Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 257-265

Hyperstructures dérivées d'un trellis particulier

M. KONSTANTINIDOU - K. SERAFIMIDIS

RIASSUNTO: *In questo lavoro vengono studiate proprietà di un ipergruppo canonico, costruito tramite un reticolo modulare dotato di zero. Partendo poi da un particolare reticolo, viene costruito un iperanello forte di Boole, un'iperalgebra forte di Boole e un ipergruppo canonico l-ordinato.*

ABSTRACT: *We study certain supplementary properties of a canonical hypergroup constructed by a modular lattice with zero. Then, starting with a particular lattice, we construct a strong Boolean hyperring, a strong Boolean hyperalgebra and a l-ordered canonical hypergroup.*

KEY WORDS: *Lattice - Modular lattice - Complemented lattice - Hypergroup - Hyperring - Boolean hyperalgebra.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 06-16

Dans le travail [8] NACANO a définit et étudié des structures, qui, dans le language des structures hypercompositionelles, constituent quelques sortes des hypergroupes, hyperanneaux et d'autres hyperstructures, qui en plus sont ordonnées, selon une définition donnée par lui même. Il donne aussi des exemples de telles structures, en les construisant à partir d'un treillis particulier possedant un élément maximum.

K. SERAFIMIDIS, en étudiant les hypergroupes canoniques ordonnés [10], a donné la définition suivante:

DÉFINITION 1. *Un hypergroupe canonique* $(H,+)$ *muni d'une rela-*

tion d'ordre $\leq$, s'appelle ordonné si les axiomes suivants sont satisfaits:

1. $a+b$ *est un segment,* $\forall a,\, b \in H$
2. $x \leq y \implies (\forall c \in H)(\forall \xi \in x+c)\ [\exists \eta \in y+c]\ [\xi \leq \eta]$.

Ici, on va utiliser cette définition, bien que dans [6] elle soit généralisée en enlevant l'axiome 1.

St. Comer [1], en considerant les [2] [3] [8], a étudié l'hyperstructure $(L,+)$, qu'on construit à partir d'un treillis modulaire $(L,\vee,\wedge)$ possédant un élément minimum, en introduisant l'hyperopération $+$ définie par:

$$x+y=\{z\colon z\vee x=z\vee y=x\vee y\}\,,\ x,y\in L\,.$$

Il a démontré qu'il s'agit d'un hypergroupe canonique, que tous ses éléments sont autoopposés et que l'élément minimum est neutre. La structure ci-dessus a été appelée dans [6] *hypergroupe canonique attaché à* L, brièvement $(Hg.C.A_L)$, et on a demontré qu'elle satisfait à l'axiome 2 de la définition 1.

Dans ce qui suit, en partant toujours d'un treillis possédant un élément minimum (L minoré), on cherchera des conditions sous lesquelles l'axiome 1 de la définition 1 est, lui aussi, satisfait.

En ce qui concerne les sommes $x+y\subseteq L$, $\forall x,\ y\in L$, on sait [6] qu'elles sont des sous-$\vee$-demi-treillis convexes.

Maintenant si L est distributif et $z_1,\ z_2\in x+y\subseteq L$, d'après les relations

$$z_1\vee x=z_1\vee y=x\vee y,\quad z_2\vee x=z_2\vee y=x\vee y$$

on prend

$$(z_1\vee x)\wedge(z_2\vee x)=(z_1\vee y)\wedge(z_2\vee y)=x\vee y$$

donc

$$(z_1\wedge z_2)\vee x=(z_1\wedge z_2)\vee y=x\vee y$$

c'est-a-dire $z_1\wedge z_2\in x+y$.

Donc, on a montré la

Proposition 1. *Les sommes* $x+y\subseteq L$, $\forall x,\ y\in L$, *où* L *est un treillis distributif, sont des sous-treillis convexes de* L.

Une consequence de la proposition 1 est que chaque somme $x+y \subseteq L$ (L distributif) est l'intersection d'un idéal et d'un idéal dual de L [11]. Si, en plus, L satisfait à la condition de chaîne minimale, alors, puisque ses idéaux duaux sont principaux, il existe le $\min(x+y)$. Dans ce cas là, étant donné que $x \vee y = \max(x+y)$, on a la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Si L est un treillis distributif Artinien, les sommes $x+y$ de $(Hg.C.A_L)$ sont des segments.*

D'aprés les précédents et les travaux [6] [10] on obtient la

PROPOSITION 3. *Si L est un treillis distributif Artinien, alors $(Hg.C.A_L)$ est ordonné.*

Soit maintenant K l'ensemble des sous-hypergroupes canoniques [4] de $(Hg.C.A_L)$, où L est un treillis modulaire. On sait [6] que pour tout $h \in K$ on a $h = \bigcup_{x \in h}[x+x]$ (Évidement si L est complet, alors $h = [0, \text{suph}]$).

Donc, si z_1, $z_2 \in h$, alors on a $z_1 \vee z_2 \in z_1 + z_2 \subseteq h$. D'autre part, puisque $h = \bigcup_{x \in h}[x+x]$, il existe $y, z \in h$ tels que $z_1 \in y+y$ et $z_2 \in z+z$. Mais puisque $z_1 \wedge z_2 \leq z_1, z_2$ on a aussi que $z_1 \wedge z_2 \in (y+y) \bigcap (z+z) \subseteq h$.

Par conséquence, si J est l'ensemble des sous-treillis de L on a la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Dans un treillis modulaire L on a $K \subseteq J$.*

Si I est l'ensemble des ideaux de $(L, \vee, \wedge)$, alors on a la

PROPOSITION 5. *Dans un treillis modulaire L, on a $K = I$.*

DÉMONSTRATION. En effet, si a_1, $a_2 \in h \in K$, alors, selon la proposition 4, on a $a_1 \vee a_2 \in h$. En plus, si $a \in h$ et $b \leq a$, alors, puisqu'il existe $x \in h$ tel que $a \in x+x$, on aura aussi $b \in x+x$ et alors $b \in h$, donc $h \in I$. Inversement, si $h \in I$ et a_1, $a_2 \in h$, puisque $a_1 \vee a_2 \in h$, on a, pour tout $x \in a_1 + a_2$, $x \leq a_1 \vee a_2$, donc $a_1 + a_2 \subseteq h$. Par conséquent $h \in K$, parce que les éléments de $(Hg.C.A_L)$ sont autoopposés.

Maintenant, en ce qui concerne la distributivité des $\vee$, $\wedge$ par rapport à l'hyperopération $+$, on a:

PROPOSITION 6. *Dans un treillis modulaire L, on a*

$$a \vee (x+y) \subseteq (a \vee x) + (a \vee y), \quad a, x, y \in L.$$

DÉMONSTRATION. Si $z \in x+y$, alors par définition, $z \vee x = z \vee y = x \vee y$ d'où

$$a \vee (z \vee x) = a \vee (z \vee y) = a \vee (x \vee y)$$

ou

$$(a \vee z) \vee (a \vee x) = (a \vee z) \vee (a \vee y) = (a \vee x) \vee (a \vee y)$$

donc $a \vee z \in (a \vee x) + (a \vee y)$, ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION 7. *La condition nécessaire et suffisante pour que la relation*

$$a \wedge (x+y) \subseteq (a \wedge x) + (a \wedge y), \quad a, x, y \in L$$

soit valable dans L, est que L soit un treillis distributif.

DÉMONSTRATION. Si L est distributif et $z \in x+y$, alors de la relation $z \vee x = z \vee y = x \vee y$ il résulte, d'une manière analogue à celle de la démonstration de la proposition précédente, que

$$a \wedge z \in (a \wedge x) + (a \wedge y),$$

c'est-à-dire,

$$a \wedge (x+y) \subseteq (a \wedge x) + (a \wedge y).$$

Inversement, si la relation donnée est valable, et puisque $x \vee y \in x+y$, on aura $a \wedge (x \vee y) \leq (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$. Mais comme $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$ on obtient $a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$, $\forall a,\ x,\ y \in L$.

REMARQUE. Pour tout $a,\ x \in L$ (sans la présupposition que L soit distributif) on a en particulier que $a \wedge (x+x) = (a \wedge x) + (a \wedge x)$.

En effet d'une part on a $a \wedge (x+x) \subseteq (a \wedge x) + (a \wedge x)$, parce que $\forall z \in a \wedge (x+x)$ il existe un élément $z_1 \in x+x$ tel que $z = a \wedge z_1 \leq a \wedge x$. Donc, $z \in (a \wedge x) + (a \wedge x)$. D'autre part, si $w \in (a \wedge x) + (a \wedge x)$, on aura $w \leq (a \wedge x) \vee (a \wedge x) = a \wedge x \leq a,\ x$. Par conséquent $w \in x+x$, et, puisque $a \wedge w = w$, on a $w \in a \wedge (x+x)$, c'est-à-dire $(a \wedge x) + (a \wedge x) \subseteq a \wedge (x+x)$.

PROPOSITION 8. *Un treillis distributif L est relativament complémenté si, et seulement si, il est un hyperanneaux au sens de* KRASNER[5] *par rapport aux hyperopérations:*

$$a+b=\{z\colon z\vee a=z\vee b=a\vee b\}$$
$$ab=a\wedge b$$

DÉMONSTRATION. On considère un treillis distributif L qui est en plus relativement complémenté. Pour démontrer que $(L,+,\cdot)$ est un hyperanneaux il suffit évidemment de démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Soit donc un élément $z\in(a\wedge x)+(a\wedge y)$ c'est-à-dire:

$$z\vee(a\wedge x)=z\vee(a\wedge y)=(a\wedge x)\vee(a\wedge y)$$

et par conséquent:

$$(a\wedge x)\vee(a\wedge y)\le z\vee y \tag{1}$$

et:

$$z\le z\vee(a\wedge y)=a\wedge(x\vee y)\,,$$

donc $z\le a\le a\vee x\vee y$.

On suppose maintenant qu'il existe un élément a' tel que

$$a'\vee a=a\vee x\vee y \quad \text{et} \quad a'\wedge a=z\,.$$

De la relation (1) on obtient

$$(a\wedge x)\vee(a\wedge y)\vee a'\le a'\vee z\vee y=a'\vee y$$

mais $(a\wedge x)\vee(a\wedge y)\vee a'=[a\wedge(x\vee y)]\vee a'=(a\vee a')\wedge(x\vee y\vee a')=(a\vee x\vee y)\wedge(a'\vee x\vee y)=(a\wedge a')\vee(x\vee y)=z\vee(x\vee y)$, donc

$$x\vee y\le a'\vee(x\vee y)=z\vee(x\vee y)\le a'\vee y\,. \tag{2}$$

Si l'on pose $w=a'\wedge(x\vee y)$, d'après (2), on prend $y\vee w=y\vee[a'\wedge(x\vee y)]=(y\vee a')\wedge[x\vee(x\vee y)]=(y\vee a')\wedge(x\vee y)=x\vee y$. De même, on démontre

$x \vee w = x \vee y$, par conséquent, $w \wedge a = (a \wedge a') \wedge (x \vee y) = z \wedge (x \vee y) = z$, donc $w \wedge a = z \in a \wedge (x + y)$, c'est-à-dire $(a \wedge x) + (a \wedge y) \subseteq a \wedge (x + y)$. La relation ci-dessus en liason avec la proposition 7 nous donne ce qu'on voulait démontrer. Inversement, si $x \leq y \leq z$, alors, $x \in y + y = (y \wedge z) + (y \wedge y) = y \wedge (z + y)$, donc, il existe $y' \in z + y$ tel que $x = y \wedge y'$ et en plus $y' \vee y = z \vee y = z$.

Les deux dernières propositions sont analogues à celles que NACANO a démontré dans [8].

Maintenant, si $a \in L$, oú L est distributif relativement complémenté et $h \in K$, alors,

$$ah = a \bigcup_{x \in h} (x + x) = \bigcup_{x \in h} a(x + x) = \bigcup_{x \in h} (ax + ax) \subseteq \bigcup_{a \in h} [x + x] = h$$

puisque $ax = a \wedge x \leq x$.

Ainsi donc, si H est l'ensemble des hyperidéaux de $(L,+,\cdot)$, d'après [5] et d'après la proposition 5 on déduit la

PROPOSITION 9. *Dans un treillis distributif relativement complémenté on a*

$$K = H = I\,.$$

L'hyperanneaux $(L, +, \cdot)$, que l'on a construit ci-dessus, sera appelé *hyperanneaux attaché au treillis* L (Brièvement $H_a \cdot A_L$).

Une hyperstructure analogue à celle d'un anneau ordonné de la théorie classique est la suivante:

DEFINITION 2. *Un hyperanneaux $(H, +, \cdot)$ s'appelle ordonné [brièvement $(H_a \cdot 0)$] si l'hypergroupe canonique $(H, +)$ est ordonné* [def. 1] *et en plus*

$$a \leq b \implies ax \leq bx, \quad \forall x \in L\,.$$

D'après les propositions 3 et 8 on déduit la proposition:

PROPOSITION 10. *Si L est un treillis Artinien distributif relativement complémenté alors le $(H_a \cdot A_L)$ est un $(H_a \cdot 0)$.*

Si L est en plus majoré (avec élément maximum) on a

PROPOSITION 11. *Dans les conditions de la proposition précédente le* $(H_a \cdot A_L)$ *est un hyperanneaux fort de Boole d'où on peut construire une hyperalgèbre forte de Boole attachée à* $L(H_{al} \cdot f_B \cdot A_L)$[7].

Une autre hyperstructure que l'on peut construire, ayant comme point de départ un treillis particulier L, est l'hypergroupe canonique réticulé $(H_c \cdot R)$ [9], dont la definition est la suivante:

DÉFINITION 3. *On appelle hypergroupe canonique réticulé* $(H_c \cdot R)$ *une hyperstructure* $(L, +, \vee, \wedge)$ *telle que:*

I. *La structure* $(L, +)$ *est un hypergroupe canonique.*
II. $(L, \vee, \wedge)$ *est un treillis.*
III. *Pour tout* x, $y \in L$ *la somme* $x + y$ *est un segment.*
IV. $(x + a) \vee (y + a) \subseteq (x \vee y) + a$.
V. $(x \wedge y) + a \subseteq (x + a) \wedge (y + a)$.

quels que soient x, y, $a \in H$.

PROPOSITION 12. *Si* L *est un treillis modulaire, pour tout* x, y, $a \in L$ *on a*

$$(x + a) \vee (y + a) \subseteq (x \vee y) + a\,.$$

DÉMONSTRATION. En effet, si $z \in x + a$, $w \in y + a$ alors,

$$z \vee x = z \vee a = x \vee a, \quad w \vee y = w \vee a = y \vee a \implies$$

$$\implies (z \vee w) \vee (x \vee y) = (z \vee w) \vee a = (x \vee y) \vee a \implies$$

$$\implies z \vee w \in (x \vee y) + a \implies (x + a) \vee (y + a) \subseteq (x \vee y) + a\,.$$

PROPOSITION 13. *Si* L *est un treillis distributif relativement complémenté, alors*

$$(x \wedge y) + a \subseteq (x + a) \wedge (y + a)\,.$$

DÉMONSTRATION. En effet, on a

$$(x+a)\wedge(y+a) = \bigcup_{z\in x+a} z\wedge(y+a) = \bigcup_{z\in x+a} (z\wedge y)+(z\wedge a) \supseteq \bigcup_{z\in x+a} (z\wedge y)+a$$

puisque $(x+a)\wedge a \ni (x\vee a)\wedge a = a$ et $z\wedge a$ parcourt l'ensemble $(x+a)\wedge a$. On a aussi $\bigcup_{z\in x+a} [(z\wedge y)+a] = [(x+a)\wedge y]+a = [(x\wedge y)+(a\wedge y)]+a = (x\wedge y)+[(a\wedge y)+a] \ni (x\wedge y)+a$, d'où l'on obtient la relation à démontrer.

D'après les propositions 2, 10 et 11 et la définition 3 on déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 14. *Si le treillis L est distributif Artinien et relativement complémenté, le système $(L, \vee, \wedge, +)$ est un hypergroupe canonique réticulé, appellé attaché à L $(H_g \cdot C \cdot R \cdot A_L)$.*

REFERENCES

[1] ST. COMER: *Multi-valued Algebras and their Graphical Representations (Preliminary Draft)*, Math. and Comp. Sc. Dep. The Citadel, Charleston, South Carolina, 29409.

[2] D. HARRISON: *Double coset and orbit Spaces*, Pacific Jur. Math., Vol. 80, N. 2, 1979.

[3] R. MADDUX: *Embedding modular lattices into relation Algebras*, Algebra Universalis 12 (1981), p. 242-246.

[4] J. MITTAS: *Hypergroupes canoniques*, Mathematica Balkanica, t. 2, Beograd 1972.

[5] J. MITTAS: *Hyperanneaux et certaines de leur propriétés*, C.R. Acad. Sc., Paris, t. 269, p. 623-629, 13 Octobre 1969, Serie A.

[6] J. MITTAS ET M. KOSTANTINIDOU: *Contribution à la théorie des treillis en liaison avec des structures hypercompositionelles y attachées*, Rivista Mat. Pura ed App., n. 12.

[7] J. MITTAS ET M. KOSTANTINIDOU: *Introduction à l'hyperalgèbre de Boole*, Mathematica Balkanica, t. 6, Beograd 1976.

[8] T. NACANO: *Rings and Partly Ordered Systems*, Mat. Zeitschr., Vol. 99, p. 355-376, 1967.

[9] K. SERAFIMIDIS: *Introduction aux hypergroupes canoniques réticulés*, Convegno su: Ipergruppi, Altre strutture Multivoche e Loro Applicazioni, Udine, 15-18 Ottobre 1985.

[10] CH. SERAFIMIDIS: *Sur les hypergroupes canoniques ordonnés et strictement ordonnés*, Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni. Serie VII. Vol. 6 (1986), 231-238.

[11] G. SZASZ: *Théorie des treillis*, Monographie Universitaire de Mathématique, Dunod, Paris 1971.

Lavoro pervenuto alla redazione il 13 aprile 1992
ed accettato per la pubblicazione il 5 novembre 1992

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

M. Kostantinidou - K. Serafimidis - Université Aristote de Thessaloniki - Ecole Polytechnique - Section de Mathematiques - 540 06 - Thessaloniki - Grece