Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 305-317

L'analogo discreto della probabilità geometrica

M. CERASOLI

RIASSUNTO: *Viene studiato l'analogo discreto dei complessi simpliciali, della caratteristica di Eulero, dei volumi misti (o misure) di Minkowski e della formula di Gauss-Bonnet. Sono proposti infine alcuni problemi aperti.*

ABSTRACT: *We shall develop a discrete analog of the Euler characteristic, and of the Minkowski mixed volumes, which yelds in particular an elementary approach to the Euler characteristic of ordinary simplicial complexes, as well a discrete analog of the so-called Gauss-Bonnet theorem. Some open problems are posed.*

KEY WORDS: *Finite simplicial complexes – Measure – Euler characteristic – Group – Invariant.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 06A07

1 – Introduzione

Alcuni anni fa G.C. Rota ha tenuto un ciclo di Lezioni Lincee alla Normale di Pisa dal titolo "Introduction to geometric probability". In quell'occasione venivano presentate le idee fondamentali della probabilità geometrica da un punto di vista moderno. In particolare si affrontava il problema di determinare le misure invarianti definite sugli insiemi policonvessi (= unioni finite di insiemi convessi compatti di R^n). In questo lavoro, riprendendo alcune delle idee già presentate in [5], si vuole sviluppare un analogo della caratteristica di Eulero, dei volumi misti di Minkowski e della formula di Gauss-Bonnet, su insiemi finiti. A tale scopo richiamiamo qualche concetto di matematica discreta che ci sarà utile nel seguito della trattazione.

Sia P un insieme parzialmente ordinato con relazione d'ordine $\leq$; una parte A di P è detta *ideale* (o sottoinsieme decrescente) se soddisfa la seguente proprietà:

$$p \in A, \quad q \leq p \Longrightarrow q \in A .$$

La famiglia degli ideali di P viene designata di solito mediante la notazione $L(P)$. Sia ora S un insieme finito e sia $P(S)$ l'insieme delle parti di S, ordinato per inclusione (indicata con $\subseteq$). Un ideale di $P(S)$ è quindi una famiglia A di parti di S tale che

$$x \in A, \quad y \subseteq x \Longrightarrow y \in A .$$

Un ideale di $P(S)$ viene chiamato *complesso simpliciale*. Ogni complesso simpliciale eredita l'ordine di $P(S)$; poiché l'insieme S è finito, l'insieme parzialmente ordinato A possiede un numero finito di elementi massimali. Un *simplesso* è un ideale con un solo elemento massimale detto *vertice*. Sia $x^\wedge$ il simplesso avente come massimo l'insieme x:

$$x^\wedge = \{y \in P(S) \colon y \subseteq x\} .$$

L'insieme $L(P(S))$ (abbreviato $L(S)$) degli ideali di S è chiuso rispetto alle operazioni di unione ed intersezione, pertanto ha la struttura di un reticolo distributivo. La relazione d'ordine è, ovviamente, l'inclusione tra insiemi.

A questo punto è naturale studiare misure su $L(S)$. Ricordiamo che una funzione $\mu \colon L(S) \longrightarrow R$, dove R è l'insieme dei reali (o un qualsiasi gruppo abeliano), tale che

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

è chiamata *misura* su $L(S)$ a valori in R.

In seguito, per studiare misure su $L(S)$, faremo uso del seguente caso particolare del teorema d'inversione di Möbius su insiemi parzialmente ordinati [3].

LEMMA. *Sul reticolo delle parti di un insieme finito S siano definite le funzioni f e g a valori in un campo. Se per ogni parte x di S risulta*

$$f(x) = \sum_{u \subseteq x} g(u)$$

allora

$$g(x) = \sum_{u \subseteq x} (-1)^{|x-u|} f(u)$$

e viceversa.

2 – La caratteristica di Eulero sugli insiemi finiti

Si può dimostrare che una misura μ su $L(S)$ è individuata dai valori $\mu(x^\wedge)$ assunti sui simplessi. Vale infatti il seguente

TEOREMA 1. *Ogni misura μ da $L(S)$ in R è univocamente determinata dalla sua restrizione all'insieme dei simplessi.*

DIM. Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gli elementi massimali dell'ideale A. Pertanto

$$A = x_1^\wedge \cup x_2^\wedge \cup \ldots \cup x_n^\wedge$$

e quindi, in virtù del principio di inclusione esclusione risulta

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(x_1^\wedge \cup \ldots \cup x_n^\wedge) \\ &= \sum_k \mu(x_k^\wedge) - \sum_{i<j} \mu(x_i^\wedge \cap x_j^\wedge) + \ldots \pm \mu(x_1^\wedge \cap \ldots \cap x_n^\wedge).\end{aligned}$$

Ma, per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$, l'intersezione di simplessi

$$x_{i_1}^\wedge \cap x_{i_2}^\wedge \cap \ldots \cap x_{i_k}^\wedge = (x_{i_1} \cap x_{i_2} \cap \ldots \cap x_{i_k})^\wedge$$

è ancora un simplesso, perciò nelle sommatorie compaiono soltanto misure di simplessi e la misura dell'ideale A è univocamente determinata dalle misure di questi simplessi. □

Una volta assegnata la misura μ su $L(S)$ definiamo la funzione w_μ: $P(S) \longrightarrow R$, chiamata funzione *peso* generata da μ, mediante l'identità:

$$w_\mu(x) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|} \mu(y^\wedge) . \tag{1}$$

Vediamo allora come questo peso permette di calcolare la misura di un ideale A.

TEOREMA 2. *Se w_μ è il peso di x generato dalla misura μ su $L(S)$ allora per ogni ideale A di $L(S)$ risulta*

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} w_\mu(x) \tag{2}$$

DIM. Se l'ideale A è un simplesso $x^\wedge$, in virtù del lemma si ha subito che

$$\mu(x^\wedge) = \sum_{y \subseteq x} w_\mu(y) = \sum_{y \in x^\wedge} w_\mu(y) .$$

Supponiamo quindi che l'ideale A abbia soltanto due elementi massimali x e y, ovvero che sia $A = x^\wedge \cup y^\wedge$. Pertanto se $z^\wedge = x^\wedge \cap y^\wedge$ si ha

$$\begin{aligned} \mu(A) = & \mu(x^\wedge \cup y^\wedge) = \mu(x^\wedge) + \mu(y^\wedge) - \mu(x^\wedge \cap y^\wedge) = \\ & = \sum_{u \subseteq x} w_\mu(u) + \sum_{u \subseteq y} w_\mu(u) - \sum_{u \subseteq z} w_\mu(u) \end{aligned}$$

Ma $\{u \in P(S) \colon u \subseteq x, u \subseteq y\} = \{u \in P(S) \colon u \subseteq z\}$ pertanto l'ultima espressione equivale a $\sum_{u \in A} w_\mu(u)$. Per induzione si prova che la (2) è valida anche quando l'ideale A ha più di due elementi massimali. □

Il teorema 1 ci permette di affermare che esiste una sola misura χ, detta *caratteristica di Eulero*, tale che

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \chi(\emptyset) = \chi(\emptyset^\wedge) = 0 \\ \text{b)} & \chi(x^\wedge) = 1 , \quad \text{se} \quad x \neq \emptyset . \end{array}$$

In altri termini la caratteristica di Eulero assegna il valore $\emptyset$ al vuoto e al simplesso che contiene il solo insieme vuoto, mentre assegna il valore 1 a tutti gli altri simplessi.

Calcoliamo il peso determinato dalla misura χ; si ha

$$w_\chi(\emptyset) = (-1)^{|\emptyset|}\chi(\emptyset^\wedge) = 0$$

mentre per $x \neq \emptyset$ risulta:

$$w_\chi(x) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|}\chi(y^\wedge) = \sum_{j=1}^{|x|} (-1)^{|x|-j} \binom{|x|}{j} = -(-1)^{|x|}.$$

Se poi, per ogni ideale A, poniamo

$$f_k(A) = \Big|\{x \in A \colon |x| = k\}\Big|,$$

così $f_k(A)$ è il numero delle *facce* di A di cardinalità k, risulta

$$\chi(A) = \sum_{x \in A} -(-1)^{|x|} = f_1(A) - f_2(A) + f_3(A) - \dots$$

che è la classica formula di Eulero. É opportuno osservare che la misura χ, su definita, coincide con la caratteristica di Eulero della topologia algebrica.

3 – Le misure binomiali

In virtù del teorema 1 per ogni $k = 0, 1, \dots, n$ esiste una sola misura μ_k (che chiameremo *binomiale*) tale che

$$\mu_k(x^\wedge) = \binom{|x|}{k} \tag{3}$$

per ogni simplesso $x^\wedge$. Il peso w_k di x rispetto a μ_k vale, per la (1),

$$w_k(x) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|}\mu_k(y^\wedge) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|} \binom{|y|}{k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{|x|} (-1)^{|x|-i} \binom{i}{k} \binom{|x|}{i} = \delta_{|x|,k} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| = k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Pertanto la misura binomiale di un ideale A vale

$$\mu_k(A) = \sum_{x\in A} w_k(x) = \sum_{x\in A} \delta_{|x|,k} = \Big|\{x \in A\colon |x| = k\}\Big| = f_k(A)\,.$$

Sia G un gruppo di permutazioni agente sull'insieme finito S e sia σA l'immagine dell'ideale A mediante la permutazione σ di G; una misura μ è detta G-invariante se

$$\mu(\sigma A) = \mu(A)\,,$$

per ogni ideale A e qualunque sia la permutazione σ di G. Una misura è detta *invariante* se G è il gruppo di tutte le permutazioni su S. È facile vedere che la caratteristica di Eulero è una misura invariante rispetto ad ogni gruppo di permutazioni su S. A proposito delle misure invarianti sussiste il seguente

TEOREMA 3. *Ogni misura invariante su $L(S)$ è univocamente esprimibile come combinazione lineare delle misure binomiali.*

DIM. Sia data infatti una misura μ su $L(S)$; per il teorema 1 essa è univocamente determinata dai valori sui simplessi. Poniamo

$$\mu(x^\wedge) = a_{|x|}$$

perché, se μ è invariante, $\mu(x^\wedge)$ dipende soltanto dalla cardinalità di x. Supponendo noti i valori a_i, determiniamo quindi le costanti di connessione b_i della misura μ definite dalla relazione

$$\mu = b_0\mu_0 + b_1\mu_1 + \ldots + b_n\mu_n\,.$$

A tale scopo valutiamo μ su un generico simplesso $x^\wedge$; si ha

$$\mu(x^\wedge) = \sum_{k=0}^{n} b_k\mu_k(x^\wedge) = a_{|x|}\,;$$

se $|x| = i$ risulta, per le posizioni su fatte,

$$a_i = \sum_{k=0}^{i} b_k\binom{i}{k}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Invertendo questa relazione rispetto ai coefficienti b si ottiene

$$(4) \qquad b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_i, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

e il teorema è dimostrato.

a) Alla luce di questo risultato calcoliamo, per esempio, le costanti di connessione di alcune misure particolari, iniziando dalla caratteristica di Eulero. Si ha

$$\chi(x^\wedge) = a_{|x|} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_i = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} = 0^k - (-1)^k =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k = 0 \\ -(-1)^k & \text{se} \quad k = 1, 2, \dots, n\,. \end{cases}$$

Pertanto la caratteristica di Eulero viene espressa, mediante le misure binomiali μ_k, con la formula di Gauss-Bonnet (caso discreto)

$$\chi = \mu_1 - \mu_2 + \dots - (-1)^n \mu_n\,.$$

che coincide con la precedente formula di Eulero.

b) Un'altra misura interessante è $|\ |$: la *cardinalità*; per ogni simplesso $x^\wedge$ risulta

$$|x^\wedge| = a_{|x|} = 2^{|x|}$$

e quindi le costanti di connessione valgono tutte 1 in quanto, per la (4), si ha

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} 2^i = (2-1)^k = 1\,.$$

Dunque la cardinalità è la somma delle misure binomiali:

$$|\ | = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_n$$

come era da aspettarsi.

c) Nel teorema 3 le misure μ_k possono essere sostituite dalle misure δ_k così definite:

$$\delta_k(x^\wedge) = \delta_{|x|,k} \qquad k = 0, 1, \dots, n. \tag{5}$$

È facile verificare in tal caso che se

$$\mu = \sum_{k=0}^{n} b_k \delta_k$$

è una misura su $L(S)$ allora $b_k = \mu(x^\wedge)$ con $|x| = k$. Calcoliamo dunque le costanti di connessione b_k della caratteristica di Eulero rispetto alle misure δ_k. Ora per ogni simplesso $x^\wedge$ risulta

$$\chi(x^\wedge) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = \emptyset \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} = b_{|x|}$$

e quindi

$$\chi = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n.$$

Per le costanti di connessione della cardinalità abbiamo $|x^\wedge| = 2^{|x|} = b_{|x|}$ e quindi $b_k = 2^k$, pertanto

$$|\ | = \sum_{k=0}^{n} 2^k \delta_k.$$

Possiamo determinare infine la relazione che lega le misure μ_k alle δ_k e viceversa. Per definizione risulta

$$\delta_j(x^\wedge) = \sum_{k=0}^{n} b_{k,j} \mu_k(x^\wedge) = \delta_{j,|x|}.$$

Se $|x| = i$ otteniamo dalla (4)

$$b_{k,j} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \mu_i = (-1)^{k-j} \binom{k}{j}$$

e quindi

$$\delta_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \mu_k .$$

Al medesimo risultato si perviene per altra via se calcoliamo il peso w_k della misura δ_k. Risulta

$$w_k(x) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|} \delta_k(y^\wedge) = \sum_{y \subseteq x} (-1)^{|x-y|} \delta_{|y|,k} =$$

$$= \sum_{y \subseteq x, |y|=k} (-1)^{|x|-k} = (-1)^{|x|-k} \binom{|x|}{k} .$$

Pertanto se A è un ideale di $L(S)$ si ha

$$\delta_j(A) = \sum_{x \in A} w_k(x) = \sum_{x \in A} (-1)^{|x|-k} \binom{|x|}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mu_k(A)(-1)^{k-j} \binom{k}{j} .$$

Viceversa, da questa relazione otteniamo che

$$\mu_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} \delta_j .$$

Prima di chiudere il paragrafo dimostriamo che le misure μ_k definite dalla (3) sono l'analogo discreto dei volumi misti (o misure) di Minkowski in R^n. Ricordiamo, a proposito (vedi [5]), che per $0 \leq k \leq n$ esiste una sola misura continua-convessa μ_k definita per tutti i policonvessi di R^n (insiemi ottenuti prendendo unioni finite ed intersezioni di parallelepipedi con lati paralleli agli assi coordinati), tale che

$$\mu_k(P) = e_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \tag{6}$$

$e_0 = 1$, dove P è un parallelepipedo di lati $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Se P è di dimensione n, $\mu_n(P)$ è il volume di P. Le misure μ_k, così definite per mezzo delle funzioni simmetriche elementari, sono chiamate *volumi misti* di Minkowski.

Per rendersi conto che le misure μ_k definite da (3) sono l'analogo discreto di quelle definite da (6), conviene specificare l'insieme S ponendo

$$S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Poi consideriamo un simplesso $x^\wedge$ e poniamo

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_i \in x \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Valutata la funzione simmetrica elementare $e_k(x_1, \dots, x_n)$ in questo modo, essa uguaglia

$$\mu_k(x^\wedge) = \binom{|x|}{k}$$

per ogni simplesso $x^\wedge$.

4 – Alcuni problemi aperti

1) Le misure μ_k definite dalla (3) hanno una proprietà che desideriamo sottolineare.

TEOREMA 4. *Siano S_1 ed S_2 insiemi finiti disgiunti; per $A \in L(S_1)$, $B \in L(S_2)$ risulta l'identità binomiale*

$$\mu_k(A \times B) = \sum_{i+j=k} \mu_i(A)\mu_j(B). \tag{7}$$

Verifichiamo intanto, con la formula di Vandermonde, che se $a \in S_1$, $b \in S_2$ si ha

$$\mu_k(a^\wedge \times b^\wedge) = \binom{a \cup b}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{|a|}{i}\binom{|b|}{j} = \sum_{i+j=k} \mu_i(a^\wedge)\mu_j(b^\wedge)$$

Ora il prodotto cartesiamo ha la proprietà che

$$(a^\wedge \cup b^\wedge) \times c^\wedge = (a^\wedge \times c^\wedge) \cup (b^\wedge \times c^\wedge)$$

e quindi

$$\mu_k(A \times B) = \mu_k\Big(\bigcup_{a\in A} a^\wedge \times \bigcup_{b\in B} b^\wedge\Big) = \mu_k\Big[\bigcup_{a\in A, b\in B} (a^\wedge \times b^\wedge)\Big] =$$

$$= \sum_{a\in A, b\in B} \mu_k(a^\wedge \times b^\wedge) = \sum_{a\in A, b\in B} \sum_{i+j=k} \mu_i(a^\wedge)\mu_j(b^\wedge) =$$

$$= \sum_{i+j=k} \sum_{a\in A} \mu_i(a^\wedge) \sum_{b\in B} \mu_j(b^\wedge) = \sum_{i+j=k} \mu_i(A)\mu_j(B).$$

□

Questo teorema ci porta a congetturare che le misure elementari μ_k siano le uniche a valori non negativi con la proprietà binomiale espressa dall'identità (7).

2) Siano dati un gruppo G di permutazioni sull'insieme finito S, un ideale $A \in L(S)$ e una misura μ su $L(S)$; consideriamo allora la misura μ_A definita mediante la formula

$$\mu_A(B) = \sum_{\sigma\in G} \mu(A \cap \sigma B) \tag{8}$$

per ogni ideale B di $L(S)$. Si può dimostrare quanto segue.

TEOREMA 5. *La misura μ_A è G-invariante e simmetrica nel senso che*

$$\mu_A(B) = \mu_B(A)$$

per ogni coppia di ideali A e B di $L(S)$.

DIM. Risulta ovviamente

$$\mu_A(\sigma B) = \sum_{\alpha\in G} \mu(A \cap \alpha\sigma B) = \sum_{\pi\in G} \mu(A \cap \pi B) = \mu_A(B).$$

Inoltre

$$\mu_A(B) = \sum_{\sigma\in G} \mu(A \cap \sigma B) = \sum_{\sigma\in G} \mu((\sigma^{-1}A) \cap B) =$$

$$= \sum_{\tau\in G} \mu(\tau A) \cap B) = \mu_B(A).$$

Un problema che affronteremo in un prossimo lavoro è quello di determinare esplicitamente i coefficienti c_{ij} per cui risulti

$$\mu_A(B) = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij}\mu_i(A)\mu_j(B)\,.$$

3) Le misure binomiali definite dalla (3) soddisfano la disuguaglianza di Newton:

$$\mu_k^2 \geq \mu_{k-1}\mu_{k+1} \quad \text{per ogni} \quad k = 1, 2, \dots, n-1\,,$$

in quanto risulta

$$\binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \quad \text{per ogni} \quad n \geq 0\,, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

come si può facilmente dimostrare. Anche le misure δ_k definite dalla (5) soddisfano la proprietà di Newton. Ci si chiede: esistono altre misure di cui si è parlato al teorema 3 e soddifacenti la proprietà di Newton?

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CERASOLI - F. EUGENI - M. PROTASI: *Elementi di Matematica Discreta*, Zanichelli, 1988.

[2] M. CERASOLI - G. LETTA: *Sulla caratteristica di Eulero-Poincaré*, Rend. Acc. Naz. Sc. dei XL, 106°(1988), vol.XII, 259-267.

[3] G.C. ROTA: *On the foundations of combinatorial theory. I: Theory of Möbius functions*, Z. Wahrschein. u. verw. Geb. 2(1964), 340-368.

[4] G.C. ROTA: *On the combinatorics of the Euler characteristic*, in Finite Operator Calculus, Academic Press (1975), 135-147.

[5] G.C. ROTA: *Introduction to Geometric Probability*, Lezioni Lincee, S.N.S. Pisa, 2-22 Dic. 1986.

Lavoro pervenuto alla redazione il 21 settembre 1992
ed accettato per la pubblicazione il 3 dicembre 1992

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Mauro Cerasoli - Dipartimento di Matematica - Università - Via Vetoio - 67010 - Coppito - L'Aquila