Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 179-197

Sulle onde di accoppiamento gravitazionali-magnetofluidodinamiche in relatività generale

G. GEMELLI

RIASSUNTO: *Vengono qui considerate le onde di accoppiamento gravitazionali e magnetofluidodinamiche, con i metodi di Cattaneo e Lichnerowicz; nel caso di onde gravitazionali ordinarie si verifica che tale accoppiamento è possibile solo nei due casi: di Alfven oppure di fluido neutro*

ABSTRACT: *We consider here combined gravitational and magnetohydrodynamical waves, with Cattaneo and Lichnerowicz methods; for ordinary gravitational waves we discover that such combination is only possible in the case of Alfven waves, or in that of neutral fluid*

KEY WORDS: *Relativistic Magnetohydrodynamics – Shock waves – Combination of gravitational and magnetohydrodynamical waves.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 83C35

– Introduzione

In Relatività Generale l'evoluzione di una superficie S_t, fronte d'onda in un fenomeno di tipo propagatorio, è rappresentata, dal punto di vista assoluto, da una *ipersuperficie* Σ dello *Spazio-tempo* V_4. Su Σ si ha la discontinuità del campo rappresentante una qualche variabile fisica o una sua derivata.

Siffatte discontinuità sono vincolate al rispetto di alcune *condizioni geometriche di compatibilità*, le quali coinvolgono i caratteri locali di Σ, e consentono lo studio delle onde di accelerazione (ordinarie), e d'urto, in Magnetofluidodinamica relativistica (cfr. [10], [11], [12]).

Qui applicheremo gli stessi metodi allo studio delle *onde gravitazionali*, (ordinarie, recanti cioè discontinuità per le sole derivate seconde dei potenziali gravitazionali), sia nel vuoto, sia in presenza di materia fluida carica (plasma) oppure neutra. In questi ultimi due casi metteremo in evidenza l'accoppiamento delle onde gravitazionali rispettivamente con le *onde d'urto di Alfven* e con particolari *onde d'urto fluidodinamiche*.

1 – Ipersuperficie di discontinuità

Sia V_4 lo Spazio-tempo della Relatività Generale, dotato di metrica $g^{\alpha\beta}(\alpha,\beta = 0,1,2,3)$ di segnatura $(-,+,+,+)$, con le usuali ipotesi di continuità sulla varietà e sulla metrica (in particolare supponiamo $g^{\alpha\beta} \in C^1$ e C^3 a tratti: cfr. [6] pag.3 e segg.).

In un dominio Ω di V_4, sia data una *ipersuperficie regolare* Σ, definita dall'equazione $f(\mathrm{x}) = 0$, con $f \in C^m(\Omega)$, $m \leq \infty$; Σ divide Ω in due sottodomini Ω^+ ed Ω^- distinti dal segno che in essi assume la funzione f.

Poniamo in ogni punto di Ω (e in particolare su Σ) $\partial_\alpha f = \ell_\alpha$; il *vettore normale* $\boldsymbol{\ell}$ è diverso dal vettore nullo per la regolarità di Σ.

Supponiamo in particolare $\ell_0 \neq 0$.

Definiamo, nel generico punto della superficie $f(\mathrm{x}) = \text{cost}$, le *derivate interne* $\tilde{\partial}_i$ $(i = 1,2,3)$ e quella esterna $\breve{\partial}$ nel modo seguente (cfr. [1]):

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \tilde{\partial}_i = \partial_i - (\ell_i/\ell_0)\partial_0 \\ \breve{\partial} = (1/\ell_0)\partial_0 \end{cases}$$

Se $\psi(E)$ è una funzione di classe di continuità C^m su Ω^+ ed Ω^- separatamente, con $m \geq 1$, possiamo scrivere:

$$\psi(E) = \begin{cases} \psi^+(E) & \text{se} \quad E \in \Omega^+ \\ \psi^-(E) & \text{se} \quad E \in \Omega^-, \end{cases}$$

con $\psi^+ \in C^m(\Omega^+)$ e $\psi^- \in C^m(\Omega^-)$ opportune.

Se inoltre ψ^+ e ψ^- ammettono i limiti ψ_0^+ e ψ_0^- quando il punto E tende a Σ per $f \longrightarrow 0^+$ e per $f \longrightarrow 0^-$ rispettivamente, su Σ è ben definito il *salto o discontinuità* di ψ:

$$[\psi] = \psi_0^+ - \psi_0^- . \tag{1.2}$$

Il salto di ψ è direttamente definito solo su Σ.

Tuttavia se ψ^+ e ψ^- sono *prolungabili* in un intorno U di Σ in *modo regolare*, cioè possono essere interpretate come le restrizioni, ad U^+ e ad U^-, di due opportune funzioni di classe $C^m(U)$, allora $[\psi]$ potrà essere definito in tutto U in modo da essere ivi continuo e derivabile: $[\psi] \in C^m(U)$.

In questo caso ψ si dirà una *funzione regolarmente discontinua* su Σ (cfr. [1]).

Se ψ è di tal tipo, si ha che le derivate di $[\psi]$ (e $[\psi]$ stesso) assumono su Σ valori indipendenti dal prolungamento scelto, e, sempre su Σ, risulta:

$$\partial_\alpha[\psi] = [\partial_\alpha\psi] .$$

Chiameremo: *discontinuità "infinitesima" di grado n* di ψ la quantità:

$$\partial^n\psi = [\breve{\partial}^n\psi] ; \tag{1.3}$$

definita per funzioni ψ con $\breve{\partial}^n\psi$ regolarmente discontinua. Naturalmente $\partial^0\psi = [\psi]$ e $\partial^1\psi = \partial\psi$.

Il salto della derivata n-esima di ψ è legato tramite le *condizioni geometriche di compatibilità* (cfr. [1]), alle sue discontinuità infinitesime fino al grado n; ad esempio:

$$[\partial_\alpha\psi] = \tilde{\partial}_\alpha[\psi] + \partial\psi\ell_\alpha \tag{1.4}$$

$$[\partial_\alpha\partial_\beta\psi] = \tilde{\partial}_\alpha\tilde{\partial}_\beta[\psi] + \tilde{\partial}_\alpha(\partial\psi)\ell_\beta + \tilde{\partial}_\beta(\partial\psi)\ell_\alpha + \partial\psi\ell_{\alpha\beta} + \partial^2\psi\ell_\alpha\ell_\beta \tag{1.5}$$

Le precedenti condizioni possono essere ricavate decomponendo la derivazione ordinaria secondo quelle interne ed esterne come da (1.1), ([1]), oppure, per altra via, ([10], [12]), introducendo la distribuzione associata a Σ, detta *misura di Dirac* di Σ. Si può notare in esse l'intervento del vettore $\boldsymbol{\ell}$ normale a Σ.

Se invece ψ è un vettore regolarmente discontinuo su Σ, e in U vale una equazione di conservazione del tipo:

$$\nabla_\alpha \psi^\alpha + \varphi = 0\,,$$

allora vale [2] la condizione d'urto di Rankine-Hugoniot:

$$[\psi^\alpha]\ell_\alpha = 0\,. \tag{1.6}$$

2 – Salto del tesore di Ricci

Le *equazioni gravitazionali* di Einstein, che esamineremo più avanti, esprimono l'influenza reciproca tra la metrica di V_4 e la distribuzione di energia presente nello Spazio-tempo stesso. In esse la metrica è riassunta dal *tensore di Ricci* $R_{\alpha\rho}$:

$$R_{\alpha\rho} = R_{\alpha\sigma\rho}{}^{\sigma} \tag{2.1}$$

dove $R_{\alpha\beta\rho}{}^{\sigma}$ è il *tensore di curvatura* di V_4:

$$R_{\alpha\beta\rho}{}^{\sigma} = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\rho}{}^{\sigma} - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\sigma} + \Gamma_{\beta\rho}{}^{\nu}\Gamma_{\alpha\nu}{}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\nu}\Gamma_{\beta\nu}{}^{\sigma} \tag{2.2}$$

costruito mediante i coefficienti della connessione riemanniana di V_4, o *simboli di Christoffel*:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\sigma} = g^{\nu\sigma}\Gamma_{\alpha\beta\nu} = g^{\nu\sigma}(1/2)\Big(\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}\Big) \tag{2.3}$$

Essendo $g^{\alpha\beta} \in C^1$ e C^3 a tratti, la metrica è C^2 a tratti e i coefficienti della connessione sono C^0. Se $R_{\alpha\rho}$ è regolarmente discontinuo su di una ipersuperficie Σ, questa è il fronte di *un'onda gravitazionale*. In tal caso sono discontinue le derivate seconde dei coefficienti della metrica, che sono quelle di ordine massimo comparenti nelle equazioni gravitazionali. Per tale motivo l'onda è detta di *tipo ordinario o di accelerazione*. Se (in altre ipotesi) si avesse la discontinuità delle derivate prime dei coefficienti della metrica, o dei coefficienti stessi, l'onda sarebbe detta *onda d'urto* gravitazionale.

Nel caso ordinario il salto di $R_{\alpha\rho}$ si scrive:

$$\left[R_{\alpha\rho}\right] = \left[\partial_\alpha \Gamma^\sigma_{\sigma\rho} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\alpha\rho}\right]. \tag{2.4}$$

Sviluppando le derivate dei simboli di Christoffel come dalla (2.3), per le ipotesi di continuità fatte si ha:

(2.5)

$$\begin{aligned}[R_{\alpha\rho}] &= \left[\partial_\alpha \Gamma_{\sigma\rho\nu} - \partial_\sigma \Gamma_{\alpha\rho\nu}\right] g^{\nu\sigma} = \\ &= (g^{\nu\sigma}/2)\left[\partial_\alpha\partial_\sigma g_{\rho\nu} + \partial_\alpha\partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\alpha\partial_\nu g_{\sigma\rho} - \partial_\sigma\partial_\alpha g_{\rho\nu} - \partial_\sigma\partial_\rho g_{\nu\alpha} + \partial_\sigma\partial_\nu g_{\alpha\rho}\right]\end{aligned}$$

e applicando le condizioni di compatibilità (1.5) alla formula precedente, ricordando che il salto di $g_{\alpha\beta}$ e la sua discontinuità infinitesima di grado uno $\partial g_{\alpha\beta}$ sono nulli, si ottiene:

$$[R_{\alpha\rho}] = (g^{\nu\sigma}/2)\left\{\ell_\alpha \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\sigma} - \ell_\alpha \ell_\nu \partial^2 g_{\sigma\rho} - \ell_\sigma \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\alpha} + \ell_\sigma \ell_\nu \partial^2 g_{\alpha\rho}\right\} \tag{2.6}$$

cioè anche:

$$\begin{aligned}[R_{\alpha\rho}] =& (1/2)\left\{\ell_\alpha \ell_\rho (g^{\nu\sigma} \partial^2 g_{\nu\sigma}) - \ell_\alpha \ell^\sigma \partial^2 g_{\sigma\rho} - \ell^\nu \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\alpha} + \right. \\ & \left. + (\ell^\nu \ell_\nu) \partial^2 g_{\alpha\rho}\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Se f è abbastanza regolare, in particolare $f \in C^3$, la (2.7) si può semplificare. Infatti in tal caso $\ell_\alpha \in C^2$ e quindi $\partial^2 \ell_\alpha = 0$; allora risulta:

$$\ell_\alpha \ell^\sigma \partial^2 g_{\sigma\rho} = \ell_\alpha \partial^2(\ell_\rho) = 0, \quad \ell^\nu \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\alpha} = \ell_\rho \partial^2(\ell_\alpha) = 0.$$

Si ottiene, dunque:

$$[R_{\alpha\rho}] = (1/2)\left\{\ell_\alpha \ell_\rho (g^{\nu\sigma} \partial^2 g_{\nu\sigma}) + (\ell^\nu \ell_\nu) \partial^2 g_{\alpha\rho}\right\}. \tag{2.8}$$

3 – Decomposizione naturale di $[R_{\alpha\beta}]$ secondo il vettore $\boldsymbol{\ell}$

Grazie al prolungamento regolare di §1, $[R_{\alpha\beta}]$, anziché essere definito solo su Σ, viene a costituire un campo tensoriale doppio e simmetrico, definito nell'intorno U di Σ. Vogliamo decomporlo secondo il vettore $\boldsymbol{\ell}$ e la giacitura normale; la decomposizione ci servirà quando consideremo le equazioni gravitazionali in presenza di un fluido.

A priori sarà:

$$2[R_{\alpha\rho}] = \mathcal{R}_{\alpha\rho} + \mathcal{R}_\alpha \ell_\rho + \mathcal{R}_\rho \ell_\alpha + \mathcal{R}\ell_\alpha \ell_\rho\,, \tag{3.1}$$

con $\mathcal{R}_{\alpha\rho}\ell^\rho = 0$, $\mathcal{R}_\alpha \ell^\alpha = 0$, $\mathcal{R}_{\alpha\rho} = \mathcal{R}_{\rho\alpha}$.

Supponiamo dapprima $\Sigma \in C^3$; vale allora la (2.8):

$$2[R_{\alpha\rho}] = \ell_\alpha \ell_\rho (g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) + (\ell^\nu \ell_\nu)\partial^2 g_{\alpha\rho}\,, \tag{3.2}$$

e pertanto $2[R_{\alpha\rho}]$ è del tipo:

$$2[R_{\alpha\rho}] = \mathcal{R}_{\alpha\rho} + \mathcal{R}\ell_\alpha \ell_\rho \tag{3.3}$$

con

$$\mathcal{R} = g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}, \quad \mathcal{R}_\alpha = 0, \quad \mathcal{R}_{\alpha\rho} = (\ell_\nu \ell^\nu)\partial^2 g_{\alpha\rho}\,. \tag{3.4}$$

Partendo invece dalla (2.7), (senza cioè supporre Σ più che C^2), si deve intendere:

$$2[R_{\alpha\rho}] = \ell_\alpha \ell_\rho (g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) - \ell_\alpha \ell^\sigma \partial^2 g_{\sigma\rho} - \ell^\nu \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\alpha} + (\ell^\nu \ell_\nu)\partial^2 g_{\alpha\rho} \tag{3.5}$$

da cui i seguenti termini di decomposizione:

$$\begin{cases} \mathcal{R} = \left\{1/(\ell^\alpha \ell_\alpha)^2\right\}\left\{(\ell^\alpha \ell_\alpha)^2 g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma} - (\ell^\alpha \ell_\alpha)\ell^\nu \ell^\sigma \partial^2 g_{\nu\sigma}\right\} \\ \mathcal{R}_\alpha = 0 \\ \mathcal{R}_{\alpha\rho} = (\ell^\sigma \ell_\sigma)\partial^2 g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha \ell^\sigma \partial^2 g_{\sigma\rho} - \ell^\nu \ell_\rho - \ell^\nu \ell_\rho \partial^2 g_{\nu\alpha} + \\ \quad + \left\{1/(\ell^\alpha \ell_\alpha)^2\right\}(\ell^\sigma \ell^\rho \partial^2 g_{\sigma\rho})\ell_\alpha \ell_\rho\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

tenuto conto che risulta:

$$\partial^2 g_{\alpha\rho} = \mathcal{G}_{\alpha\rho} + \mathcal{G}_\alpha \ell_\rho + \mathcal{G}_\rho \ell_\alpha + \mathcal{G}\ell_\alpha \ell_\rho \tag{3.7}$$

con

$$
(3.8) \qquad \begin{cases} \mathcal{G}_{\alpha\rho} = \partial^2 g_{\alpha\rho} - \partial^2 g_{\sigma[\alpha}\ell^\sigma \ell_{\rho]}/\ell^\nu \ell_\nu + \partial^2 g_{\nu\sigma}\ell^\nu \ell^\sigma \ell_\alpha \ell_\rho/(\ell^\nu \ell_\nu)^2 \\ \mathcal{G}_\rho = (\partial^2 g_{\nu\rho}\ell^\nu)/(\ell^\sigma \ell_\sigma) - (\partial^2 g_{\nu\sigma}\ell^\nu \ell^\sigma)\ell_\rho/(\ell^\nu \ell_\nu)^2 \\ \mathcal{G} = (\partial^2 g_{\nu\sigma}\ell^\nu \ell^\sigma)/(\ell^\nu \ell_\nu)^2 \end{cases}
$$

e con

$$
\mathcal{G}_\alpha \ell^\alpha = 0, \quad \mathcal{G}_{\alpha\rho}\ell^\alpha = 0, \quad \mathcal{G}_{\alpha\rho} = \mathcal{G}_{\rho\alpha}\,.
$$

Naturalmente le (3.6) si riducono alle (3.4) quando $\ell_\alpha \in C^2$.

4 – Il fluido

Consideriamo ora, nel dominio Ω di V_4, un *fluido perfetto*; esso è descritto dal campo di versori del genere tempo $\mathbf{u}$ tangenti alle linee orarie delle particelle del fluido (*riferimento di quiete* per il fluido o *riferimento proprio*), e dal suo tensore energetico $T_{\alpha\rho}$. Quest'ultimo può essere messo nella forma seguente (per la (4.1), e per il seguito del §, si vedano [8], [10], [12], [13]; facendo attenzione alle differenze dovute alla diversa convenzione circa la segnatura dello Spazio-tempo):

$$
(4.1) \qquad T_{\alpha\beta} = c^2 r f u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}
$$

Nella (4.1) figurano le seguenti *variabili termodinamiche*:
r *densità di pura materia*,
f *indice del fluido*,
p *pressione propria*, relative al fluido.

Altre variabili termodinamiche significative, sono:
ρ *densità di energia propria*,
ε *densità di energia interna specifica*,
Θ *temperatura propria*,
i *entalpia specifica*,
S *entropia specifica*, relative al fluido.

Fra le variabili sopra introdotte sussistono i seguenti legami:

$$
(4.2) \qquad \rho = c^2 r(1 + \varepsilon/c^2), \quad i = \varepsilon + p/r, \quad f = 1 + i/c^2\,.
$$

La validità del *primo principio della termodinamica* (che fornisce due ulteriori legami) e la conoscenza di una *equazione di stato* del fuido assicurano che *solo due delle variabili termodinamiche*, per esempio p ed S, sono *indipendenti*.

Sia data in Ω, come in precedenza, un'ipersuperficie regolare Σ. Il versore $\mathbf{u}$ avrà un *componente* $\mathbf{v}$ *tangente* a Σ, cioè tale che $v^\alpha \ell_\alpha = 0$, ed un *componente normale*; pertanto potrà essere scritto nel modo seguente:

$$u^\beta = v^\beta + (u^\alpha \ell_\alpha / \ell^\nu \ell_\nu) \ell^\beta \,. \tag{4.3}$$

Nel caso in cui il *fluido sia carico*, saranno presenti, nell'espressione di $T_{\alpha\beta}$, anche i vettori spaziali *campo elettrico* $\mathbf{e}$ e *campo magnetico* $\mathbf{h}$, nonché l'*induzione magnetica* $\mathbf{b}$ e *l'induzione elettrica* $\mathbf{d}$.

Nella teoria di Maxwell le induzioni dipendono dal campo secondo le *equazioni costitutive* separate:

$$\mathbf{d} = \lambda \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mu \mathbf{h} \tag{4.4}$$

dove λ e μ sono generalmente due omografie spaziali.

Nelle *equazioni di Maxwell*, che governano l'elettromagnetismo, compare il vettore *corrente elettrica* $\mathbf{J}$, composto da un termine di *convezione* più uno di *conduzione* nel modo seguente:

$$J^\beta = \varepsilon u^\beta + \sigma e^\beta \,, \tag{4.5}$$

dove ε è la *densità propria di carica elettrica* e σ la *conduttività del mezzo*.

Come nella bibliografia succitata noi supporremo che il *fluido perfetto* sia *isotropo e di conduttività infinita*, con che λ e μ sono due costanti positive date, e inoltre $\mathbf{e} = \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Questo caso, di interesse astrofisico, è detto anche della *magnetofluidodinamica perfetta*, in quanto il campo elettromagnetico si riduce, *relativamente* ad $\mathbf{u}$, alla sua sola parte magnetica. In questo caso il tensore energetico si scrive:

$$T_{\alpha\beta} = \mathcal{F} u_\alpha u_\beta + q g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \,, \tag{4.6}$$

dove:

$$\mathcal{F} = c^2 r f + \mu |\mathbf{h}|^2 \,; \quad q = p + (\mu/2)|\mathbf{h}|^2 \,. \tag{4.7}$$

Naturalmente, se $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ la (4.6) si riduce alla (4.1).

Anche il vettore **h**, come **u**, avrà un componente **t** tangente a Σ e un componente parallelo ad $\boldsymbol{\ell}$:

$$h^\beta = t^\beta + (h^\alpha \ell_\alpha / \ell^\sigma \ell_\sigma)\ell^\beta \,, \tag{4.8}$$

con $t^\alpha \ell_\alpha = 0$.

Sia nel caso fluidodinamico, in cui $T_{\alpha\beta}$ è espresso dalla (4.1), che in quello magnetofluidodinamico, in cui invece la sua espressione è la (4.6), per quanto riguarda lo scalare $T = T^\alpha_\alpha$ risulta:

$$T = -c^2 r f + 4p\,; \tag{4.9}$$

esso cioè dipende solo dalle variabili termodinamiche.

5 – Richiami sulle onde della Magnetofluidodinamica

Vogliamo qui richiamare brevemente i principali risultati riguardanti le onde di discontinuità della magnetofluidodinamica relativistica, allo scopo di esaminarne poi le possibilità di "accoppiamento" con le onde gravitazionali.

Per una trattazione completa, rimandiamo a [10], [12], nonché [7], [8], [9], ed [11], ricordando che in essi si fa uso di una diversa convenzione circa la segnatura di V_4.

Il sistema di equazioni differenziali che governano il fluido carico è composto dall'*equazione di conservazione della densità di materia*:

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0 \,, \tag{5.1}$$

dalle *equazioni di Maxwell*:

$$\nabla_\alpha (u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha) = 0 \,, \tag{5.2}$$

e dalle *equazioni della dinamica relativistica*:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \,. \tag{5.3}$$

In questo sistema, in cui la metrica figura come un dato, l'ordine massimo delle derivate delle variabili fisiche del fluido $(p, S, u^\alpha, h^\alpha)$ è uno.

Chiameremo quindi *onde ordinarie* di discontinuità le ipersuperficie Σ portatrici di discontinuità infinitesime di ordine uno, *onde d'urto* quelle portatrici di discontinuità per le variabili stesse.

Si dimostra che si hanno i tre tipi seguenti di *onde ordinarie*:

onde di materia, portatrici della discontinuità ∂S (nel senso che su esse $\partial S \neq 0$);

onde magneto-acustiche, portatrici delle discontinuità ∂p, e di quelle dei componenti di $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{h}$ normali a Σ, cioè $\ell_\alpha \partial u^\alpha$ e $\ell_\alpha \partial h^\alpha$;

onde di Alfven, portatrici di discontinuità per le sole componenti tangenti a Σ di $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{h}$: v^α e t^α, tali che $\partial|\mathbf{h}|^2 = 0$, e caratterizzate dall'equazione:

$$\mathcal{F}(u^\alpha \ell_\alpha)^2 - \mu(h^\alpha \ell_\alpha)^2 = 0\,. \tag{5.4}$$

Nel caso della *fluidodinamica* ($\mathbf{h} = \mathbf{0}$) si hanno ancora le *onde di materia*, mentre le onde magneto-acustiche si riducono alle *onde acustiche*, portatrici delle discontinuità ∂p e ∂u^α. Scompaiono le onde di Alfven, in quanto $\partial v^\alpha \neq 0$ può aversi in entrambi i precedenti casi.

La *velocità propria di avanzamento* (locale) di un'onda ordinaria Σ è data dalla formula generale:

$$v^2/c^2 = (u^\alpha \ell_\alpha)^2 / \{(u^\alpha \ell_\alpha)^2 + \ell_\alpha \ell^\alpha\}\,; \tag{5.5}$$

da cui segue che, affinché tale velocità sia ammissibile dal punto di vista relativistico, deve essere

$$\ell_\alpha \ell^\alpha > 0\,, \tag{5.6}$$

cioè $\boldsymbol{\ell}$ *deve essere del genere spazio.*

Per quanto riguarda le *onde d'urto*, similmente a quanto avveniva per le onde ordinarie, si hanno:

onde d'urto tangenti (alla direzione temporale $\mathbf{u}$), su cui $[S] \neq 0$;

onde d'urto di compressione (a loro volta distinte in *lente e voloci* in base alle loro proprietà di propagazione), portatrici di discontinuità per le variabili termodinamiche e per i componenti di $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{h}$ normali a Σ;

onde d'urto di Alfven, su cui $[\mathbf{v}] \neq 0$, $[\mathbf{t}] \neq \mathbf{0}$ ma $[|\mathbf{h}|^2] = 0$; le variabili termodinamiche sono continue, e inoltre, essendo soddisfatta la (5.4) nell'intorno di Σ, vale l'equazione:

$$\mathcal{F}\Big[(u^\alpha \ell_\alpha)^2\Big] - \mu\Big[(h^\alpha \ell_\alpha)^2\Big] = 0 . \tag{5.7}$$

Quest'ultima equazione è caratteristica delle onde d'urto di Alfven, in quanto si dimostra ([7], [10]) che se la (5.7) è verificata senza la (5.4), l'onda in questione (*onda d'urto singolare*) non ha significato fisico.

Nel caso della *fluidodinamica* permangono le *onde d'urto tangenti*, e quelle di *compressione*, che però si riducono ad un unico tipo. Scompaiono ancora quelle di Alfven.

Si dimostra che per un'onda d'urto vale necessariamente la (5.6), cioè le *onde d'urto della magnetofluidodinamica hanno normale del genere spazio*.

Se si ha $[T_{\alpha\beta}] \neq 0$, segue da (4.1) o (4.6) che siamo in presenza di un'onda d'urto; poiché inoltre valgono le (5.3), risulta, dalla condizione d'urto (1.6):

$$[T^{\alpha\rho}]\ell_\rho = 0 . \tag{5.8}$$

6 – Equazioni gravitazionali - onde gravitazionali

Se $T_{\alpha\rho}$ è il tensore simmetrico che riassume la distribuzione di energia nel dominio Ω di V_4, le equazioni gravitazionali si scrivono [6]:

$$R_{\alpha\rho} - (1/2)Rg_{\alpha\rho} = -\chi T_{\alpha\rho} , \tag{6.1}$$

dove $R = R^\alpha_\alpha = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$ è lo scalare di curvatura; o equivalentemente:

$$R_{\alpha\rho} = -\chi\Big\{T_{\alpha\rho} - (1/2)Tg_{\alpha\rho}\Big\} , \tag{6.2}$$

essendo, dalla (6.1),

$$R = \chi T \tag{6.3}$$

(dove $T = T^\alpha_\alpha = T_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$).

Nel *caso del vuoto*, le (6.2) si riducono alla forma:

$$R_{\alpha\rho} = 0\,. \tag{6.4}$$

Sia allora $\Sigma \in C^3$ un'ipersuperficie di discontinuità per le derivate seconde della metrica (fronte d'onda gravitazionale), da (2.8) e (6.4) si ha direttamente:

$$2[R_{\alpha\rho}] = \ell_\alpha \ell_\rho (g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) + (\ell^\nu \ell_\nu)\partial^2 g_{\alpha\rho} = 0\,. \tag{6.5}$$

Moltiplicando per $g^{\alpha\rho}$ otteniamo la condizione:

$$[R] = (\ell_\alpha \ell^\alpha)(g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) = 0\,. \tag{6.6}$$

La (6.6) ci dice che o si ha $(\ell^\alpha \ell_\alpha) = 0$, oppure risulta $(g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) = 0$. Ma in quest'ultimo caso si ottiene dalla (6.5): $(\ell^\nu \ell_\nu)\partial^2 g_{\alpha\rho} = 0$, da cui ancora:

$$(\ell^\alpha \ell_\alpha) = 0\,. \tag{6.7}$$

Concludiamo allora che le *onde gravitaizonali nel vuoto hanno normale nulla*, cioè sono tangenti, punto per punto, al cono luce, risultato peraltro ben noto, solitamente ottenuto per altra via (facendo ricorso a coordinate armoniche, cfr. [5], [6], [8]).

Consideriamo ora il *caso generale*, in cui, nel dominio considerato, vi sia una distribuzione di energia non nulla $T_{\alpha\beta}$ (inclusa quella dovuta alla presenza di materia).

Se $[T_{\alpha\beta}] = 0$, si ha per la (6.3) che anche $[R] = 0$, e dalla (6.1) si ha, come nel caso del vuoto:

$$[R_{\alpha\beta}] = 0\,;$$

per cui le onde gravitazionali hanno anche in questo caso normale del genere luce.

Non vi è perciò alcun accoppiamento fra onde gravitazionali ed onde ordinarie della magnetofluidodinamica, (per le quali appunto $[T_{\alpha\beta}] = 0$), in quanto per le prime vale la (6.7), mentre per le seconde vale la (5.6).

Cosa accade se invece su Σ è $[T_{\alpha\beta}] \neq 0$, cioè se siamo in presenza di un'onda d'urto della magnetofluidodinamica? Un'onda gravitazionale non potrà più avere, in questo caso, normale del genere luce, perché, come detto nel §precedente, le onde d'urto della M.F.D. hanno necessariamente normale del genere spazio.

Per studiare, se esistono, le onde di accoppiamento, dobbiamo supporre allora che per Σ valga la (5.6):

$$\ell^\alpha \ell_\alpha > 0\,. \tag{5.6}$$

Per proseguire il nostro studio, decomporremo secondo ℓ anche $[T_{\alpha\beta}]$, (come abbiamo fatto per $[R_{\alpha\beta}]$ nel §3); potremo così "spezzare" le equazioni gravitazionali, dopo averle scritte in funzione dei salti.

7 – Discontinuità del tensore energetico

Consideriamo l'espressione (4.6) del tensore energetico $T_{\alpha\beta}$; si ha innanzitutto:

$$[T_{\alpha\rho}] = [\mathcal{F} u_\alpha u_\rho] + [q] g_{\alpha\rho} - \mu [h_\alpha h_\rho]\,. \tag{7.1}$$

Vogiamo decomporre il tensore $[T_{\alpha\rho}]$ secondo il vettore ℓ e la giacitura normale; a priori, sarà:

$$[T_{\alpha\rho}] = \mathcal{I}_{\alpha\rho} + \mathcal{I}_\alpha \ell_\rho + \mathcal{I}_\rho \ell_\alpha + \mathcal{I} \ell_\alpha \ell_\rho\,, \tag{7.2}$$

con $\mathcal{I}_{\alpha\rho}\ell^\alpha = 0$, $\mathcal{I}_\alpha \ell^\alpha = 0$, $\mathcal{I}_{\alpha\rho} = \mathcal{I}_{\rho\alpha}$.

Moltiplicando la (7.2) prima per $\ell^\alpha \ell^\rho$ e poi per ℓ^ρ, e ricordando la (5.8), si ottiene rispettivamente:

$$[T_{\alpha\rho}]\ell^\alpha \ell^\rho = \mathcal{I}(\ell^\alpha \ell_\alpha)^2 = 0, \quad \text{da cui} \quad \mathcal{I} = 0\,,$$
$$[T_{\alpha\rho}]\ell^\rho = \mathcal{I}_\alpha(\ell^\rho \ell_\rho) + \mathcal{I}(\ell^\rho \ell_\rho)\ell_\alpha, \quad \text{da cui anche} \quad \mathcal{I}_\alpha = 0\,;$$

se ne ricava:

$$[T_{\alpha\rho}] = \mathcal{I}_{\alpha\rho}\,. \tag{7.3}$$

Ciò posto, mettiamo in evidenza alcune *conseguenze della condizione d'urto* (5.8).

Moltiplicando la (7.1) per $\ell^\alpha \ell^\rho$, si ha immediatamente:

$$\left[\mathcal{F}(u^\alpha \ell_\alpha)^2\right] + [q](\ell^\alpha \ell_\alpha) - \mu\left[(h_\alpha \ell^\alpha)^2\right] = 0 . \tag{7.4}$$

Moltiplicando invece per ℓ^ρ, si ottiene:

$$\left[\mathcal{F}u_\alpha(u^\rho \ell_\rho)\right] + [q]\ell_\alpha - \mu\left[h_\alpha(h_\rho \ell^\rho)\right] = 0 ;$$

di qui, sostituendo u_α ed h_α con le loro espressioni (4.3) e (4.8), e sfruttando la (7.4), risulta:

$$\left[\mathcal{F}v_\alpha(u^\rho \ell_\rho)\right] - \mu\left[t_\alpha(h_\rho \ell^\rho)\right] = 0 . \tag{7.5}$$

Le due equazioni (7.4) e (7.5) sono utili per ricavare l'espressione cercata di $[T_{\alpha\rho}]$.

Infatti, da (4.3) e (4.8) risulta la seguente decomposizione naturale dei prodotti $u_\alpha u_\rho$ e $h_\alpha h_\rho$:

(7.6)
$$\begin{cases} u_\alpha u_\rho = v_\alpha v_\rho + (u^\sigma \ell_\sigma / \ell^\nu \ell_\nu)(v_\alpha \ell_\rho + \ell_\alpha v_\rho) + \left\{(u^\sigma \ell_\alpha)^2/(\ell^\nu \ell_\nu)^2\right\}\ell_\alpha \ell_\rho \\ h_\alpha h_\rho = t_\alpha t_\rho + (h^\sigma \ell_\sigma / \ell^\nu \ell_\nu)(t_\alpha \ell_\rho + \ell_\alpha t_\rho) + \left\{(h^\sigma \ell_\alpha)^2/(\ell^\nu \ell_\nu)^2\right\}\ell_\alpha \ell_\rho ; \end{cases}$$

di qui, sostituendo nella (7.1), e poi utilizzando appunto (7.4) e (7.5), si ricava infine:

$$[T_{\alpha\rho}] = [\mathcal{F}v_\alpha v_\rho] + [q]g_{\alpha\rho} - \mu[t_\alpha t_\rho] - \left\{[q]/(\ell^\nu \ell_\nu)\right\}\ell_\alpha \ell_\rho . \tag{7.7}$$

Poiché $v_\alpha \ell^\alpha = t_\alpha \ell^\alpha = 0$, l'espressione precedente permette riconoscere a vista la validità della condizione d'urto (5.8).

8 – Equazioni gravitazionali e decomposizione dei salti

Veniamo ora allo "spezzamento" delle equazioni gravitazionali.

Dalla (6.1), se Σ è contemporaneamente un'onda gravitazionale ed un'onda d'urto magnetofluidodinamica, si ottiene, per i salti:

$$2[R_{\alpha\rho}] - [R]g_{\alpha\rho} = -2\chi[T_{\alpha\rho}] , \tag{8.1}$$

da cui, per la (6.3):

$$2[R_{\alpha\rho}] = -2\chi[T_{\alpha\rho}] + \chi[T]g_{\alpha\rho}\,. \tag{8.2}$$

Volendo decomporre in modo naturale (secondo $\boldsymbol{\ell}$ e la giacitura normale) l'espressione precedente, notiamo innanzitutto che

$$g_{\alpha\rho} = (g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\nu\ell_\nu) + \ell_\alpha\ell_\rho/\ell_\nu\ell^\nu\,, \tag{8.3}$$

con $(g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\nu\ell_\nu)\ell^\rho = 0$. Sostituiamo allora la (3.3), la (7.3) e la (8.3) nella (8.2); si ha direttamente:

$$\mathcal{R}_{\alpha\rho} + \mathcal{R}\ell_\alpha\ell_\rho = -2\chi\mathcal{I}_{\alpha\rho} + \chi[T]\Big\{(g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\nu\ell_\nu) + \ell_\alpha\ell_\rho/\ell_\nu\ell^\nu\Big\}\,. \tag{8.4}$$

Se si moltiplica la formula precedente per ℓ^α, si ottiene l'equazione scalare:

$$\mathcal{R} = \chi[T]/(\ell^\alpha\ell_\alpha)\,, \tag{8.5}$$

nonché l'espressione di $\mathcal{R}_{\alpha\rho}$:

$$\mathcal{R}_{\alpha\rho} = -2\chi\mathcal{I}_{\alpha\rho} + \chi[T](g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\nu\ell_\nu)\,. \tag{8.6}$$

A questo punto, utilizziamo la (3.4) e la (7.7); si ricava alfine il seguente *sistema*, che potremmo chiamare *dell'accoppiamento*:

$$\begin{cases} (\ell^\alpha\ell_\alpha)(g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) = \chi[T] \\ (\ell^\sigma\ell_\sigma)\partial^2 g_{\alpha\rho} = -2\chi\Big\{[\mathcal{F}v_\alpha v_\rho] + [q]g_{\alpha\rho} - \mu[t_\alpha t_\rho] - [q]\ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\sigma\ell_\sigma\Big\} + \\ \qquad +\chi[T](g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha\ell_\rho/\ell^\nu\ell_\nu)\,. \end{cases} \tag{8.7}$$

9 – Onde gravitazionali e onde di Alfven

Arriviamo finalmente allo studio delle onde di accoppiamento: gravitazionali, e d'urto per il fluido.

Dalla $(8.7)_2$, moltiplicando per $(\ell^\sigma\ell_\sigma)$ si ha innanzitutto:

$$\begin{aligned} (\ell^\sigma\ell_\sigma)^2\partial^2 g_{\alpha\rho} = &- 2\chi\Big\{[\mathcal{F}v_\alpha v_\rho] - \mu[t_\alpha t_\rho]\Big\}(\ell^\sigma\ell_\sigma) + \\ &- 2\chi\Big\{[q] - (1/2)[T]\Big\}\Big\{g_{\alpha\rho}(\ell^\sigma\ell_\sigma) - \ell_\alpha\ell_\rho\Big\}\,, \end{aligned} \tag{9.1}$$

e da $(4.7)_2$ e (4.9) si ha:

$$[q]-(1/2)[T]=[q-(1/2)T]=[(1/2)\mathcal{F}-p]\,. \tag{9.2}$$

Sostituendo la (9.2) nella (9.1), e moltiplicando per $g^{\alpha\rho}$ si ottiene:

$$\begin{aligned}(\ell^\sigma\ell_\sigma)^2(g^{\alpha\rho}\partial^2 g_{\alpha\rho}) = &-2\chi\Big\{[\mathcal{F}v_\alpha v^\alpha]-\mu[t_\alpha t^\alpha]\Big\}(\ell^\sigma\ell_\sigma)+\\ &-2\chi\Big[(1/2)\mathcal{F}-p\Big]3(\ell^\sigma\ell_\sigma)\,.\end{aligned} \tag{9.3}$$

D'altra parte, da (4.3) e (4.8) si ricava facilmente:

$$\begin{cases} v_\alpha v^\alpha = -1-(u^\alpha\ell_\alpha)^2/\ell^\sigma\ell_\sigma \\ t_\alpha t^\alpha = -1-(h^\alpha\ell_\alpha)/\ell^\sigma\ell_\sigma\,; \end{cases} \tag{9.4}$$

pertanto la (9.3) diventa:

$$\begin{aligned}&(\ell^\sigma\ell_\sigma)^2(g^{\alpha\rho}\partial^2 g_{\alpha\rho}) =\\ &=-2\chi\Big\{-[\mathcal{F}]-[\mathcal{F}(u^\alpha\ell_\alpha)^2]/\ell^\sigma\ell_\sigma+\mu[(h_\alpha\ell^\alpha)^2]/\ell^\sigma\ell_\sigma\Big\}(\ell^\sigma\ell_\sigma)+\\ &-6\chi[(1/2)\mathcal{F}-p](\ell^\alpha\ell_\alpha)\,.\end{aligned}$$

Per la $(8.7)_1$, il primo membro della formula precedente vale $(\ell^\alpha\ell_\alpha)\chi[T]$; pertanto possiamo elidere $\chi\neq 0$, ottenendo:

$$\begin{aligned}(\ell^\alpha\ell_\alpha)[T] =&2[\mathcal{F}](\ell^\alpha\ell_\alpha)+2\Big\{[\mathcal{F}(u^\alpha\ell_\alpha)^2]-\mu[(h_\alpha\ell^\alpha)^2]\Big\}+\\ &-6[(1/2)\mathcal{F}-p](\ell^\alpha\ell_\alpha)\,.\end{aligned}$$

Dalla (9.6) e dalla (7.4) si ha ancora:

$$(\ell^\alpha\ell_\alpha)[T]=2[\mathcal{F}](\ell^\alpha\ell_\alpha)-2[q](\ell^\alpha\ell_\alpha)-6[(1/2)\mathcal{F}-p](\ell^\alpha\ell_\alpha);$$

poiché vale la (5.6), si ha in particolare $\ell^\alpha\ell_\alpha\neq 0$, e pertanto deve essere:

$$[T]=2[\mathcal{F}]-2[q]-6[(1/2)\mathcal{F}-p]\,. \tag{9.7}$$

Ricordando (4.7) e (4.9), dalla (9.7) risulta infine:

$$[4p-c^2rf]=6[p]-2[p+(1/2)\mu|\mathbf{h}|^2]-[c^2rf+\mu|\mathbf{h}|^2]\,,$$

cioè:

$$[4p - c^2 rf] = [4p - c^2 rf - 2\mu|\mathbf{h}|^2] \tag{9.8}$$

da cui:

$$[|\mathbf{h}|^2] = 0\,. \tag{9.9}$$

Dalla (9.9) si conclude che l'accoppiamento di onde d'urto magnetofluidodinamiche e onde ordinarie di discontinuità per la metrica dello Spazio-tempo è possibile solo nel *caso banale* (onda d'urto fluidodinamica: $\mathbf{h} = 0$), oppure in quello di *Alfven* (si veda in proposito il §5).

Come sono fatte le onde di accoppiamento? Si tratta per esempio di particolari onde d'urto di Alfven, le quali soddisfano il sistema dell'accoppiamento (8.7). Vediamo allora che aspetto assume tale sistema nel caso di Alfven.

Poiché in tal caso le variabili termodinamiche sono continue, si avrà $[T] = [q] = [\mathcal{F}] = 0$, da cui:

$$\begin{cases} (\ell^\alpha \ell_\alpha)(g^{\nu\alpha}\partial^2 g_{\nu\sigma}) = 0 \\ (\ell^\sigma \ell_\sigma)\partial^2 g_{\alpha\rho} = -2\chi\Big\{\mathcal{F}[v_\alpha v_\rho] - \mu[t_\alpha t_\rho]\Big\}\,. \end{cases} \tag{9.10}$$

Sappiamo che è $(\ell^\alpha \ell_\alpha) \neq 0$, perciò la $(9.10)_1$ equivale alla condizione:

$$g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma} = 0\,. \tag{9.11}$$

Inoltre, la $(9.10)_1$ stessa è, nel caso di Alfven, conseguenza della $(9.10)_2$. Infatti, moltiplicando quest'ultima per $g^{\alpha\rho}$ si ottiene:

$$(\ell^\sigma \ell_\sigma) g^{\alpha\rho}\partial^2 g_{\alpha\rho} = -2\chi\Big\{\mathcal{F}[v_\alpha v^\alpha] - \mu[t_\alpha t^\alpha]\Big\} = 0\,,$$

da cui, per le (9.4):

$$(\ell^\sigma \ell_\sigma) g^{\alpha\rho}\partial^2 g_{\alpha\rho} = \Big\{[\mathcal{F}(u^\alpha \ell_\alpha)^2] - [(h^\alpha \ell_\alpha)]\Big\}/\ell^\sigma \ell_\sigma\,.$$

Infine, per la (5.7), si ritrova la $(9.10)_1$, cioè anche la (9.11).
Potremmo allora chiamare la $(9.10)_2$ *equazione delle onde gravitazionali di Alfven.*

Nel caso fluidodinamico il sistema (8.7) assume invece la forma:

$$(9.12)\qquad \begin{cases} (\ell^\alpha \ell_\alpha)(g^{\nu\sigma}\partial^2 g_{\nu\sigma}) = \chi[T] \\ (\ell^\sigma \ell_\sigma)\partial^2 g_{\alpha\rho} = -2\chi\Big\{[c^2 r f v_\alpha v_\rho] + [p] g_{\alpha\rho} - [p]\ell_\alpha \ell_\rho/\ell^\sigma \ell_\sigma\Big\} + \\ \qquad +\chi[T](g_{\alpha\rho} - \ell_\alpha \ell_\rho/\ell^\nu \ell_\nu)\,. \end{cases}$$

Moltiplicando la $(9.12)_2$ per $g^{\alpha\rho}$ si ottiene:

$$(\ell^\sigma \ell_\sigma)(g^{\alpha\rho}\partial^2 g_{\alpha\rho}) = -2\chi\Big\{[c^2 r f(v_\alpha v^\alpha)] + 3[p]\Big\} + 3\chi[T]\,,$$

da cui, per la $(9.12)_1$:

$$[T] = -2[c^2 r f(v_\alpha v^\alpha)] - 6[p] + 3[T]\,;$$

Per la (4.9), risulta dunque: $-[c^2 r f v_\alpha v^\alpha] + [p - c^2 r f] = 0$, ed infine, dalla $(9.4)_1$:

$$(9.13)\qquad [c^2 r f(u_\alpha \ell^\alpha)^2/(\ell^\alpha \ell_\alpha) + p] = 0\,.$$

Quest'ultima equazione fa le veci, nel caso fluidodinamico, della (5.7) in quello di Alfven, nel senso che, se vale la (9.13), è facile verificare che la $(9.12)_2$ implica la $(9.12)_1$.

Potremmo perciò chiamare la (9.13) *equazione delle onde fluidodinamiche accoppiabili*, e la $(9.12)_2$ *equazione delle onde gravitazionali fluidodinamiche.*

Abbiamo quindi determinato le possibili onde di accoppiamento fra onde ordinarie di discontinuità per la metrica $g_{\alpha\rho}$ e onde d'urto magnetofluidodinamiche, ricavando inoltre le due equazioni [$(9.10)_2$ e $(9.12)_2$] che le caratterizzano, assieme con la specificazione della natura (fluidodinamica accoppiabile, o di Alfven) di tali onde.

In questa sede non ci siamo posti il problema dell'esistenza; idem resta ancora da studiare l'accoppiamento fra onde d'urto gravitazionali e onde d'urto magnetofluidodinamiche.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CATTANEO: *Funzioni regolarmente discontinue attraverso una ipersuperficie: formula generale di compatibilità geometrica*, Rend. Sc. Istituto Lombardo, A 112, 139-149, Milano (1978).

[2] C. CATTANEO: *Elementi di teoria della propagazione ondosa*, Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 20 Pitagora Editrice, Bologna (1981).

[3] G. FERRARESE: *Introduzione alla dinamica riemanniana dei sistemi continui*, Vol. 1, Pitagora Editrice, Bologna (1981).

[4] G. FERRARESE: *Lezioni di Meccanica relativistica*, Vol. 1, Pitagora Editrice, Bologna (1985).

[5] V. FOCK: *The theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, Oxford-London-New York (1964).

[6] A. LICHNEROWICZ: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris (1955).

[7] A. LICHNEROWICZ: *Ondes de choc en magnétohydrodynamique relativiste*, Ann. Inst. Henry Poincaré, V, 37-75 (1966).

[8] A. LICHNEROWICZ: *Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics, lectures on the existence of solutions*, W.A. Benjamin Inc., New York (1967).

[9] A. LICHNEROWICZ: *Ondes de choc et hypothéses de compressibilité en magnétohydrodynamique relativiste*, Commun. math. Phys. XII, 145-174 (1969).

[10] A. LICHNEROWICZ: *Ondes des choc, ondes infinitesimales et rayons en hydrodynamique et magnetohydrodynamique relativistes*, Centr. Int. Matem. Est. 1970, Cremonese, Roma (1971).

[11] A. LICHNEROWICZ: *Shock waves in relativistic magnetohydrodynamics under general assumptions*, J. Math. Phys. Vol. 17, No. 12, 2135-2142 (1976).

[12] A. LICHNEROWICZ: *Magnétohydrodynamique relativiste*, Appunti del corso tenuto all'Università degli studi di Roma presso l'Istituto matematico G. Castelnuovo, Roma (1991).

[13] PHAM-MAU-QUAN: *Magnétohydrodinamique relativiste*, Ann. Inst. Henri Poincaré, II, 151-165 (1965).

Lavoro pervenuto alla redazione il 25 settembre 1992
ed accettato per la pubblicazione il 3 dicembre 1992

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

G. Gemelli - Istituto Matematico G. Castelnuovo - Università degli Studi di Roma "La Sapienza" - Piazzale A. Moro 5 - 00185 Roma.