai raggi del sole), e di distinguere le varie isometrie (esaminando quali movimenti occorre fare per portare una figura piana a coincidere con una uguale), l'attenzione sarà rivolta alle proprietà che caratterizzano la struttura di gruppo, struttura che diverrà ben presto qualcosa di familiare agli occhi del ragazzo, proprio perché ha occasione di incontrarla a proposito di tanti insiemi, numerici e non numerici, finiti e infiniti.

Arriviamo cosí alla 3ª classe.

Dopo un primo periodo dedicato al cerchio (secondo l'organizzazione del programma che abbiamo suggerito e che spesso riesce opportuna) dove si insisterà in esercitazioni sulla determinazione di lunghezze e di aree con contorni a tratti circolari, si passerà alla geometria dello spazio: i ragazzi non troveranno alcuna difficoltà, tanto questi capitoli vengono ad essere sviluppati in modo naturale sulla base di una buona conoscenza della geometria piana.

Anche qui, come per la geometria del piano, l'attenzione è rivolta subito al « globale », alle figure, per poi, attraverso un'analisi di queste, scendere alle nozioni primitive (e quindi piú « sottili ») di rette e piani nello spazio.

A differenza però di quanto è stato fatto per la geometria piana, non è possibile sviluppare una trattazione sulle trasformazioni nello spazio perché tutto questo porterebbe a questioni molto complesse e non rispondenti al livello di comprensione dei ragazzi di 13-14 anni.

Ho cercato però di rendere lo studio della geometria solida particolarmente vivo e ricco di situazioni, superando i limiti del programma, con l'analisi delle sezioni piane di alcuni solidi; questo studio permette di legare strettamente la geometria dello spazio a quella del piano rafforzando cosí la sempre difficile visione spaziale.

In particolare, le sezioni piane del cilindro e del cono richiamano le trasformazioni affini e proiettive collegando in una visione unitaria curve che si erano incontrate in situazioni isolate fin dalla 1ª classe.

Trovo molto importante di non limitare le formule della superficie e dei volumi ad una visione statica (e ciò al solo scopo di risolvere un problema « chiuso » relativo a questa o quella figura solida), ma di considerarle soprattutto da un punto di vista dinamico (studiare, per esempio, come varia il volume di un cilindro di data altezza al variare del raggio — si veda, a questo scopo, il Cap. 13 de *I Numeri*). In tal modo, verrà, per ogni situazione, richiamato il concetto di funzione, e tutti questi argomenti di geometria risulteranno strettamente collegati con l'ultimo capitolo de *I Numeri.*

È solo in 3ª che l'insegnante potrà proporre e incoraggiare a ripetere bene questo o quell'argomento, e i vari capitoli della geometria solida si presentano come particolarmente indicati. È molto bello osservare come i ragazzi passano a poco a poco, da un'esposizione orale piuttosto confusa ad una esposizione chiara, esatta, matematicamente perfetta. Loro stessi se ne rendono conto e il riuscire a esprimersi con chiarezza li riempie di gioia.

Ancora una volta — mi accorgo — sono uscita da un'analisi obiettiva del testo di geometria, e... sono entrata nella « didattica viva »: vogliate scusarmi.

B) I Numeri

Ho già detto che i primi due capitoli de *I Numeri* devono essere utilizzati ad un fine particolare: devono costituire dei momenti di lettura in classe, o, comunque, devono essere oggetto di distensione soprattutto durante il primo anno.

Si può dire dunque che il programma di aritmetica avrà inizio col Cap. 3: *L'insieme dei numeri naturali.*

Si tratta di un capitolo breve, e anche facile; è un capitolo che ha lo scopo di dare, subito, il gusto della matematica. Sono i soliti numeri — i naturali — che il bambino ritrova, però, da un nuovo punto di vista. Due o tre pagine gli bastano per aprirgli una finestra sulla matematica: insiemi e sottoinsiemi, insiemi chiusi e non chiusi rispetto a una legge di composizione, operazioni su numeri (la legge additiva dei pari e dispari) che portano a riflettere su operazioni di geometria (la composizione delle rotazioni e delle simmetrie nel quadrato) e su operazioni del linguaggio di tutti i giorni (la composizione delle frasi affermative e negative): tutto un mondo nuovo e affascinante a partire da quei numeri che gli sembrava di conoscere benissimo.

A questo capitolo segue il Cap. 4, su *una nuova operazione: l'elevazione a potenza.*

Si hanno ora molte possibilità di far applicare i bambini ad esercitazioni scritte, che riescono particolarmente interessanti proprio perché si tratta di una nuova operazione. Ed è anche la novità dell'operazione che porta a riflettere, da una parte, sul significato di operazione inversa, e, dall'altra, sulla corrispondenza biunivoca fra le potenze di un certo numero e i relativi esponenti.

Questo capitolo offre, anch'esso, dei notevoli ravvicinamenti col mondo geometrico (quadrato e cubo di un numero...).

Da « una nuova operazione » si passa al grosso Cap. 5 su *operazioni,* il cui largo significato è espresso dalla frase: « operare significa... operare ».

Gli allievi sono invitati a lavorare su una nuova aritmetica, quella dell'orologio; un'aritmetica che credono di conoscere benissimo ma che presenta tante, insospettate, curiosità. Un'aritmetica che opera sui numeri ma che, d'altra parte, si presenta come un fatto geometrico.

Dal confronto con l'aritmetica ordinaria vengono messe in piena luce proprietà uguali e proprietà diverse: insiemi chiusi e non chiusi, insiemi finiti e infiniti; analogie e differenze nell'intima struttura delle due aritmetiche.

Operare ha un largo significato: il bambino se ne è reso conto in questo Cap. 5; ma altre affascinanti scoperte, sempre sulle operazioni, gli offre la lettura del Cap. 6, sul *linguaggio.* Perché sono operazioni anche quelle che ognuno di noi fa quando parla cioè quando si esprime con delle frasi.

È chiaro che il Cap. 6 potrebbe essere omesso; penso però che possa costituire, in qualunque momento di una delle tre classi, una lettura affascinante ed estremamente formativa: con queste poche pagine il ragazzo viene a rendersi conto degli stretti legami che intercorrono fra il linguaggio e la teoria degli insiemi, e della geniale idea di mettere in relazione queste teorie con quella dei circuiti elettrici e, quindi, con gli automatismi.

In ogni modo — ripeto — dal Cap. 5 si può passare al Cap. 7 che ha per titolo *Multipli e sottomultipli.*

Ho cercato di dare a questo argomento, che offre spesso difficoltà per la sua astrazione, uno sviluppo moderno e nello stesso tempo concreto, appoggiandomi sia sulla visualizzazione attraverso uno schema grafico della relazione « essere multiplo di... » (« o essere sottomultiplo di... »), sia sui diagrammi di Venn per mettere in evidenza l'insieme dei multipli (o dei sottomultipli) comuni a due o piú numeri.

Il concetto cosí significativo di *relazione* viene introdotto in modo naturale come una « parentela » fra numero e numero. « Parentele » che — si vedrà poi nei capitoli successivi — non riguardano solamente i numeri ma si riferiscono piú generalmente ad enti matematici. Saranno gli esempi a mettere in rilievo come i vari tipi di relazione valgono a legare gli enti piú diversi.

Mi sembra che questa presentazione moderna susciti l'interesse dei bambini e permetta loro di superare quei passaggi, fuori dubbio astratti, che sono insiti nella natura stessa dell'argomento.

È ancora una relazione d'ordine quella che dà la linea al capitolo successivo, il Cap. 8, su *L'insieme degli interi-relativi.*

Il concetto di numero positivo e negativo non offre davvero nessuna difficoltà perché i bambini di oggi hanno frequenti occasioni di operare con addizioni algebriche su tutta la gamma degli interi.

L'unica difficoltà può essere data dalla moltiplicazione dei numeri relativi, cioè dalla cosiddetta « regola dei segni », che, da un punto di vista numerico, non è sorretta da nessuna rispondenza alla realtà; ma è invece la geometria che offre, in questo caso, l'appoggio concreto: i bambini scoprono infatti, quasi da soli, che la legge moltiplicativa dei numeri relativi non è altro che la legge di composizione delle simmetrie. Ancora, dunque, un'identità strutturale che viene a rafforzare quella scoperta all'inizio dell'anno a proposito della legge additiva dei pari e dispari, della composizione delle rotazioni e simmetrie del quadrato, e quella cosí espressiva « del sí e del no ».

Il capitolo degli interi relativi si chiude con un argomento di fondamentale importanza: *la struttura di gruppo.* L'esame delle proprietà di questo insieme porta infatti a confrontarne la struttura con quella dei naturali, considerando l'uno e l'altro insieme rispetto all'operazione di addizione.

Si coglie in tal modo il diverso comportamento algebrico: qui, nell'insieme degli interi, ogni elemento ha il suo inverso rispetto all'addizione; nei naturali, invece, i numeri non hanno questa proprietà. Verranno enunciate le proprietà che caratterizzano la struttura di gruppo.

L'elencazione di queste proprietà non rimane un freddo verbalismo proprio per il fatto che il bambino ha occasione di ritrovarle qua e là, a proposito di argomenti del tutto diversi, in insiemi finiti e infiniti, in insiemi numerici e non numerici.

L'insegnante che ha occasione di trattare questo argomento per la prima volta resterà certamente colpito nel vedere come i bambini, sia pure inconsciamente, provino un senso di armonia nel ritrovare la struttura di gruppo in insiemi tanto diversi, quasi fossero impressionati dalla ripetizione di un motivo musicale.

A poco a poco, poi, da questa armonia matematica inconscia, saranno condotti attraverso tanti esempi e controesempi, ad una vera presa di coscienza di questa struttura algebrica.

Il Cap. 9, raccoglie sotto un solo titolo tanti aspetti diversi di un'unica nozione, quella di *numero razionale*.

Nata dal concreto, come frazione-operatore, allo scopo di risolvere problemi che si imponevano alla società fin dai tempi piú remoti, questa nozione è venuta affinandosi nel corso dei secoli, ed è senz'altro una fra le piú ricche che s'incontrino nello studio dell'aritmetica. Questa ricchezza porta naturalmente a delle difficoltà di comprensione da parte dei ragazzi, e, quindi, a delle notevoli preoccupazioni didattiche.

Il « vedere », infatti, il numero razionale come classe di frazioni equivalenti esige, fuori dubbio, un notevole sforzo d'astrazione, e, pertanto, questa nozione non può essere assimilata in breve tempo.

Ritengo che i bambini di 1ª possano comprendere solo gli esercizi sulle frazioni che hanno un immediato riferimento al concreto: si tratta piú che altro di esercizi di geometria, o di qualche semplice caso riguardante la probabilità.

Quando gli allievi saranno piú maturi, in 2ª e in 3ª, potranno impadronirsi, chi prima e chi dopo a seconda delle facoltà astratte di ciascuno, della nozione di numero razionale. Saranno fuori dubbio gli esercizi a far « entrare » nel significato di questa nozione, ma sarebbe un gravissimo errore l'esagerare in lunghe e complesse espressioni frazionarie, che nulla portano alla chiarificazione del concetto.

È anche la scrittura sotto forma decimale a facilitare la comprensione di « numero razionale ».

Ho parlato tanto a lungo del Cap. 9 allo scopo di sottolineare come questo capitolo non possa assolutamente essere sviluppato tutto di seguito, ma vada « distribuito » in due o tre anni. Non ci si deve meravigliare — è il caso di ripeterlo ancora — se i bambini trovano tanta difficoltà per i numeri razionali: le difficoltà ci sono e non possono essere evitate perché fanno parte... della natura delle cose.

E ancora alle frazioni si riferisce il Cap. 10 che ha per titolo *Rapporti e proporzioni*. Capitolo che si presenta vivo, e quindi facile, per tutti i riferimenti alla realtà.

Andrà messo in stretto collegamento con il Cap. 6 de *La Geometria*, relativo alle figure simili.

Si potrà iniziare con la geometria per far vedere la necessità della risoluzione di una proporzione con un termine incognito, oppure partire dal concetto di rapporto, per arrivare a quello di proporzione, come è stato fatto nel Cap. 10 de *I Numeri*.

Le proprietà delle proporzioni, che pur non offrendo particolari difficoltà appaiono spesso scialbe e poco espressive, vengono vivificate e rese piene di significato per l'identità strutturale che lega l'insieme di queste proprietà al gruppo dei movimenti del quadrato.

Ancora una volta — è il caso di farlo notare ai ragazzi — questa semplice figura geometrica — il quadrato — interviene a proposito di questioni prettamente aritmetiche suggerendo inaspettate analogie. Non c'è bisogno di dire che, ove non lo si ritenga opportuno, quest'ultimo paragrafo sui movimenti del quadrato può essere senz'altro omesso.

Si passerà al Cap. 11 su *L'insieme dei numeri reali*. Breve capitolo, questo, in cui, ancora una volta, il quadrato fa da protagonista. E lo fa, in questo caso, alla luce della storia: il teorema di Pitagora conduce alla determinazione della diagonale di un quadrato di lato dato, e... quindi...

I numeri irrazionali, che trovano posto anch'essi sulla retta, non hanno, però, la possibilità di essere scritti come numeri decimali limitati o periodici nel nostro sistema di numerazione: i ragazzi ne rimangono fortemente impressionati, ed è proprio in questa occasione che si rendono conto della « limitatezza » dal nostro sistema di numerazione a cui, forse perché l'hanno appreso fin dalla scuola elementare, attribuivano un enorme potere.

La regola per estrarre la radice quadrata sarà limitata a pochi e semplici esempi: non è infatti il caso di imporre tanti esercizi, che si riducono solo ad un'applicazione mnemonica, quando le tavole numeriche offrono le prime cifre decimali, piú che sufficienti per risolvere i problemi che incontrano i ragazzi.

È invece molto opportuno familiarizzare gli allievi su casi semplici di estrazione di fattori fuori dal segno di radice quadrata, facendo notare come valga la proprietà distributiva nei riguardi del prodotto di radicali e non nei riguardi della somma.

Il Cap. 12 sulle *Equazioni* raccoglie e completa, in una unica teoria, molti dei casi di equazioni che si trovano proposte e risolte nei capitoli 5, 8, 9, 11, sotto il titolo piú ampio di « frasi aperte ». Comincio con il chiarire qui quest'ultimo titolo. Si è voluto che i bambini, a mano a mano che s'introducevano nuovi insiemi numerici, si rendessero conto dei problemi risolubili o meno in questi insiemi, attraverso la considerazione di « frasi aperte », come queste:

" Quante soluzioni ha la disequazione

$$x < 5$$

nell'insieme dei naturali? e quante nell'insieme degi interi relativi? "

" Quante soluzioni ha l'equazione

$$x + 3 = 1$$

nell'insieme dei naturali? e quante nell'aritmetica dell'orologio? ".

" Sapresti suggerire qualche insieme in cui l'equazione

$$2x = -3$$

abbia soluzione? "

Abbiamo, volta a volta, dato una risposta, sfruttando le nostre conoscenze su questo o quell'insieme numerico, ma non abbiamo dato mai una regola generale di risoluzione, tanto piú che, ora si trattava di equazioni di 1° grado, ora di grado piú elevato, talvolta di disequazioni, altre volte di questioni riguardanti il valore di verità di una frase.

Di tutte queste « frasi aperte » si considerano adesso, nel Cap. 12, quelle che corrispondono ad equazioni di 1° grado a un'incognita; si trova la regola di risoluzione nell'insieme dei razionali e ci si vale di questa per risolvere i piú vari problemi.

L'ultimo capitolo, il 13 dal titolo *Fenomeni empirici e leggi matematiche*, si propone di dare un quadro sintetico delle leggi matematiche già incontrate o che sorgono spontaneamente ripensando alle tante questioni poste ne *I Numeri* e ne *La Geometria.*

Domina, in questo capitolo, il concetto di funzione inteso nel senso piú largo.

Si vuole, con la distinzione fra leggi empiriche e leggi matematiche, mettere in risalto il significato di matematizzazione di un fenomeno concreto, cioè della sua *scrittura* in formula. Questo aspetto, assieme all'interpretazione cioè alla *lettura* di una formula, renderanno a poco a poco il ragazzo altrettanto consapevole dell'uso del linguaggio algebrico che di quello del linguaggio ordinario.

Risposta ad una eventuale obiezione

Ci si potrebbe chiedere: come mai in un corso di matematica che pretende di coprire tutto il programma della Scuola Media manca il volume dedicato all'*Algebra?*

Una risposta esauriente condurrebbe ad un livello ben piú elevato fino a chiedersi " che cosa è l'algebra "?

Non è certamente necessario dare una risposta a questa domanda portandoci su un piano scientifico, ma vediamo invece di ritrovare insieme, nei due volumi, i vari argomenti di algebra.

Riflettiamo che si è già nel vivo dell'algebra quando si considera l'insieme dei numeri naturali dotato dell'operazione di addizione. E, mettere a raffronto questa struttura algebrica con quella rappresentata dall'insieme degli interi relativi dotato anch'esso dell'operazione di addizione costituisce un momento molto significativo dello studio dell'algebra.

Ed è ancora algebra tutto il Cap. 6 de *I Numeri* dove una stessa *struttura* si trova presentata sotto tre modelli diversi: l'algebra delle proposizioni, l'algebra degli insiemi, l'algebra dei circuiti.

Questo interesse per l'algebra è costante non solo ne *I Numeri* ma anche ne *La Geometria* dove mi sono trovata spesso a parlare un linguaggio algebrico in un contesto geometrico in coerenza all'atteggiamento della matematica moderna: si pensi ad esempio ai capitoli in cui si parla delle simmetrie del quadrato, del gruppo delle affinità, di quello delle isometrie e dei suoi sottogruppi.

Se invece l'obiezione « mancanza di un volume dedicato all'algebra » volesse riferirsi all'assenza del cosiddetto calcolo letterale, sento di essere in pieno accordo con i programmi ministeriali quando, con una precisa indicazione limitativa, indicano nel programma di 3ª: « Numeri relativi Equazioni a coefficienti numerici di primo grado ad una incognita ».

Questa limitazione tiene conto della difficoltà, ormai provata su un piano di esperimentazione didattico-psicologica, che ha il pre-adolescente per la piena comprensione del simbolo. Un anticipare il simbolismo porta solo ad un apprendimento di tipo meccanico.

Tuttavia, dove mi è sembrato che la traduzione in termini letterali potesse essere accettata e fatta propria dagli allievi, non ho esitato a farne uso nella maniera piú naturale.

Mi rimane da dire qualcosa sul « momento » che ho scelto per l'introduzione degli interi relativi. Ho creduto opportuno di anticiparne la trattazione rispetto al capitolo sull'insieme dei razionali perché la struttura degli interi, pur nella sua ricchezza, è assai piú semplice di quella dei razionali.

Il ruolo degli esercizi

È chiaro che gli esercizi devono costituire una parte essenziale di tutto **il corso.**

La maggior parte degli esercizi verrà svolta in classe, alla lavagna e sul quaderno, mentre l'insegnante gira fra i banchi per aiutare chi trova delle difficoltà e incoraggiare a una redazione corretta.

Quanto ai compiti per casa, conviene assegnarne pochissimi; in ogni modo il compito per casa deve essere facoltativo: ogni allievo deve fare quello che si sente di fare, segnalando — e questo è molto importante — nella lezione successiva le difficoltà e le incertezze che ha trovato.

Gli esercizi sono di tanti tipi, sicché mi sembra di essere piú chiara raggruppandoli in tre grandi « gruppi » ed illustrando gli scopi che ognuno di questi si prefigge.

A) Esercizi per attività para-scolastiche o da svolgere indipendentemente dall'argomento oggetto di studio.

Ho detto che il Cap. 1 e il Cap. 2 de *I Numeri* devono costituire dei momenti di lettura e di discussione in classe durante tutto il primo anno.

Anche gli esercizi relativi a questi due capitoli hanno un ruolo particolare: quelli del Cap. 1 e della prima parte del Cap. 2 dovrebbero essere sviluppati soprattutto in un doposcuola, o, comunque, in attività parascolastiche. Alcuni vanno svolti insieme, altri possono costituire una ricerca singola o condotta in équipe. Si può dire che la maggior parte di questi esercizi è un tema di discussione (potrebbe costituire una ampia relazione scritta) e apre una finestra sulla realtà: realtà che può essere l'ambientazione storica di un fatto scientifico o tecnico, o la descrizione di un viaggio sulla luna.

Il dire che questi esercizi sono particolarmente indicati per attività parascolastiche non significa certo che se ne vuole diminuire l'importanza formativa; ma purtroppo, tre ore di matematica alla settimana non permettono — ed è veramente triste — di poter dedicare troppo tempo a questi esercizi-ricerca.

Quanto agli esercizi della seconda parte del Cap. 2, cioè alla rappresentazione grafica, questi e altri che volta a volta si presenteranno spontanei, saranno sviluppati durante tutti i tre anni: la rappresentazione grafica entusiasma i ragazzi, allarga il loro mondo portandoli a riflettere su dati statistici riguardanti fatti economici, sociali, scientifici, e, d'altra parte, li educa all'ordine, alla precisione e ad un giudizio obiettivo.

Ho parlato del ruolo un po' speciale che hanno gli esercizi dei primi due capitoli de *I Numeri*. È forse bene che avverta i colleghi che anche nell'ultimo capitolo de *I Numeri* si trovano dei problemi un po' particolari: sono quelli, gli ultimi nell'ordine, raccolti sotto il titolo *Dall'osservazione scientifica alla matematica*. Si tratta di problemi che vogliono richiamare l'attenzione dei ragazzi su ricerche scientifiche attuali, alcune delle quali tuttora in discussione. Anche se alcuni di questi problemi sono assai complessi, l'interesse che destano è tale che, spesso, il ragazzo riesce a superare le difficoltà. È certo che il suo compito sarà molto facilitato da una buona preparazione in « osservazioni scientifiche ».

B) Esercizi e problemi « aperti »

Ci riferiremo ora ad esercizi che si trovano nei vari capitoli dei due testi.

Ho cercato di disporre gli esercizi, per ogni capitolo, in ordine di difficoltà.

I bambini devono rendersi conto che risolvere un problema non significa trovare la soluzione nel modo piú rapido ed esaurire cosí la questione; perché, la maggior parte degli esercizi apre una problematica, proponendo una questione aperta. Ad esempio: " Quale è l'area di un rettangolo di perimetro cm 24? " La risposta non è, evidentemente, unica: il bambino, che non è abituato a questo genere di problemi, rimarrà all'inizio assai perplesso. Poi ci prenderà gusto e non vorrà « mettersi » altro che a problemi aperti: è infatti solo cosí che avrà l'impressione di « fare della matematica ».

Questi problemi aperti conducono, spontaneamente, a scrivere una relazione: relazione che potrà cominciare con un semplice schema; per esempio, per riferirsi al problema sul rettangolo di perimetro cm 24, con una tabella di questo tipo:

base	altezza	area
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

L'osservazione della tabella conduce a tante considerazioni: valore massimo dell'area, valore minimo, casi uguali, cioè simmetria nei valori dell'area. Conduce anche ad osservazioni sul prodotto di un numero intero per un numero minore di 1. Poi, ancora, fa nascere il desiderio di costruire il grafico della funzione.

Questa problematica sui rettangoli isoperimetrici fa ricordare altri casi di poligoni aventi lo stesso perimetro; e può anche portare alla considerazione del problema duale, cioè del problema di rettangoli (o in generale poligoni) aventi la stessa area.

È chiaro che il bambino non sarà condotto, subito, da solo, a tante considerazioni: saremo noi a suggerirgli nel corso dell'anno tutti questi legami e queste idee. È chiaro anche che la sua espressione scritta sarà confusa, farraginosa o troppo schematica: « scrivere di matematica » è per alcuni assai difficile. C'è chi, invece, trova che " magari tutti i componimenti fossero cosí! " Il suo mondo poco ricco di fantasia, il suo vocabolario piuttosto misero, il suo carattere chiuso e retrivo gli rendono molto difficile la descrizione del mondo che lo circonda anche se, spesso, la « realtà » in cui vive è piú espressiva di quella del compagno che conduce una vita piú serena e piú facile. Ora, davanti a una situazione matematica, egli trova le parole, l'interesse a osservare e a ragionare, la gioia di esprimersi e di scrivere. Non c'è bisogno di sottolineare quanto tutto questo sia socialmente e psicologicamente formativo.

In ogni modo — e ancora una volta lo dico — incoraggiamo i bambini a scrivere, non togliamo loro l'entusiasmo dicendo un troppo secco " non è chiaro; le tue frasi sono contorte; non è un linguaggio matematico ". Ripetiamo che « scrivere di matematica » è difficile, e ci si arriva a poco a poco.

C) Gli esercizi per apprendere « una tecnica »

Non c'è dubbio che una parte di esercizi de *I Numeri* deve avere per unico scopo quello di addestrare a una « tecnica operatoria ». È come — si dice — l'apprendimento del solfeggio da parte di un allievo di un'Accademia Musicale: non si può insegnare solo un Mozart o uno Chopin o uno Stravinskij, ma ci vuole un addestramento preparatorio e continuo. Occorre dunque, in questo triennio di matematica, che l'allievo apprenda anche il calcolo meccanico: le espressioni non si devono tralasciare.

Con l'affermare questo, però, aggiungo che sarebbe molto pericoloso e addirittura assurdo esagerare in esercizi di questo tipo. A nessun matematico occorrerà mai di dover calcolare un'espressione « a 3 piani sopra e 3 sotto », magari sovrastata da un segno di radice quadrata da calcolarsi a meno di $\frac{1}{100}$! È chiaro — si dirà — che non dobbiamo occuparci del futuro matematico; ma — ci chiediamo — qual è il tecnico, il ragioniere, l'operaio, la commessa di negozio, a cui possono presentarsi calcoli di questo tipo? In un mondo, poi, in cui anche per i piú semplici calcoli ci si affida a una calcolatrice!

Si dirà: ma la risoluzione di espressioni chiarisce il significato di numero e, quindi, solo per questo, non deve essere lasciata da parte. Rispondo subito che è proprio nelle architettate espressioni che io vedo il pericolo di perdere il significato di numero, fino al punto che se il risultato finale è 2/3, e si chiede se questo valore è maggiore o minore di 3/4, il ragazzo, preso dal « gioco meccanico delle pedine », non solo non sa rispondere ma si meraviglia anche della nostra domanda: il « gioco » gli ha fatto completamente perdere l'idea che sta operando su numeri.

La risoluzione di espressioni è senz'altro importante purché ogni passaggio sia sostenuto da una logica operatoria; ora, per ottenere questo, bisogna che le espressioni siano semplici, e scelte in modo che il ragazzo non si possa abbandonare facilmente a un meccanico tecnicismo.

È essenziale, inoltre, che questi esercizi vengano proposti durante tutto il corso e « non concentrati » in un dato periodo senza « il conforto » di altri problemi piú interessanti.

Nell'epoca attuale non è l'esercizio meccanico che è importante, proprio perché, essendo meccanico, può essere risolto dalla piú semplice calcolatrice, ma è invece di grande importanza che l'allievo si abitui fin dai primi giorni a giudicare a occhio: giudicare l'ordine di grandezza del risultato che avrà una data operazione (si tenga presente che alcune macchine calcolatrici e anche il regolo calcolatore danno il risultato ma non indicano il posto della virgola); capire, senza eseguire un dato calcolo, se il risultato sarà maggiore o minore di un dato numero; « cogliere » se la somma di due frazioni sarà uguale a questo o a quel valore.

Vi è tutto un gruppo di esercizi de *I Numeri* riguardanti i Capitoli 5, 7, 9, 10 che ha per scopo di abituare a questa *elasticità operatoria*.

Per questo tipo di esercizi, mentre l'allievo viene ad essere sollecitato da 4 risposte una sola delle quali è esatta, l'opera di correzione dell'insegnante è facilitata dall'uso di opportune « griglie ». Trovate qui la spiegazione relativa a un esercizio: il n. 30 del Cap. 5, Parte II.

Ogni ragazzo ha nel testo *I Numeri*, tanti foglietti « a griglia » con in alto le indicazioni A, B, C, D e a lato i numeri da 1 a 10.

Il 1° esercizio del n. 30 è $4 \cdot 0{,}009$.

La soluzione esatta si trova fra le quattro scritte in corrispondenza delle lettere A, B, C, D:

A	B	C	D
0,0036	0,006	0,036	0,36

Il ragazzo farà un segno nella casella corrispondente alla soluzione da lui ritenuta esatta: in questo caso la soluzione esatta è 0,036 e corrisponde dunque alla lettera C.

Se per esempio abbiamo dato da svolgere il n. 30 con i suoi 10 esercizi, assegnando per lo svolgimento un tempo massimo in relazione al livello medio della classe, ogni ragazzo ci presenterà la sua scheda bianca in cui si troveranno tanti segni neri in corrispondenza a quelle che egli ritiene siano le soluzioni esatte.

Per il professore, il giudizio sulle soluzioni date dagli allievi è immediato: egli ha infatti, allegate a questa Guida, delle schede opportunamente forate (griglie di controllo), ciascuna delle quali corrisponde alle soluzioni degli esercizi indicati in basso alla scheda stessa.

Disponendo dunque la scheda opportuna sul foglio presentato dall'allievo, l'insegnante si renderà subito conto dell'esattezza o meno delle soluzioni.

Vedrete che esercizi di questo tipo riguardano degli argomenti un po' particolari su cui è opportuno addestrare a una certa elasticità operatoria.

Ripetiamo che questi esercizi costituiscono un mezzo per verificare l'apprendimento di qualche nozione e di qualche tecnica operatoria.

D) Le relazioni scritte

L'abitudine a considerare questioni « aperte » indica, fin dai primi giorni della 1ª classe, che cosa significhi una indagine matematica su questo o quel problema, e conduce, in modo del tutto spontaneo, ad una relazione scritta.

Ho già parlato dell'importanza, anche extra-scolastica, che attribuisco allo « scrivere di matematica ». Ora, è evidente che, a mano a mano che il programma diventa piú ampio, queste relazioni diverranno piú ricche e piú vive, i collegamenti potendo essere stabiliti non solo con questioni prettamente matematiche ma anche con argomenti di fisica, o comunque, largamente scientifici.

Piuttosto che dare un elenco di temi di relazioni che ogni anno e per ogni classe saranno diversi a seconda degli interessi e della sensibilità matematica degli allievi, ho pensato che possa essere piú utile far vedere come qualche argomento si presti particolarmente ad essere collegato con altri e ad incoraggiare in tal modo l'allievo ad una sintesi degli aspetti fondamentali di varie questioni.

Ecco alcuni esempi; vi prego di prenderli così, per quello che valgono: sono degli argomenti che hanno interessato i miei ragazzi:

A) Dato che gli allievi hanno piú volte incontrato la cosiddetta aritmetica dell'orologio (in particolare quella a 4 e a 12 elementi), viene spontaneo guidarli, al momento opportuno, ad una relazione di sintesi che, dal confronto con la struttura dei naturali, degli interi relativi, dei razionali, li porti ad analizzare piú a fondo la struttura di queste aritmetiche finite.

Si può anche suggerire loro (e questo in una relazione successiva) lo studio di aritmetiche finite di moduli diversi: è interessante confrontare la struttura dell'aritmetica dell'orologio nel caso in cui il modulo è un numero primo con quella di modulo non primo.

Ma, non si tratta solo di scegliere un tema; vi è anche la difficoltà di « porgere » questo tema, di adeguarsi al linguaggio e al pensiero del bambino: conviene sempre — mi sembra — « spezzare il discorso », cioè proporre tante domande in modo da guidare il ragazzo, attraverso la considerazione di questioni successive, a cogliere l'essenziale.

Ritornando al nostro argomento, si potrebbe invitare gli allievi a:

1) descrivere, una volta fissato il modulo dell'aritmetica gli elementi su cui opera (ogni elemento rappresenta una classe d'equivalenza rispetto a una ben determinata relazione: la relazione di congruenza modulo...);

2) costruire le tavole di addizione e di moltiplicazione e fare delle osservazioni (rispetto all'addizione, questi numeri si comportano come i naturali o come gli interi relativi? e, rispetto alla moltiplicazione, si comportano come i razionali?)

Si potrebbe anche domandare: qualunque sia il modulo, perché il prodotto di due numeri risulti uguale a zero, deve necessariamente essere nullo uno dei fattori?

Questa riflessione darà un particolare rilievo al principio di annullamento del prodotto valido negli ordinari insiemi numerici.

Lo studio, poi, delle aritmetiche di modulo primo e di quelle di modulo non primo porterà a scoprire il loro diverso comportamento rispetto alla moltiplicazione.

B) Una relazione potrebbe avere come titolo: « il concetto di rapporto ».

I ragazzi sarebbero condotti a ricordare quanto è stato detto in vari capitoli dei due volumi e in parecchi esercizi. I collegamenti di questo concetto con tanti, diversi aspetti della realtà suggerisce molti spunti da cui partire: l'esame di dati statistici relativi a fenomeni di carattere economico, fisico, ...; la considerazione di qualche problema di probabilità (ricordiamoci che questi problemi, anche i piú semplici, interessano moltissimo i bambini); le piú varie questioni geometriche e, fra l'altro, quelle riguardanti la similitudine.

L'allievo dovrebbe essere condotto a « sentire » il concetto di rapporto quale mezzo di analisi e di confronto di situazioni. Non si insiste mai abbastanza su questa nozione che molto spesso i ragazzi confondono con la differenza.

C) « Il concetto di funzione ». È questo, fuori dubbio, l'argomento piú ricco per invitare gli allievi ad una sintesi.

Può anche essere lasciato, come per il concetto di rapporto, alla libera fantasia degli allievi, che sceglieranno dagli argomenti studiati e dalla loro stessa esperienza quegli aspetti da cui sono rimasti maggiormente impressionati.

In particolare, i ragazzi troveranno nella geometria, che, fin dall'inizio, è stata loro presentata in tutta la sua « dinamicità », i piú vari spunti. Si tratterà ad esempio della lettura di una formula, della costruzione di una legge a partire da una questione geometrica, della trasformazione di una figura o dell'intero spazio.

Ecco qualche tema che ha addirittura entusiasmato i miei allievi; mi permetto di riportarveli cosí come li ho suggeriti, ma — vi ripeto — ognuno di questi deve vedersi inserito in un certo anno, « accordato » a quella particolare classe, e, sempre, si riferisce a un argomento su cui avevamo lavorato a lungo.

Noterete che l'ultimo tema tratta questioni riguardanti i baricentri. Questo argomento si trova sviluppato, sotto certi aspetti, nell'eserciziario de *La Geometria*; ho dedicato parecchio tempo allo studio dei baricentri durante alcuni anni e ho visto quanto sia formativo e come appassioni i ragazzi.

È importante che *la lettura di una formula* sia completa: tutte le « lettere » devono essere pensate come variabili. Ecco un tema che conduce a questa lettura:

" Le formule

$$A = b \cdot h \qquad \text{e} \qquad s = v \cdot t$$

si riferiscono rispettivamente, come sapete, all'area del rettangolo e al moto rettilineo uniforme.

Entrambe si possono riguardare come una stessa legge matematica considerando costante:
1) una delle grandezze del 2° membro;
2) la grandezza che compare al 1° membro.

Di quali leggi si tratta? Rappresentate queste leggi sul piano cartesiano fissando a piacere la costante ".

Si potrà anche suggerire al ragazzo di fermarsi sul caso 2) per entrare nel campo cosí ricco delle coniche.

E, sempre alla considerazione delle coniche, porta questa relazione che prende spunto dal cubo:

" Indicando con x la lunghezza dello spigolo di un cubo e con y l'area della superficie totale del cubo, scrivi la relazione che lega y a x, e rappresentala graficamente.

Questa relazione è un caso particolare di una legge piú generale che ha, anche, delle importanti esemplificazioni nella fisica. Parlane.

La curva, grafico di questa legge, può considerarsi come la trasformata di un cerchio sotto certe condizioni. Riferisci di esperienze in cui detta trasformazione si realizza per mezzo della luce ".

Qui, le coniche vengono viste — ed è la realtà che lo suggerisce — come trasformate di un cerchio per proiettività.

E ancora alla considerazione delle coniche, sempre a partire da esperienze sulla luce, si è condotti esponendo un rettangolo ai raggi uscenti da una sorgente puntiforme:

" Ho un rettangolo di cartone di dimensioni cm 12 e cm 16; lo proietto da una sorgente puntiforme S su una parete e mi accorgo che la sua ombra è sempre un rettangolo. Come deve essere disposto il rettangolo di cartone rispetto alla parete perché la sua ombra abbia sempre forma rettangolare? Se la sorgente si trova a 4 metri dalla parete e il cartone a metà di questa distanza, quali saranno le dimensioni del rettangolo ombra? Quale è la legge che lega segmenti corrispondenti nei due rettangoli (per esempio due dimensioni corrispondenti) alle distanze di questi dalla sorgente S?

Se il rettangolo di cartone non è parallelo alla parete, l'ombra risulterà sempre un rettangolo? Se invece del rettangolo si esponesse alla luce della sorgente S un disco circolare, che cosa potresti dire della sua ombra sulla parete? "

Alle trasformazioni affini e a quelle proiettive ci conduce una problematica di questo tipo:

" Un cartello pubblicitario ha la forma di rettangolo. Osservo l'ombra del cartello data dai raggi del sole sul terreno. A quale insieme di quadrilateri appartiene il quadrilatero ombra? Quali proprietà rimangono invariate in questa trasformazione?

Se il cartello è illuminato dalla luce di un lampione, che cosa puoi dire dell'ombra sul terreno? "

È giorno: la strada è illuminata dai raggi del sole; è notte: la stessa strada è illuminata da un lampione. Ci sembra « uguale » quella strada, eppure gli « effetti » dati dalla luce sono diversi, ma la gente non ci pensa!

Limitiamoci ora alle trasformazioni affini; ecco un tema che ha appassionato i ragazzi:

" Il sole entra dalla mia finestra: cosa vedo e cosa penso. Osservo l'ombra di un oggetto e scopro delle proprietà; queste proprietà mi portano a riflettere su tante questioni ".

È fuori dubbio piú difficile per un ragazzo impegnarsi in un tema molto largo come questo:

"Una figura, una trasformazione, una legge matematica evocano tanti argomenti.
Riferisci qualche impressione ".

La difficoltà viene dal fatto che il ragazzo deve fare una scelta tra tante cose che lo interessano; molte volte vorrebbe parlare su tutto ma è bene invitarlo a limitare il suo discorso che, altrimenti, rischia di diventare confuso.

Ecco, per esempio, come si può « dirigere » la scelta:

" Nello studio di vari campi della scienza ti è piú volte accaduto di considerare:
A) insiemi di numeri, di trasformazioni, ecc., che hanno la stessa struttura;
B) fenomeni naturali e situazioni matematiche che possono essere descritti con una stessa legge.
Illustra attraverso degli esempi che si riferiscono o all'argomento A o al B come la matematica riesca ad unificare tanti, diversi aspetti della scienza ".

Ma, in fondo, il tema potrebbe consistere in una sola parola:

" L'ellisse "
" L'iperbole "
" La parabola "

Quali e quanti collegamenti nelle scienze e nella tecnica evoca anche una sola di queste coniche!

E la figura su cui si porta l'attenzione potrebbe essere anche piú elementare; perché non suggerire il tema:

" Il quadrato "?

Riflettiamo che su questo argomento il ragazzo avrebbe da scrivere lungamente mettendo in rilievo tanti, diversi aspetti; l'argomento non è davvero troppo facile!

Ed ecco un tema che si riferisce alla nozione di baricentro:

" Nozioni fisiche, metriche e affini intervengono, ora l'una ora l'altra, nella ricerca della posizione del baricentro di una figura.
Illustra con esempi qualche aspetto di questa ricerca ".

Vorrei — lo ripeto ancora — che coglieste da questi temi di relazioni, scelti cosí, un po' a caso, solamente lo spirito: occorre dare ai nostri allievi lo spunto per un lavoro di sintesi su questioni che hanno incontrato spesse volte e che hanno destato il loro interesse.

Relazioni del tipo indicato sono state assegnate a ragazzi di scuole di

grandi città, ai ragazzi delle borgate di Roma, ai figli di contadini di varie regioni italiane. E questi temi piacciono a tutti: perché c'è « dentro » non solo qualche argomento studiato ma anche, sempre, la realtà che ci circonda.

Sono questi i temi che a loro piacciono, e, poiché piacciono, s'impegnano a scrivere.

La relazione di matematica viene cosí a fornire un aiuto prezioso per un giudizio sulla chiarezza dell'espressione in lingua italiana e, anche, sulla fantasia dell'allievo, dati, questi, che talvolta non emergono dal componimento d'italiano.

Mi permetto di insistere sul fatto che, sempre, si deve scegliere un argomento che ha particolarmente interessato gli allievi.

La libertà di scelta per questa prova, a cui siamo incoraggiati ufficialmente, vuole proprio avere questo significato: ogni insegnante darà l'argomento a cui gli allievi si sono maggiormente interessati.

E dare l'argomento che i ragazzi conoscono meglio non significa certo rendere l'esame banale e « già scontato »; significa invece incoraggiarli a svolgere una relazione ricca ed organica, a impegnarli ad un lavoro di sintesi in cui ciascuno cercherà di dare il meglio di se stesso.

La didattica viva
Qualche esempio di lezione in classe

Mi limiterò a dare qualche esempio di lezione nella 1ª classe dove l'insegnamento è fuori dubbio piú delicato. Ho scelto tre argomenti che mi sembrano particolarmente ricchi di contenuto e che portano a collegare questioni di aritmetica, algebra, geometria, anche in tempi successivi d'insegnamento.

Scusatemi se parlerò sempre in prima persona, ma in tal modo mi riesce piú facile di esprimermi perché ho veramente la impressione di essere in classe.

A) Una geometria senza numeri

Ci si chiede sempre: da quale argomento cominciare nella 1ª classe? Vi riferisco ora uno dei tanti argomenti con cui si può, fin dall'inizio, « prendere » la classe: qualche lezione di geometria « senza numeri ». Mi riferisco al Cap. 1 de *La Geometria.*

Entro in classe con delle strisce di plastica o di cartone o di qualunque altro materiale purché siano rigide, collegabili agli estremi, e di opportune lunghezze (come dirò fra breve).

Ogni bambino avrà un gruppetto di sei strisce.

Prima di distribuire il materiale invito i bambini a scrivere sul quaderno: " *Costruzione di triangoli.*

Ho a disposizione sei strisce collegabili agli estremi. Tre sono uguali e lunghe cm 6; una è lunga cm 9; una cm 12 e una cm 15.

Prendendo tre di queste strisce voglio costruire un triangolo.

Mi chiedo: è sempre possibile? ".

Mentre detto, giro fra i banchi. Mi rendo conto, cosí, di come scrivono, come reagiscono, come sono questi bambini.

Poi, a ognuno, il gruppetto di sei strisce; un po' d'esercizio insieme per abituarli a collegarle.

Si rilegge quanto è stato dettato.

Molti dicono: " certo che posso sempre costruire un triangolo! "

Allora bisogna spiegare. " Immaginate — dico — di 'pescare' le strisce ad occhi chiusi. Ne possono venire tre uguali e allora si costruisce il triangolo equilatero; ne possono venire tre diverse: ne possono venire di lunghe e di corte, per esempio una lunga e due corte, ... "

Ecco, piú d'uno vuol parlare, ma... invitatelo a scrivere; non deve dire subito le sue idee, altrimenti il piú disinvolto soffocherà le iniziative dei compagni. Ma..., come scrivere? Allora si passa vicino e si suggerisce individualmente come cominciare o come continuare il discorso. E siccome sono i casi d'impossibilità che parecchi riescono a scoprire, si incoraggia a scrivere cosí: " Ho scoperto che non posso costruire il triangolo con una striscia lunga cm 15 e con due da cm 6 ".

Qualcuno continua: " E non posso costruirlo nemmeno con una striscia da cm 12 e con due da cm 6; ... "

C'è qualcuno che è rimasto indietro, dei miei 30. Vado vicino per capire le sue difficoltà. Gli spiego, collegando queste o quelle strisce. La lezione è effettivamente individuale.

Tutti, alla fine dell'ora, hanno capito.

" Immaginate di avere delle altre strisce — dico —: di piú lunghe o di piú corte. Sapreste suggerire altri casi in cui con tre sbarrette non si può costruire un triangolo? Se avete voglia, pensateci a casa ".

Nella lezione successiva, girando fra i banchi, leggo in qualche quaderno una lista di casi di impossibilità; vedo, ad esempio, scritto cosí:

" Non posso costruire un triangolo con sbarrette lunghe

10	5	3
12	4	2
18	9	9
..	..	..

Però lo posso costruire con una sbarretta da 18, una da 9 e una da 9,1 ".

Qualcuno dice: " ho scoperto una regola ". Come al solito lo invitiamo a scrivere.

Dobbiamo riconoscere che il « cogliere » la regola generale esige un notevole salto d'astrazione: occorre infatti liberarsi non solo dal materiale che si ha a disposizione ma anche da un materiale pensabile (per esempio una sbarretta lunga 10, una 5 e una 4, sbarrette che non sono fra quelle che abbiamo dato); il materiale va idealizzato nel senso che si devono « vedere » tutti i casi possibili e i casi impossibili.

Non c'è da meravigliarsi se alcuni arrivano dopo molto tempo a questa astrazione.

Ho sviluppato la descrizione su queste prime lezioni sul triangolo con molti dettagli perché attribuisco una grandissima importanza a una prima presa di contatto col materiale.

Si potrà, da questa costruzione concreta, passare alla costruzione grafica; ma questa è assai meno importante e potrà anche essere rimandata.

Estremamente formative sono invece le lezioni sul quadrato, sull'insieme dei rombi e su quello dei parallelogrammi. Si potranno sviluppare in classe sotto forma di discussione; la classe sarà animatissima; avremo cosí modo di conoscere i piú intuitivi, i piú riflessivi, e i vari caratteri e le varie intelligenze cominceranno a manifestarsi.

Queste lezioni sui quadrilateri articolati, e in particolare sui parallelogrammi, conducono ad introdurre in modo spontaneo nozioni e operazioni matematiche che vengono dai bambini assimilate e fatte proprie immediatamente: dal concetto di insieme, di intersezione di insiemi a quello di funzione, di caso limite, di trasformazione. Contemporaneamente, il legame fra i nostri poligoni materiali e il mondo che ci circonda offrirà altri modi di interessare i bambini: sarà messa in rilievo l'importanza, nella scienza delle costruzioni, del triangolo come unico poligono « statico » e l'importanza invece, nella dinamica dei meccanismi, degli altri poligoni e in particolare dei parallelogrammi.

Ed è ancora la realtà in cui viviamo, l'osservazione delle ombre date dai raggi del sole, che offrirà l'occasione di far risaltare l'invarianza del parallelismo nei parallelogrammi articolati. Sarà questo un primo cenno, quasi di sfuggita, a quelle proprietà affini che dovranno costituire uno degli argomenti fondamentali di tutto il corso (*La Geometria*: Capp. 8 e 10).

B) Dalla geometria senza numeri all'aritmetica

Nelle lezioni precedenti l'attenzione era rivolta alla figura, cioè alle proprietà della figura messe in evidenza con l'articolare la figura stessa.

Il numero non interveniva, proprio per « concentrare » l'attenzione sulle proprietà geometriche e per « immergere » l'allievo in un contesto moderno dominato da nozioni come insieme, proprietà invariante, funzione.

In un successivo gruppo di lezioni le proprietà della figura verranno strettamente legate al numero. Si può prendere spunto, ad esempio, dal fatto che l'area di un parallelogramma articolabile cambia, evidentemente, con l'articolazione, e che l'area massima appartiene al rettangolo; e dico « evidentemente » benché la cosa non appaia davvero naturale ai bambini i quali sostengono all'inizio, in gran maggioranza, che se il perimetro è sempre lo stesso anche l'area non potrà cambiare (si può vedere a questo proposito le lunghe pagine che dedico all'argomento nella mia *Didattica*, Cap. III, n. 8).

Si può rendersi conto del fatto che l'area varia, oltre che attraverso la considerazione dei casi limite, con l'effettivo calcolo dell'area di un rettangolo di perimetro fisso facendo variare delle dimensioni.

È anche molto interessante far ritagliare ai bambini dei rettangoli in cartoncino di dato perimetro, si dispongono « a libretto » cosí come è indicato ne *La Geometria* (Cap. 3, n. 7), e, rettangolo per rettangolo si indicano le dimensioni e l'area, verificando cosí che il quadrato ha l'area massima.

Sarà bello e motivo d'orgoglio per gli allievi appendere su una parete della classe questo tabellone.

E ancora un'altra esperienza materiale sulla stessa questione può essere realizzata molto semplicemente con uno spago legato, tenuto teso fra le mani a mo' di rettangolo (si veda *La Geometria*, Cap. 3, n. 6).

Ma il fatto che figure isoperimetriche abbiano in generale un'area diversa viene ad essere chiarito, soprattutto, dal problema duale; la considerazione di figure equivalenti e la determinazione del perimetro. Anche qui è essenziale partire da un'operatività su un materiale, e il materiale può essere molto semplice: dei quadratini uguali. Diamo ad ogni bambino un certo numero di quadratini, per esempio da 1 cm^2, ritagliati su cartoncino. Ecco un problema che si può proporre: " Ho a disposizione 16 quadratini da 1 cm^2 ciascuno, e voglio costruire un rettangolo. L'area del rettangolo sarà evidentemente di 16 cm^2. Si chiede: quanti rettangoli si possono costruire utilizzando tutti e soli i 16 quadratini? Calcola il perimetro di questi rettangoli ".

Ogni bambino si mette al lavoro e non gli è difficile scoprire che può costruire tre rettangoli aventi rispettivamente le dimensioni

1 e 16; 2 e 8; 4 e 4.

In ciascuno di questi casi il perimetro risulta diverso; il rettangolo che ha il perimetro minimo è quello di dimensioni 4 e 4, cioè il quadrato.

È solo adesso che i bambini vi diranno di avere finalmente capito: " è evidente — diranno — che quando i quadratini sono ' piú uniti ' il perimetro diminuisce, perché ' i lati di contatto ' fanno perdere in perimetro ".

Ancora meglio si potrà far cogliere la questione facendo eseguire la costruzione con dei cubetti uguali, e spostando cosí il problema dal piano allo spazio e, quindi, alla determinazione della superficie di parallelepipedi equivalenti.

Ed ecco dei problemi aritmetici (sulle potenze e sulla divisibilità) che si presentano spontaneamente con la costruzione di rettangoli a partire da un certo numero di quadratini:

— è possibile costruire un quadrato con 12 quadratini? e con 20? e con 25? Come deve essere il numero dei quadratini perché sia possibile costruire un quadrato?
— è possibile costruire un rettangolo con 12 quadratini in modo che una delle dimensioni risulti uguale a 3? e uguale a 5? e a 8?

Se invece proponiamo la costruzione di un rettangolo di data area, per esempio di area cm^2 36, ritagliandolo su cartoncino, saremo condotti a pensare a infiniti rettangoli e, quindi, al grafico « iperbole », come è descritto ne *La Geometria* (Cap. 3, n. 8).

Potremo inoltre, anche in questo caso, portare l'attenzione degli allievi sul fatto che il prodotto di un numero minore di 1 per un numero intero è piú piccolo di quest'ultimo.

Un tabellone con dei rettangoli equivalenti, realizzati in cartoncino, verrà anch'esso a rallegrare la classe.

C) Dalle simmetrie del quadrato alla presa di coscienza di identità strutturali

Mostriamo ai bambini qualche figura, qualche fregio ornamentale in cui sia ben visibile un asse di simmetria; mostriamo poi qualche illustrazione in cui la ripetizione di un motivo sia ottenuta con la traslazione o con la rotazione di un disegno. Osserviamo insieme a loro questi motivi che si ripetono in modi diversi.

Si potrà dare cosí una prima intuizione di questo termine « la simmetria » che appare, al medesimo tempo, cosí armonioso e naturale, ma anche cosí vago e difficile da definirsi.

Invitiamo i bambini a fare una macchia con la tinta ad acquerello su un foglio e poi a piegarlo in modo che la macchia si riproduca sull'altra metà del foglio. Avremo due figure che sembrano uguali ma che... non sono uguali.

Tante osservazioni e tante esperienze sul mondo che ci circonda; la natura stessa ci offre le piú varie occasioni di riflettere sulla simmetria.

E ora cerchiamo di « stringere », di « particolareggiare » il nostro studio considerando qualche figura ritagliata sulla carta e cercando di scoprire, con piegature, gli eventuali assi di simmetria: il triangolo isoscele, il triangolo equilatero, il triangolo generico, il quadrato, il rombo, il rettangolo, ...

Il quadrato ci appare, ancora una volta, come intersezione dell'insieme dei rombi e dei rettangoli, « raccogliendo » i due assi di simmetria del rombo (le diagonali) e i due assi di simmetria del rettangolo (le mediane). Queste osservazioni sono molto espressive per dei bambini che hanno già conosciuto l'insieme dei quadrati come intersezione di rombi e rettangoli, ma a partire da tutt'altre considerazioni.

Invitiamo i bambini a tracciare una figura (anche una lettera o un numero, purché non abbiano assi di simmetria) in uno degli otto triangoli in cui viene diviso il quadrato dai suoi assi; vediamo come, per piegatura, questa figurina si riproduce negli altri sette triangoli. Tutti noteranno come in alcuni triangoli si ritrovi proprio la figura primitiva e come invece in altri triangoli la figura ottenuta sia la *simmetrica* della primitiva.

Queste osservazioni sono immediate ma appaiono nuove ai bambini. Qualcuno ricorda il caleidoscopio, altri pensano piú semplicemente allo specchio; e, proprio da esperienze con lo specchio si potrebbe partire per introdurre allo studio della simmetria.

Ma riprendiamo il nostro quadrato con le sue otto figurine (osserviamo per esempio la figura 101 de *La Geometria*); e pensiamo di « animarle », come se una figura fosse ricalcata su un triangolo di carta trasparente sovrapposto a uno degli otto triangolini del quadrato. Si chiede: è possibile passare dalla 1ª alla 3ª figura (se ne assuma una qualunque come iniziale) senza essere obbligati ad eseguire successivamente due simmetrie assiali?

Basta ruotare attorno al centro del quadrato il triangolo di carta trasparente perché i bambini scoprano da soli la legge di composizione delle simmetrie del quadrato.

Se, a questo periodo dell'anno scolastico, abbiamo già svolto il Cap. 3 de *I Numeri*, i bambini interverranno immediatamente dicendo che... " è la stessa legge dell'addizione dei pari e dispari, e anche della composizione del sí e del no ". Se invece non ci siamo ancora occupati di questi ultimi argomenti, possiamo prendere occasione dal contesto geometrico per entrare nell'insieme dei naturali.

Nell'uno e nell'altro caso si rimane colpiti dall'impressione che i bambini ricevono da questo ripetersi di un motivo matematico, da questa identità strutturale.

Proporremo di fare un tabellone da appendersi in classe con queste

tre leggi di composizione, cosí diverse fra loro, ma pur cosí uguali. Vedrete che diventeranno per loro tanto familiari da parlarne agli altri insegnanti, e in particolare a quello di lettere e di lingua straniera, quasi a voler mostrare che hanno capito che anche la grammatica è una scienza, è matematica.

Qualcuno, dalla mente piú astratta, arriva talvolta a cogliere la legge in tutta la sua generalità e propone di scrivere cosí:

○	□	△
□	□	△
△	△	□

Al posto di quei simboli si può pensare un numero pari e dispari, una rotazione e una simmetria, un sí e un no.

E... siamo ancora in 1ª quando l'operazione di moltiplicazione sui relativi porta a scoprire che quei simboli possono essere « riempiti » dando loro il significato di numero positivo e numero negativo legati dall'operazione di moltiplicazione.

Si arriva alla 2ª e alla 3ª classe: tanti altri argomenti, tante altre esperienze matematiche, ma quelle identità strutturali che hanno colpito i nostri bambini fin dai primi mesi di scuola media non saranno mai dimenticate. Ed ecco che nello studio generale delle isometrie (*La Geometria*, Cap. 8) si presenta la legge di composizione dei movimenti diretti e inversi che racchiude in sé, come caso particolare, la legge di composizione delle simmetrie del quadrato.

È facile rendersi conto, attraverso esperienze concrete, che l'insieme delle isometrie forma gruppo, e che questo gruppo si compone di due sottoinsiemi, quello dei movimenti diretti e quello dei movimenti inversi, di cui solamente il primo ha la struttura di gruppo. Proprio come l'insieme degli interi relativi ha la struttura di gruppo rispetto all'operazione di addizione; anche qui dei suoi due sottoinsiemi, i pari e i dispari, solamente il primo è un sottogruppo.

Non c'è bisogno di dire come questo ritrovare sotto una forma piú generale dei casi semplici già incontrati negli anni precedenti conduca a poco a poco il pensiero del bambino ad una visione unitaria della matematica.

Indice

SERIE DI 8 SCHEDE DA UTILIZZARE
PER LA CORREZIONE DEGLI ESERCIZI

EMMA CASTELNUOVO
LA VIA DELLA MATEMATICA - I NUMERI
LA NUOVA ITALIA - FIRENZE - 1970