Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 297-304

Sur les hyperstructures très fines

L. KONGUETSOF - T. VOUGIOUKLIS - S. SPARTALIS

RIASSUNTO: *Una iperstruttura è detta finissima se una sola delle sue operazioni è multivoca, e per questa operazione la composizione di una sola coppia di elementi dà come risultato un sottoinsieme che abbia più di un elemento. In questa nota si studia la classe delle H_v-strutture finissime finite.*

ABSTRACT: *A hyperstructure is called very thin if it has only one hyperoperation, which has all hyperproducts singletons except only one, which is a subset of cardinality more than one. The above hyperstructures are studied in this paper.*

KEY WORDS: *Hypergroups - Hyperrings.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 20N20 - 16Y99

1 – Introduction

Dans le présent travail, nous étudions les H_v-structures, qui constituent une généralisation des hyperstructures algébriques déjà connues (hypergroupes, hyperanneaux etc.). Plus particulièrement, nous étudions les H_v-groupes et les H_v-anneaux, qui généralisent les hypergroupes et les hyperanneaux puisque les axiomes de leurs définitions sont affaiblis. Nous rappelons les définitions suivantes:

L'hyperstructure $(H, \cdot)$ est appellée *H_v-groupe* [5] si la condition de *reproduction*

$$xH = H = Hx\,,$$

est satisfaite, d'une part, pour tout x de H et si, d'autre part, la condition de *faible associativité*

$$x(yz) \cap (xy)z \neq \phi$$

est verifiée, pour tous x, y, z de H.

L'hyperstructure $(R, +, \cdot)$ est appellée *H_v-anneau* si $(R, +)$ est un H_v-groupe, si la multiplication $(\cdot)$ est faiblement associative, et si les condition de *faibles distributivité*:

$$x(y+z) \cap (xy + xz) \neq \phi, \quad (x+y)z \cap (xz + yz) \neq \phi$$

sont verifiées pour tous x, y, z de R.

Les relations fondamentales d'équivalence [1],[2],[3], dans les H_v-structures, sont définies de la même manière que dans les hyperstructures. Par conséquent, on appelle *H_v-corps* un H_v-anneau $(R, +, \cdot)$ dont l'anneau fondamental est un corps.

Une matrice formée par les éléments d'un H_v-anneau est dite *H_v-matrice*. Le produit (hyperopération) de deux H_v-matrices $n \times n$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ est donné de la façon habituelle:

$$A \cdot B = \Big\{(c_{ij}) | c_{ij} \in C_{ij} = \bigcup_{p \in P_n} p(a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, \ldots, a_{in}b_{nj})\Big\}$$

où l'ensemble P_n représente toutes les manières de mettre des paranthèses dans une somme de n facteurs.

Soit $(H, \cdot)$ un H_v-groupe. On appelle *$n \times n$ représentation H_v-matricelle* de H toute correspondance

$$T : H \to M_n$$

où M_n est l'ensemble des $n \times n$ H_v-matrices sur un H_v-anneau $(R, +, \cdot)$ ou, encore mieux, sur un H_v-corps.

La théorie des representátions des hyperstructures est très récente. Comme, d'ailleurs, il rèsulte de la définition, le produit de H_v-matrices est un ensemble de grande cardinalité, c'est-à-dire, si $c_{ij} \in C_{ij}$, alors

$$\operatorname{card}(A \cdot B) = \prod_{i,j=1}^{n} \operatorname{card} C_{ij}$$

Ce fait rend difficile la découverte des représentations et surtout des représentations fidèles des H_v-groupes, lorsque ces H_v-groupes ont des produits d'éléments avec un petit cardinal. Par conséquent, on s'intéresse aux H_v-groupes qui comprennent plusieurs scalaires. Cet intérêt conduit à la définition des H_v-structures très fines.

DEFINITION 1.1. *Une H_v-structure s'appelle très fine si toutes ses hyperopérations sont uniformes, sauf une et une seule, dont aussi tous les produits sont des singletons, sauf un seul produit, qui est un sous-ensemble non-vide.*

Par conséquent, si $(H, \cdot)$ est un H_v-groupe très fin, alors il existe deux éléments a, b de H tels que $\mathrm{card}(a \cdot b) > 1$ et tous les autres produits sont des singletons.

Si $(R, +, \cdot)$ est un H_v-anneau (respectivement un H_v-corps) très fin, alors nous avons les deux cas suivants:

(i) il existe deux éléments a, b de R, tels que $\mathrm{card}(a + b) > 1$ et tous les autres sommes et produits sont des singletons. Dans ce cas, le H_v-anneau est dit H_v-anneau très fin *additif*;

(ii) il existe deux éléments a, b de R tels que $\mathrm{card}(a \cdot b) > 1$ et tous les autres sommes et produits sont des singletons. Dans ce cas, le H_v-anneau est dit H_v-anneau très fin *multiplicatif*.

Dans ce travail, nous cherchons, d'une part, les H_v-groupes finis très fins et, d'autre part, les H_v-anneaux finis très fins.

2 – H_v-groupes tres fins finis

PROPOSITION 2.1. *Soit $(H, \cdot)$ un H_v-groupe fini très fin de cardinalité $n > 1$. Soient a et b les seuls éléments de H tels que $ab = A$ soit de cardinalité strictement supérieure à 1.*

i) *ou bien pour tout u de $H \setminus \{a\}$, $ua = a$; et deux cas sont à considérer:*
si $n = 2$, alors il existe une loi de groupe, $(*)$, sur H, telle que $a * b \in A$ et $x * y = xy$ pour tous x, y de $H \setminus \{(a, b)\}$,
si $n \geq 3$, alors $a = b$, $H \setminus \{a\}$ est un groupe, $A = H$ ou $A = H \setminus \{a\}$.

ii) *ou bien il existe u de H tel que $u \neq a$ et $ua \neq a$; alors il existe une loi de groupe $(*)$, presque associative*[1] *sur H, telle que $a * b \in A$ et $x * y = xy$ pour tous x, y de $H \setminus \{(a, b)\}$.*

DÉMONSTRATION. On utilise les deux propriétés suivantes:

$$t \neq a \quad \text{et} \quad tx = ty \quad \text{impliquent} \quad x = y \tag{1}$$

$$t \neq b \quad \text{et} \quad xt = yt \quad \text{impliquent} \quad x = y \tag{2}$$

Les démonstrations de (1) et (2) sont analogues.

Démontrons (1):

Pour tout $t \neq a$ l'application de H dans lui-même, qui à tout x fait correspondre tx, est surjective (par la reproduction de H) et, comme H est fini, elle est aussi injective, d'où le résultat.

On distingue maintenant deux cas:

i) pour tout u de $H \setminus \{a\}$: $ua = a$, alors:
ou bien $n = 2$ et l'on a, à des isomorphismes près, les deux cas possibles suivants:

	a	u
a	a, u	a
u	a	u

ou

	a	b
a	b	a, b
b	a	b

et le résultat est trivial ($a * a = u$ ou $a * b = a$);
ou bien $n \geq 3$ et, dans ce cas: $ua = a = au$, $aa = A = H \setminus \{a\}$ ou H, et donc $a = b$. On vérifie que $H \setminus \{a\}$ est un groupe.

Remarquons qu'il y a équivalence entre

$$\begin{aligned} &\forall u \in H \setminus \{a\} \quad , \quad ua = a \\ \text{et} \quad &\forall u \in H \setminus \{b\} \quad , \quad bu = b \,. \end{aligned}$$

ii) il existe u de H tel que $u \neq a$ et $ua \neq a$:
ou bien $n = 2$ et l'on a, à des isomorphismes près, les deux cas possibles suivants:

[1] C'est-à-dire, l'associativité se vérifie partout, sauf éventuellemnt pour les triplets d'éléments où se présente le produit $a * b$.

	a	b
a	a	a,b
b	b	a

ou

	a	u
a	a,u	u
b	u	a

$(a \neq b$ et $u = b)$ $(a * b = b)$ $\qquad$ $(a = b$ et $u \neq b)$ $(a * a = a)$

ou bien $n \geq 3$, considérons alors x et y de H tels que $x \neq b \neq y$ et $ax = ay$. Les produits $u(ax)$, $u(ay)$, $(ua)x$ et $(ua)y$ sont des singletons vérifiant: $(ua)x = u(ax) = u(ay) = (ua)y$, et d'après (1) $x = y$.

Soit $v = H \setminus (H \setminus \{a\})b$. Si v est dans $a(H \setminus \{b\})$, il existe $x \neq b$ tel que $v = ax$, et alors, pour tout $y \in H \setminus \{x, b\}$, il existe $z \in H \setminus \{a\}$ vérifiant $zy = v$. Pour y donné, z est unique d'après (2); et l'application

$$H \setminus \{x,b\} \to H \setminus \{a\} \quad : \quad y \mapsto z(\text{ où } \quad zy = v)$$

est injective d'après (1).

Or la cardinalité de $H \setminus \{a\}$ est $n-1$ et celle de $H \setminus \{x,b\}$ est $n-2$ ($n-2 > 0$ car $n > 3$), ainsi il existe $s \neq a$ tel que, pour tout $y \in H \setminus \{x,b\}$, $sy \neq v$ et alors:

ou bien $sx = v = ax$, et $x \neq b$, ce qui est impossible d'après (2);
ou bien $sb = v$, ce qui est contredit par $V = H \setminus (H \setminus \{a\})b$.

Donc $V = H \setminus a(H \setminus \{b\})$, et le résultat est acquis en posant $a * b = V$. La presque associativité est évidente. □

REMARQUE 2.2. Les propositions précédentes répondent complèment à la question: "Quels sont les H_v-groupes finis très fins?". C'est-à-dire tout H_v-groupe fini très fin se détermine complètement par les constructions de la proposition 2.1.

En plus, nous remarquons que, dans le cas plus strict de la structure d'hypergroupe, les hypergroupes finis très fins se déterminent seulement par le cas (i) de la proposition 2.1, voir [6].

3 – H_v-anneaux très fins finis

PROPOSITION 3.1. *Soient* $(R, +, \cdot)$ *un anneau et* a, b *deux éléments* *de R. Nous considérons l'hyperopération* $(\oplus)$*:*

$$a \oplus b = A, \quad \textit{où} \quad a + b \in A, \quad |A| > 1$$
$$\textit{et} \quad x \oplus y = x + y, \quad \forall (x,y) \neq (a,b).$$

Alors $(R, \oplus, \cdot)$ *est un* H_v*-anneau additif très fin. De même, en considérant l'hyperopération* $(\odot)$*, définie par:*

$$a \odot b = A, \quad \textit{où} \quad a \cdot b \in A, \quad |A| > 1$$
$$\textit{et} \quad x \odot y = x \cdot y, \quad \forall (x,y) \neq (a,b),$$

nous avons que $(R, +, \odot)$ *est un* H_v*-anneau multiplicatif très fin.*

DÉMONSTRATION. Evidemment, parce que les deux nouvelles hyperopérations contiennent les opérations de l'anneau $(R, +, \cdot)$. □

Quatre classes de H_v-anneaux additifs très fins sont déterminées par les propositions suivantes. Ces classes sont moins étendues que celles de la proposition 3.1 et pour les démonstrations on peut voir [3].

Si $(R, +)$ est un hypergroupe très fin, alors il existe un élément $x \in R$ tel que:

(i) $(R - \{x\}, +)$ *est un group*

(ii) $x + r = r + x = x, \quad \forall r \neq x$

et $x + x = R - \{x\}$ ou $x + x = R$.

Dans le cas où $x + x = R - \{x\}$, $(R, +)$ s'appelle de *première espèce*; si $x + x = R$, $(R, +)$ s'appelle de *seconde espèce*.

PROPOSITION 3.2. *Pour tout* $r_0 \in R - \{x\}$ *tel que* $r_0 + r_0 = 0$*, et seulement dans ce cas, nous avons un hyperanneau additif très fin de première espèce. Cet hyperanneau est tel que* $xx = r_0$ *et les autres produits sont égaux à zéro.*

PROPOSITION 3.3. *Soit* $\overline{R} = \{\bar{r} \in R \mid \bar{r} + \bar{r} = 0\}$ *et soit* f *un homomorphisme additif:* $R - \{x\} \to \overline{R}$*, qui soit aussi une projection sur* R*. Quelque soit* f*, nous aurons un hyperanneau additif très fin de première espèce, avec* $xx = x$*, si et seulement si le produit est defini comme il suit:* $rs = 0$*,* $xr = rx = f(r)$ *pour tous* $r, s \in R - \{x\}$*.*

Proposition 3.4. *Le seul hyperanneau additif très fin de seconde espèce où $xx \neq x$ est l'hyperanneau dont tous les produits sont zéro.*

Proposition 3.5. *Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau et $f : R \to R$ un endomorphisme tel que $R/\operatorname{Ker} f$ soit un domaine d'intégrité. Soit $x \neq R$, nous considérons l'hypergroupe très fin $(R_x, +)$, où $R_x = R \cup \{x\}$ et nous prolongeons l'addition dans R_x en posant $r + x = x + r = x$ pour tout $r \in R$, et $x + x = R_x$. Dans R_x nous définissons la multiplication $(*)$ de la façon suivante:*

$$\begin{aligned} &r * s = f(rs) \quad \text{pour tous} \quad r, s \in R \\ &(\operatorname{Ker} f) * x = x * (\operatorname{Ker} f) = 0 \\ &(R_x - \operatorname{Ker} f) * x = x * (R_x - \operatorname{Ker} f) = x\,. \end{aligned}$$

Alors $(R_x, +, *)$ est un hyperanneau additif très fin de seconde espèce.

Proposition 3.6. *Si $(R, +, \cdot)$ est un H_v-anneau multiplicatif très fin, tel que $a \cdot b = A$, $|A| > 1$, où $a = 0$ ou $b = o$, alors, en posant $a * b = 0$ et $x * y = xy$, $\forall (x, y) \neq (a, b)$, la structure $(R, +, *)$ est un anneau.*

Démonstration. Soit $a = 0$, $b \neq 0$. Si $x \neq 0$, alors $A = 0b = (x - x)b \ni xb - xb = 0$, donc $0 \in A$. En plus, $0x = 0$ pour tout $x \neq b$, car en prenant $y \neq 0$, nous avons

$$0x = (y - y)x = yx - yx = 0\,.$$

De même, $x0 = 0$ pour tout x de R.

Soient $x, y, z \in R$. Si $0 \in \{x, y, z, xy, yz\}$, alors par les propriétés ci-dessus il résulte: $x * (y * z) = 0 = (x * y) * z$. Aussi dans les autres cas, l'associativité est satisfaite, car l'hyperopération devient opération uniforme.

D'une façon analogue, on vérifie la distributivité de $(*)$ par rapport à $(+)$. Par conséquent, la structure $(R, +, *)$ est un anneau.

La démonstration pour $a \neq 0$, $b = 0$ est analogue. Enfin, dans le cas où $a = b = 0$, la démonstration est immédiate. $\square$

4 – Problème ouvert

A part les cas ci-dessus 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 existe-t-il d'autres classes de H_v-anneaux très fins et quelles sont-elles? Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un H_v-anneau soit très fin.

REFERENCES

[1] P. Corsini: *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, 1993.

[2] S. Spartalis, T. Vougiouklis: *The fundamental relations on H_v-rings.*, To appear in Rivista di Matematica Pura ed Appl. N. 13.

[3] T. Vougiouklis: *On representations of algebraic multivalued structures*, Rivista di Mat. Pura ed Appl., N. 7 (1990), 87-92.

[4] T. Vougiouklis: *Representations of Hypergroups by hypermatrices*, Rivista di Mat. Pura ed Appl., N. 2 (1987), 7-19.

[5] T. Vougiouklis: *The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield*, Proc. Fourth Int. Congress on Algebraic Hyperstructures and Appl. (AHA 1990), world Scientific (1991), 203-211.

[6] T. Vougiouklis: *The very thin hypergroups and the S-Construction*, Combinatorics'88, Proc. Int. Conf., V 2 (1991), 471-477.

Lavoro pervenuto alla redazione il 18 settembre1992
ed accettato per la pubblicazione il 3 marzo1993

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

L. Konguetsof, T. Vougiouklis, S. Spartalis - Democritus University of Thrace - 67100 Xanthi, Greece