Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 347-364

Problemi di trazione per sistemi parabolici in domini di classe C^1

R. SELVAGGI - I. SISTO[(•)]

RIASSUNTO: *Vengono studiati problemi di trazione per sistemi parabolici di Lamé in cilindri di classe C^1 nell'ipotesi che i dati al contorno siano in L^p, $1 < p < \infty$. Un teorema di esistenza ed unicità per tali problemi viene stabilito utilizzando formule di rappresentazione per le soluzioni in termini di potenziali di strato semplice.*

ABSTRACT: *Under the assumption that the boundary data are in L^p, $1 < p < \infty$, the traction boundary value problems for the parabolic Lamé systems of elasticity in C^1-cylinders are here investigated. By means of rapresentation formulas for the solutions in terms of single layer potentials, an existence and uniqueness theorem for such problems is established.*

KEY WORDS: *Boundary value problems - Parabolic systems – C^1-cylinders – Layer potentials – Singular integrals.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 35K50

– Introduzione

Scopo del presente lavoro è quello di studiare problemi di trazione relativi a sistemi parabolici (in [13] denominati "sistemi di elasticità pa-

(•) Lavoro eseguito sotto gli auspici del M.U.R.S.T. (40% e 60%).

rabolici di Lamé") del tipo

$$\begin{cases} \partial\vec{u}/\partial t = \Delta\vec{u} + \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\nabla(\mathrm{div}\vec{u}) & \text{in } D \times (0,T); \\ \lim_{t\to 0^+} \vec{u}(X,t) = \vec{0} & \text{uniformemente sui sottoinsiemi compatti di } D; \\ \lambda\,\mathrm{div}\,\vec{u}\cdot N + \mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^{\#})\cdot N = \vec{g} & \text{q.o. su } \partial D \times (0,T) \end{cases}$$

dove l'ultima uguaglianza è intesa nel senso della convergenza non tangenziale, D è un dominio di $\mathbf{R}^3$ di classe C^1 ed i dati al bordo sono in $L^p(\partial D \times (0,T))$, $(1 < p < \infty)$.

L'uso di alcuni risultati stabiliti in [11], in relazione all'esistenza in L^p della traccia non tangenziale di certi operatori integrali, e in [12], in relazione alla teoria degli integrali singolari parabolici in cilindri di classe C^1, ha consentito di ottenere un teorema di esistenza e unicità per il suddetto problema. Le tecniche adoperate sono quelle della teoria del potenziale. Più precisamente, tradotto il problema in quello della soluzione di un sistema di equazioni integrali singolari, si trova che la matrice dei simboli degli operatori singolari a questo associata è quella usata in [6] (cfr. Teor. 2.2) e, quale conseguenza, si prova il teorema di esistenza (cfr. Teor. 2.3). In aggiunta il teorema di unicità per lo stesso problema viene ottenuto approssimando D con una successione (D_h) di sottodomini di classe C^∞ e, conseguentemente, ogni soluzione u del problema di partenza con la successione (u_h) delle soluzioni dei corrispondenti problemi al contorno in $D_h \times (0,T)$ (cfr. Teor. 3.1).

Due lemmi fondamentali (Lem. 3.1 e Lem. 3.2), nei quali si valutano le norme di certi operatori S^h collegati con i problemi al contorno in $D_h \times (0,T)$ e dei loro pseudo-inversi L^h, vengono premessi per provare la convergenza di (u_h).

Per completezza va segnalato che il problema di sopra è stato risolto da A. GUTIERREZ in [6] nel caso in cui D è un dominio limitato di $\mathbf{R}^3$ avente frontiera sufficientemente regolare (di classe C^3) e, con tecniche differenti e limitatamente al caso $p = 2$, da Z. SHEN in [13] nel caso più generale in cui D è un dominio limitato di Lipschitz.

1 – Notazioni e premesse

Sia D un dominio limitato di $\mathbf{R}^3$ di classe C^1. Si pone, per $T \in (0,\infty)$,

$$D_T = D \times (0,T) \quad , \quad \partial D_T = \partial D \times (0,T).$$

Con $u, f, \cdots$ (rispettiv. $\vec{u}, \vec{f}, \cdots$) si denotano funzioni a valori in $\mathbf{R}$ (rispettiv. a valori in $\mathbf{R}^3$). Δu è il laplaciano di u, ∇u è il gradiente di u. Se $\vec{u} = (u_i)_{1\le i\le 3}$, $\Delta\vec{u}$ è il vettore $(\Delta u_i)_{1\le i\le 3}$, $\nabla\vec{u}$ è la matrice $(D_{x_j} u_i)_{1\le i,j\le 3}$, div $\vec{u}$ è la divergenza del vettore $\vec{u}$. Tali operatori agiscono soltanto sulle variabili spaziali.

Se $1 < p < \infty$, allora con $L^p(D_T)$ si denota lo spazio delle funzioni $\vec{u}$ tali che

$$\sup_{1\le i\le 3} \int_0^T ds \int_D |u_i(X,s)|^p \, dX < \infty$$

mentre con $L^p(\partial D_T)$ si denota lo spazio delle funzioni $\vec{u}$ tali che

$$\sup_{1\le i\le 3} \int_0^T ds \int_{\partial D} |u_i(Q,s)|^p \, dQ < \infty.$$

Inoltre con $L^p_{1,0}(D_T)$ si denota lo spazio delle funzioni $\vec{u} \in L^p(D_T)$ tali che ogni derivata prima $D_{X_j}\vec{u}$ sia in $L^p(D_T)$, con $\mathcal{M}^p_{2,1}(D_T)$ lo spazio delle funzioni $\vec{u} \in L^p_{1,0}(D_T)$ tali che $D_t\vec{u}$ e ogni derivata seconda $D^2_{X_iX_j}\vec{u}$ siano in $L^p(\Omega_T)$ per ogni insieme aperto $\Omega \subset\subset D$ e, infine, con $\mathcal{N}^p(D_T)$ lo spazio delle funzioni $\vec{u} \in L^p_{1,0}(D_T)$ tali che ogni derivata prima $D_{X_j}\vec{u}$ abbia traccia non tangenziale in $L^p(\partial D_T)$ (cf. Def. 1.4 di [11]).

Sia L il seguente operatore parabolico del secondo ordine

$$L = \Delta + \frac{\lambda+\mu}{\mu} \nabla(\mathrm{div}) - D_t \tag{1.1}$$

con λ e μ costanti positive. Una matrice fondamentale di soluzioni per L è $\Gamma = (\Gamma_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ dove

$$\Gamma_{ij}(X,t) = \frac{1}{(2t)^{\frac{3}{2}}}\Big(\delta_{ij} e^{\frac{-|X|^2}{4t}} + \frac{D^2_{X_iX_j}}{4\pi} \int_{\mathbf{R}^3} \Big(e^{-\frac{|X-Y|^2}{4t}} - \frac{e^{\frac{-|X-Y|^2}{4(m+1)t}}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}}\Big)\frac{1}{|Y|}\,dY\Big)$$

con $m = (\lambda+\mu)/\mu$.

Si osservi che per ogni $\alpha \in \mathbf{N}^3$ risulta (cf. p. 241 di [5])

$$|D^\alpha \Gamma_{ij}(X,t)| \le \frac{c_\alpha}{t^{\frac{3+|\alpha|}{2}}} e^{-c_\alpha \frac{|X|^2}{t}} \tag{1.2}$$

e, inoltre, posto

$$v_{ij}(X,t) = \delta_{ij}\, e^{-|X|^2 t} + e^{-|X|^2 t}(e^{-m|X|^2 t} - 1)\frac{X_i X_j}{|X|^2} \tag{1.3}$$

risulta

$$\Gamma_{ij}(X,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-iX\cdot Y} v_{ij}(Y,t)\, dY. \tag{1.4}$$

Si noti ancora che

$$v_{i,j}(X,1) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3) \tag{1.5}$$

in quanto la funzione $x \to (e^{-x} - 1)/x$ è una funzione di classe C^∞ in $[0,\infty)$ con derivate di ogni ordine limitate.

2 – Teorema di esistenza

Si pone il seguente

PROBLEMA 1. *Assegnata una funzione $\vec{g} \in L^p(\partial D_T)$, $1 < p < \infty$, determinare $\vec{u} \in \mathcal{N}^p(D_T) \cap \mathcal{M}^p_{2,1}(D_T)$ tale che*

P$_1$) *$L\vec{u} = \vec{0}$ in D_T,*

P$_2$) *$\lim_{t\to 0^+} \vec{u}(X,t) = \vec{0}$ uniformemente su ogni sottoinsieme compatto di D,*

P$_3$) *Per ogni $l = 1,2,3$, $D_{X_l}\vec{u}$ ha traccia non tangenziale in $L^p(\partial D_T)$ (cf. Def. 1.4 di [11]) risultando*

$$\lambda\, \mathrm{div}\, \vec{u}(P,t) \cdot N(P) + \mu\, (\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^{\#})(P,t) \cdot N(P) = \vec{g}(P,t)$$

dove $\#$ indica la trasposta di una matrice e $N(P)$ è il versore della normale interna in P a ∂D.

Per lo studio di tale problema si considera il potenziale di semplice strato

$$\vec{u}(X,t) = \int_0^t ds \int_{\partial D} \Gamma(X-Q, t-s)\vec{f}(Q,s)\, dQ. \tag{2.1}$$

Da ora in avanti, se $\vec{v}$ è una funzione di classe C^1 in D_T, si pone

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \nu_P}(X,t) = \lambda \operatorname{div} \vec{u}(X,t) \cdot N(P) + \mu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^{\#})(P,t) \cdot N(P)$$

e se, per ogni $l = 1,2,3$, $D_{X_l}\vec{v}$ ha la traccia non tangenziale in $L^p(\partial D_T)$, allora si pone

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \nu}(P,t) = \lambda \operatorname{div} \vec{v}(P,t) \cdot N(P) + \mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^{\#})(P,t) \cdot N(P).$$

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA 2.1. *Se $\vec{f} \in L^p(\partial D_T)$ con $1< p <\infty$, allora per ogni $l = 1,2,3$, $D_{X_l}\vec{u}$ ha traccia non tangenziale in $L^p(\partial D_T)$ e si ha*

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu}(P,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t-\varepsilon} ds \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_P}\Gamma(P-Q,t-s)\vec{f}(Q,s)\,dQ + \tag{2.2}$$

$$+\vec{f}(P,t) \overset{*}{\int_{\pi_P}} dQ \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \nu_P}\Gamma(P-Q+N(P),s)\,ds$$

dove la derivata conormale $\partial/\partial\nu_P$ è applicata a ciascuna colonna della matrice Γ, il limite esistendo puntualmente quasi ovunque in $L^p(\partial D \times (0,\infty))$ e l'integrale con $*$ essendo definito assumendo quali regioni di esclusione le regioni del piano tangente π_P a ∂D in P esterne alla sfera di centro P e raggio divergente.

DIM. Si ponga, per ogni $i,j,l \in \{1,2,3\}$,

$$K_{lij}(X,t) = \begin{cases} D_{X_l}\Gamma_{ij}(X,t), & \text{se } t > 0; \\ 0, & \text{se } t \le 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tenendo presenti (1.3), (1.4) e (1.5), si verifica che $K_{lij} \in \mathcal{A}_2^*$ (cfr. Def. 1.3 di [11]). Sia $K_l = (K_{lij})_{1\le i,j\le 3}$. Osservato che

$$D_{X_l}\vec{u}(X,t) = \int_0^t ds \int_{\partial D} K_l\,(X-Q,t-s)\vec{f}(Q,s)\,dQ,$$

a causa del Teor. 4.2 di [11] $D_{X_l}\vec{u}$ ha traccia non tangenziale in $L^p(\partial D_T)$ e risulta

$$D_{X_l}\vec{u}(P,t) = \mathcal{K}_l(\vec{f})(P,t) + a_l(P,t)\vec{f}(P,t) \tag{2.4}$$

dove

$$\mathcal{K}_l(\vec{f})(P,t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} ds \int_{\partial D} K_l(P-Q,t-s)\vec{f}(Q,s)\,dQ \tag{2.5}$$

e

$$a_l(P,t) = \int_{\pi_P}^{*} dQ \int_0^{\infty} K_l(P-Q+N(P),s)\,ds\,. \tag{2.6}$$

TEOREMA 2.2. *La matrice di operatori $S = (S_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ che ad ogni $\vec{f} \in L^p(\partial D_T)$ $(1 < p < \infty)$ associa il secondo membro di* (2.2) *è una matrice di operatori integrali singolari parabolici di tipo $\mathcal{P}^\infty_\omega$ su ∂D_T* (cfr. Def. 1.1 di [12]). *Il rango della matrice $\sigma(S)(P,t;\bar{\eta},\tau) = (\sigma(S_{ij})(P,t;\bar{\eta},\tau))_{1\le i,j\le 3}$ dei simboli degli operatori S_{ij} è tre se $(\bar{\eta},\tau) \neq (0,0)$ e $Im\,\tau \ge 0$.*

DIM. Si osservi che a causa di (2.2) e (2.4), se $a_l = (a_{lij})_{1\le i,j\le 3}$ e $\mathcal{K}_l = (\mathcal{K}_{lij})_{1\le i,j\le 3}$, allora

$$S_{ij} = \bar{S}_{ij} + d_{ij} \tag{2.7}$$

dove

$$\bar{S}_{ij} = \lambda N_i \sum_{l=1}^{3} \mathcal{K}_{llj} + \mu \sum_{l=1}^{3} N_l(\mathcal{K}_{lij} + \mathcal{K}_{ilj}) \tag{2.8}$$

e

$$d_{ij} = \lambda N_i \sum_{l=1}^{3} a_{llj} + \mu \sum_{l=1}^{3} N_l(a_{lij} + a_{ilj})\,. \tag{2.9}$$

Essendo ogni K_{lij} elemento di $\mathcal{A}^*_2$, a causa del Teor. 1.3 di [10] l'operatore $\mathcal{K}_{lij}$ e, conseguentemente, l'operatore $\bar{S}_{ij}$, risultano operatori integrali singolari parabolici di tipo $\mathcal{P}^\infty_\omega$ su ∂D_T.

Dalla continuità di a_{lij} e, quindi, di d_{ij} su ∂D_T consegue la prima parte dell'asserto. Riguardo alla seconda si considerino $(P,t) \in \partial D_T$, un vettore $\bar{\eta}$ sul fibrato cotangente a ∂D in P e un elemento τ dell'insieme $\overline{\mathbf{C}}_+$ costituito dai numeri complessi avente parte immaginaria non negativa.

Se $\tilde{x}$ è l'omeomorfismo canonico associato ad un intorno coordinato $B(\bar{P},\delta) \cap \partial D$ contenente P (cfr. n.1 di [12]) e $|d\tilde{x}_x^{-1}|$ è il valore assoluto del determinante dell' inversa $d\tilde{x}_x^{-1}$ del differenziale di $\tilde{x}$ in $x = \tilde{x}(P)$, posto $\eta = (d\tilde{x}_x^{-1})^{\#}(\bar{\eta})$, dal Teor. 1.3 di [10] consegue che

$$\sigma(\mathcal{K}_{lij})(P,t;\bar{\eta},\tau) = \lim_{\substack{\epsilon\to 0+\\ R\to\infty}} \int_\epsilon^R e^{i\tau s} ds \int_{\mathbf{R}^2} K_{lij}(d\tilde{x}_x^{-1}(z),s) e^{i\eta z} |d\tilde{x}_x^{-1}|\, dz$$

il limite al secondo membro esistendo puntualmente se $(\bar{\eta},\tau) \neq (0,0)$.

Da quanto sopra si deduce che

$$\begin{aligned}
&\sigma(S)(P,t;\bar{\eta},\tau) = \\
(2.10)\qquad &= \lim_{\substack{\epsilon\to 0+\\ R\to\infty}} \int_\epsilon^R e^{i\tau s} ds \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial \nu_P}\Gamma(d\tilde{x}_x^{-1}(z),s) e^{i\eta z} |d\tilde{x}_x^{-1}| dz + \\
&+ \int_{\pi_P}^{*} dQ \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial P_P}\Gamma(P-Q+N(P),s)\, ds\,.
\end{aligned}$$

Sia L^{-1} una rotazione di $\mathbf{R}^3$ che trasformi $N(P)$ nel versore $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Effettuando il cambiamento di variabili $z = F(w) = d\tilde{x}_x(L(w,0))$, risulta[1]

$$\begin{aligned}
\sigma(S)(P,t;\bar{\eta},\tau) = \Bigg\{ &\lim_{\substack{\epsilon\to 0+\\ R\to\infty}} \int_\epsilon^R e^{i\tau s}\, ds \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial e_3}\Gamma((w,0),s) e^{iF^{\#}(\eta)\cdot w}\, dw + \\
&+ \int_{\mathbf{R}^2}^{*} dw \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial e_3}\Gamma((w,1),s)\, ds \Bigg\} \cdot L^{-1} = M \cdot L^{-1}
\end{aligned}$$

(1) Per ogni funzione $\vec{v}$ a valori in $\mathbf{R}^3$ si pone

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial e_3}(X,t) = \lambda \operatorname{div} \vec{v}(X,t)\cdot \vec{e}_3 + \mu\,(\nabla v + (\nabla v)^{\#})(X,t)\cdot \vec{e}_3.$$

dove $\partial/\partial e_3$ è applicata a ciascuna colonna della matrice Γ. Pertanto si ottiene la seconda parte della tesi provando che se $(\eta, \tau) \neq (0,0)$ e $\operatorname{Im} \tau \geq 0$, allora il rango della matrice M è uguale a tre. A questo scopo basta ragionare in modo analogo a quello del Teor. 1.2.4 di [6].

TEOREMA 2.3. *Il* Problema 1 *ha almeno una soluzione.*

DIM. Dal Teor. 2.2 consegue che esiste una matrice E di operatori integrali singolari parabolici di tipo $\mathcal{P}_\omega^\infty$ su ∂D_T che sia l'inversa di S. Posto $\vec{f} = E(\vec{g})$ e costruita la $\vec{u}$ tramite la 2.1, si prova che $\vec{u}$ è soluzione del Problema 1.

Sia $\alpha \in (0,1)$. Allora (cfr. Teor.2.1) esiste $\delta_{\alpha D} > 0$ tale che la funzione massimale non tangenziale $(D_{X_l}\vec{u})^*$ relativa al cono di ampiezza α sia in $L^p(\partial D_T)$. Se $P \in \partial D$ e se

$$B(P, 4\delta) \cap D = \{(x, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : x_3 > \xi(x)\} \cap B(P, 4\delta)$$

con $\xi \in C_0^1(\mathbf{R}^2)$ e $\xi(0) = D_{x_i}\xi(0) = 0$ $(i = 1, 2)$, allora si ha che

$$||D_{X_l}\vec{u}||^p_{L^p(B(P,\delta)\cap D_T)} \leq \int_0^T dt \int_0^{2\delta} d\varepsilon \int_{|x|<\delta} \sup_i |D_{X_l}u_i(x, \xi(x) + \varepsilon, t)|^p dx \leq$$

$$\leq \int_0^T dt \int_0^{2\delta} d\varepsilon \int_{|x|<\delta} \sup_i |(D_{X_l}u_i)^*(x, \xi(x), t)|^p dx.$$

Dal Teor. 2.1 e dal Teor. 3.2 di [11] consegue che $\vec{u} \in \mathcal{N}^p(D_T) \cap \mathcal{M}^p_{2,1}(D_T)$ e che

$$\sum_{|\beta|\leq 1} ||D_X^\beta \vec{u}||_{L^p(D_T)} + \sum_{|\beta|=1} ||(D_X^\beta \vec{u})^*||_{L^p(\partial D_T)} \leq c||\vec{g}||_{L^p(\partial D_T)}. \tag{2.11}$$

Da tutto ciò, tenendo presenti i teoremi 2.1 e 2.2, consegue l'asserto.

3 – Teorema di unicità

Si assume, preliminarmente, che

P_1) (D_h) è una successione di insiemi aperti di D di classe C^∞ tali che $D_h \uparrow D$ in C^1 (cfr. [8] e pag. 85 di [9]),

P_2) $(B_r)_{1\le r\le n}$ è un ricoprimento di ∂D costituito da sfere aperte $B_r = B(Q_r, \delta)$ di centro $Q_r \in \partial D$ e raggio $\delta > 0$ tale che per ogni $r = 1, ..., n$ risulti

$$B_r \cap \partial D = \{(x, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : x_3 = \xi_r(x)\} \cap B_r$$

e

$$B_r \cap \partial D_h = \{(x, x_3) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} : x_3 = \xi_{rh}(x)\} \cap B_r$$

con $\xi_r \in C_0^1(\mathbf{R}^2)$, $\xi_r(0) = D_{x_l}\xi_r(0) = 0 (l = 1,2)$, $\max_x |\nabla\xi_r(x)| \le m_0$, $\xi_{rh} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ e $\lim_{h\to\infty} ||\xi_{rh} - \xi_r||_{C^1(\mathbf{R}^2)} = 0$.

Per ogni $r = 1, ..., n$ si denotano con $\tilde{x}_r$ e $\tilde{x}_{rh}$ rispettivamente gli omeomorfismi canonici associati a $B_r \cap \partial D$ e $B_r \cap \partial D_h$, con Λ_{rh} il diffeomorfismo $(\tilde{x}_{rh})^{-1} \circ \tilde{x}_r$ di $B_r \cap \partial D$ su $B_r \cap \partial D_h$ e, per ogni $P \in B_r \cap \partial D$, con P_h il punto $\Lambda_{rh}(P)$.

TEOREMA 3.1. *Il* Problema 1 *ha un'unica soluzione.*

DIM. È sufficiente provare che se $\vec{u}$ è una soluzione del Problema 1, allora $\vec{u}$ coincide con la soluzione costruita nel Teor. 2.3. A questo scopo per ogni $h \in \mathbf{N}$ sia $\vec{u}_h$ la restrizione di $\vec{u}$ a D_h. Appartenendo $\vec{u}$ a $\mathcal{M}_{2,1}^p(D_T)$, a causa dei teoremi di immersione di Sobolev nel cilindro $(D_h)_T$ la funzione $\vec{u}_h$ verifica le ipotesi del Teor. 1.2.8 di [6]. Pertanto, se $(X, t) \in D_T$, per h sufficientemente grande si ha

$$\vec{u}(X,t) = \int_0^t ds \int_{\partial D_h} \Gamma(X - Q, t - s) E^h(\vec{g}_h)(Q, s)\, dQ \tag{3.1}$$

dove, denotata con S^h la matrice ottenuta sostituendo nella matrice S del Teor.2.2 D con D_h, si è posto $E^h = (S^h)^{-1}$ e

$$\vec{g}_h(P,t) = \lim_{s\to 0^+} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu_P}(P + sN(P), t) \tag{3.2}$$

il limite esistendo in $L^p((\partial D_h)_T)$.

Per provare l'asserto basta provare che se $(X,t) \in D_T$, allora

$$(3.3) \qquad \lim_{h\to\infty} \int_0^t ds \int_{\partial D_h} \Gamma(X-Q,t-s) E^h(\vec{g}_h)(Q,s)\, dQ =$$

$$= \int_0^t ds \int_{\partial D} \Gamma(X-Q,t-s) E(\vec{g})(Q,s)\, dQ.$$

Si provano preliminarmente i seguenti lemmi:

LEMMA 3.1. *Esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che*
i) $\sup_{h\geq\nu} ||S^h|| < \infty$,
ii) $\sup_{h\geq\nu} ||L^h|| < \infty$
dove L^h è una matrice di operatori integrali singolari parabolici di tipo $\mathcal{P}^\infty_\omega$ su $(\partial D_h)_T$ avente simbolo $\sigma(S^h)^{-1}$.

DIM. Si osservi, dapprima, che sostituendo nel Teor. 2.2 D con D_h, da (2.7) si deduce che

$$(3.4) \qquad S^h_{ij} = \bar{S}^h_{ij} + d^h_{ij}.$$

A causa di (2.6) e (2.9) risulta

$$(3.5) \qquad \lim_{h\to\infty} d^h_{ij}(P_h) = d_{ij}(P)$$

uniformemente rispetto a $P \in B_r \cap \partial D$ e, quindi,

$$(3.6) \qquad \sup_h \sup |d^h_{ij}(\partial D_h)| < \infty.$$

Per valutare la norma $||S^h_{ij}||$, a causa di (2.8) basta valutare la norma dell'operatore euclideo definito ponendo

$$(3.7)\ \mathcal{R}^h_{lij} g(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{t-\varepsilon} ds \int_{\mathbf{R}^2} K_{lij}(x-z, \xi_{rh}(x)-\xi_{rh}(z), t-s) g(z,s)\, dz.$$

Si noti che se $\mathcal{R}_{lij}$ è l'operatore ottenuto sostituendo nel secondo membro di (3.7) ξ_{rh} con ξ_r, a causa del Lem. 3.1 e del Teor. 3.1 di [11] si può asserire che esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{h\geq\nu} ||\mathcal{R}^h_{lij}|| \leq \sup_{h\geq\nu} ||\mathcal{R}^h_{lij} - \mathcal{R}_{lij}|| + ||\mathcal{R}_{lij}|| < \infty. \tag{3.8}$$

Da (3.4), (3.6) e (3.8) consegue i). Si passa a provare ii). A questo scopo sia $(\Phi_r)_{1\leq r\leq n}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $(B_r)_{1\leq r\leq n}$ di ∂D con $\Phi_r \in C^1_0(B_r)$ e si consideri $\Psi_r \in C^1_0(B_r)$ con $\Psi_r = 1$ in un intorno di spt (Φ_r). Come è noto, si ha allora

$$L^h \vec{f} = \sum_{r=1}^{n} \Phi_r\, L^h_r(\Psi_r f \circ \tilde{x}^{-1}_{rh}) \circ \tilde{x}_{rh}$$

dove

$$L^h_r\vec{g}(x,t) = b^h_r(x)\vec{g}(x,t) + \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{t-\varepsilon} ds \int_{\mathbf{R}^2} H^h_r(x, x-y, t-s)\vec{g}(y,s)\, dy =$$

$$= b^h_r(x)\vec{g}(x,t) + \mathcal{H}^h_r(\vec{g})(x,t)$$

è una matrice di operatori integrali singolari parabolici di tipo $\mathcal{P}^\infty_\omega$ su $\mathbf{R}^2 \times (0,\infty)$ tale che

$$\Phi_r(P_h)\ \sigma(L^h_r)(\tilde{x}_{rh}(P_h), t; \eta_h, \tau) = \Phi_r(P_h)\ \sigma(S^h)^{-1}(P_h, t; \tilde{\eta}_h, \tau) \tag{3.9}$$

con $\eta_h = (d\tilde{x}^{-1}_{rh})^{\#}(\tilde{\eta}_h)$ ed $\tilde{\eta}_h$ elemento del fibrato cotangente a ∂D_h in P_h.

Si noti che essendo, per ogni $\tau\neq 0$, $b^h_r(x) = \sigma(S^h)^{-1}((\tilde{x}_{rh})^{-1}(x); 0, \tau) = (d^h_{ij}(x, \xi_{rh}(x)))^{-1}$, a causa di (3.5) e del Teor. 2.2 esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{h\geq\nu} \sup_x\ |\Phi_r(x, \xi_{rh}(x)) \cdot b^h_r(x)| < \infty. \tag{3.10}$$

A causa del Teor. 1.3.2 di [3], per $\lambda \in (0,1)$ si ha

$$||H^h_r|| \leq c \int_{\mathbf{R}^2} (1 + |y|^\lambda)\ \sup_x |(1+\Delta_y) H^h_r(x; y, 1)|\, dy.$$

Il precedente integrale si spezza in uno esteso all' insieme $\{y : |y| > 1\}$ ed in un altro esteso all'insieme $\{y : |y| < 1\}$ denotati rispettivamente con I_1 e I_2. Si osservi che se $\widehat{H_r^h}(x;\cdot,1)$ è la trasformata di Fourier di $H_r^h(x;\cdot,1)$, allora, a causa dell'olomorfia della funzione integranda (cfr. Teor. 2.4 di [7]), per $\xi \neq 0$ si ha

$$D_\xi^\alpha \widehat{H_r^h}(x;\xi,1) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_\xi^\alpha D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,t)e^{-it}\, dt =$$

$$= \int_{|t|\geq 1} D_\xi^\alpha D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,t)e^{-it}\, dt - i\int_0^\pi D_\xi^\alpha D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,e^{i\vartheta})e^{-ie^{i\vartheta}} e^{i\vartheta}\, d\vartheta.$$

Da ciò consegue che

$$|I_1| \leq c \sum_{|\alpha|=3}^{5} \sup_{\substack{|z|^2+|\tau|^2=1 \\ Im\tau\geq 0 \\ z\neq 0,x}} |D_\xi^\alpha D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;z,\tau)|.$$

Inoltre, essendo la funzione integranda olomorfa (cfr. Teor. 1.4.2 di [3]), si ha

$$\widehat{H_r^h}(x;\xi,1) = (-i)^l \int_{-\infty}^{+\infty} D_t^l \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,t)e^{-it}\, dt =$$

$$= (-i)^l \Big(\int_{|t|\geq 1} D_t^l \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,t)e^{-it}\, dt - i\int_0^\pi D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;\xi,e^{i\vartheta})e^{-ie^{i\vartheta}} e^{i\vartheta}\, d\vartheta \Big)$$

e, quindi,

$$|I_2| \leq c \sum_{l=2}^{4} \sup_{\substack{|z|^2+|\tau|^2=1 \\ Im\tau\geq 0 \\ z\neq 0,x}} |D_\tau^l \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;z,\tau)|.$$

Consegue che

$$||\Phi_r \circ (\widetilde{x}_{rh})^{-1}\mathcal{H}_r^h|| \leq c\Big(\sum_{|\alpha|=3}^{5} \sup_{\substack{|z|^2+|\tau|^2=1 \\ Im\tau\geq 0 \\ z\neq 0,x}} |\Phi_r(x,\xi_{rh}(x)) D_z^\alpha D_t \sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;z,\tau)| +$$

$$+\sum_{l=2}^{4}\sup_{\substack{|z|^2+|\tau|^2=1\\ Im\tau\geq 0\\ z\neq 0,x}}|\Phi_r(x,\xi_{rh}(x))D_t^l\sigma(\mathcal{H}_r^h)(x;z,\tau)|\Big).$$

Pertanto, a causa di (2.7), (2.8). (3.9), (3.10) e del Teor. 2.2, si ottiene la ii) non appena si prova che per ogni α e per ogni k si ha

$$(3.11)\qquad \lim_{h\to\infty}(\Phi_r(x,\xi_{r,h}(x))D_z^\alpha D_t^k(\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon^R e^{its}\,ds\cdot$$

$$\cdot\int_{\mathbf{R}^2}(K_{lij}(\eta,\nabla\xi_{rh}(x)\cdot\eta,s)-K_{lij}(\eta,\nabla\xi_r(x)\cdot\eta,s))e^{iz\eta}d\eta)_{t=\tau}=0$$

uniformemente rispetto a $x\in\mathbf{R}^2$, $z\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ e $\tau\in\overline{C}_+$.

Se $|\alpha|+k=0$, posto $z'=z\cdot|z|^{-1}$, a causa del teorema del valor medio si ottiene

$$A_1=|\int_0^1\frac{e^{i\frac{\tau s}{|z|^2}}}{s}\,ds\int_{\mathbf{R}^2}(e^{iz'\sqrt{s}\eta}-1)(K_{lij}(\eta,\nabla\xi_{rh}(x)\cdot\eta,1)-$$

$$-K_{lij}(\eta,\nabla\xi_r(x)\cdot\eta,1))d\eta|\leq c\sup_x|\nabla\xi_{rh}(x)-\nabla\xi_r(x)|$$

e, inoltre,

$$A_1'=|\int_1^\infty\frac{e^{i\frac{\tau s}{|z|^2}}}{s}\,ds\int_{\mathbf{R}^2}e^{iz'\sqrt{s}\eta}(K_{lij}(\eta,\nabla\xi_{rh}(x)\cdot\eta,1)-K_{lij}(\eta,\nabla\xi_r(x)\cdot\eta,1))\,d\eta|\leq$$

$$\leq c|\nabla\xi_{rh}(x)-\nabla\xi_r(x)|\,|\int_1^\infty\frac{e^{i\frac{\tau s}{|z|^2}}}{s}\,ds\int_{\mathbf{R}^2}\eta e^{iz'\sqrt{s}\eta}D_{X_3}K_{lij}(\eta,\vartheta\eta,1)\,d\eta|$$

con ϑ appartenente al segmento congiungente $\nabla\xi_{rh}(x)$ con $\nabla\xi_r(x)$. A causa di (1.2) e del Lem. 1.1 di [1], $D_{X_3}K_{ij}^l(X,1)$ risulta una funzione intera e, quindi, $D_{X_3}K_{ij}^l(\eta,\vartheta\eta,1)$ risulta una funzione intera di η.

Con ragionamento analogo a quello di pag. 341 di [10], supposto che $|\beta|=1$, si ha

$$|\int_{\mathbf{R}^2}e^{iz'\sqrt{s}\eta}\eta^\beta D_{X_3}K_{lij}(\eta,\vartheta\eta,1)\,d\eta|\leq ce^{-As}$$

con c e A costanti dipendenti da β, K_{lij}, $\sup|\nabla\xi_{rh}|$ e $\sup|\nabla\xi_r|$. Da tutto ciò segue che

$$|A_1'| \leq c\sup_x |\nabla\xi_{rh}(x) - \nabla\xi_r(x)|.$$

Utilizzando le maggiorazioni ottenute per A_1 e A_1', si ottiene allora la (3.11) nel caso in cui $|\alpha| + k = 0$.

Se $|\alpha|+k > 0$, con ragionamento analogo a quello seguito per valutare A_1 e A_1' si ottiene che

$$A_2 = |\int_0^\infty \frac{e^{i\tau s}}{s} s^k\, ds\, D_z^\alpha \int_{\mathbf{R}^2} e^{iz\sqrt{s}\eta}(K_{lij}(\eta, \nabla\xi_{rh}(x)\cdot\eta, 1)-$$

$$-K_{lij}(\eta, \nabla\xi_r(x)\cdot\eta, 1))\, d\eta| \leq c\sup_x |\nabla\xi_{rh}(x) - \nabla\xi_r(x)|$$

e quindi la (3.11) anche in questo caso.

LEMMA 3.2. *Posto $J^h = I - L^h S^h$, allora esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che*

$$\sup_{h\geq\nu} ||(I - J^h)^{-1}|| < \infty. \tag{3.12}$$

DIM. Si ottiene l'asserto non appena si prova l'esistenza di $\varepsilon > 0$ e $\nu \in \mathbf{N}$ tali che

$$\sup_{h\geq\nu} ||\chi_{(a,a+\varepsilon)} J^h \chi_{(a,a+\varepsilon)}\vec{f}||_{L^p((\partial D_h)_T)} \leq 1/2||\vec{f}\chi_{(a,a+\varepsilon)}||_{L^p((\partial D_h)_T)}. \tag{3.13}$$

Per ogni $r = 1, ..., n$ sia Θ_r una funzione di $C^1(\mathbf{R}^3)$ con supporto contenuto in B_r tale che $\Theta_r = 1$ in un intorno di spt (Ψ_r) e sia $\tilde{S}_r^h$ la matrice di operatori integrali singolari parabolici euclidei associata a S^h nell'intorno coordinato $B_r \cap \partial D$. Si ha allora

$$J^h(\vec{f}) = \Big(-\sum_{r=1}^n \Phi_r L_r^h\big((\Psi_r S^h(1-\Theta_r)\vec{f}\big) \circ (\tilde{x}_{rh})^{-1}\big) \circ \tilde{x}_{rh} - \tag{3.14}$$

$$-\sum_{r=1}^n \Phi_r L_r^h((\Psi_r - 1)\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}\tilde{S}_r^h(\Theta_r\vec{f}\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}))\circ\tilde{x}_{rh}\Big) -$$

$$-\sum_{r=1}^{n}\Phi_r \bar{J}_r^h(\Theta_r\vec{f}\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1})\circ\tilde{x}_{rh}-\sum_{r=1}^{n}\Phi_r L_r^h(\bar{\bar{J}}\,_r^h(\vec{f})\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1})\circ\tilde{x}_{rh}=$$
$$=(A+B+C)(\vec{f})$$

dove[2]

$$\bar{J}_r^h = L_r^h\tilde{S}_r^h - L_r^h\circ\tilde{S}_r^h$$

e

$$\bar{\bar{J}}\,_r^h(\vec{f})\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}=\Psi_r S^h(\Theta_r\vec{f})\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}-\Psi_r\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}\tilde{S}_r^h((\Theta_r\vec{f})\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1}).$$

Si verifica facilmente che

$$\sup_h ||\chi_{(a,a+\varepsilon)}A(\chi_{(a,a+\varepsilon)}\vec{f})||_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq c\varepsilon||\vec{f}\chi_{(a,a+\varepsilon)}||_{L^p((\partial D_h)_T)}. \tag{3.15}$$

Tenendo presenti (2.7) ed il Teor. 1.3 di [10], si vede che $\bar{\bar{J}}\,_r^h$ è somma di un numero finito di addendi del tipo

$$\Psi_r(x,\xi_{rh}(x))D_{x_m}\xi_{rh}(x)\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{t-\varepsilon}ds\int_{\mathbf{R}^2}(K_{lij}(x-z,\xi_{rh}(x)-\xi_{rh}(z),t-s)\varphi_{rh}(z)-$$
$$-K_{lij}(x-z,\nabla\xi_{rh}(x)(x-z),t-s)\varphi_{rh}(x))g(z,\xi_{rh}(z),s)\Theta_r(z,\xi_{rh}(z))\,dz$$

dove $\varphi_{rh}(y)=\sqrt{1+|\nabla\xi_{rh}(y)|^2}$.

Se $q\in\mathbf{N}$ e q è sufficientemente grande, tenendo presente il Lem. 3.1 di [11] ed utilizzando l'appartenenza di ξ_{rq} a $C^\infty(\mathbf{R}^2)$, si può asserire che esiste $\nu\in\mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{h\geq\nu}||\chi_{(a,a+\varepsilon)}\bar{\bar{J}}\,_r^h\chi_{(a,a+\varepsilon)}\vec{f}||_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq \tag{3.16}$$
$$\leq c(||\xi_{rh}-\xi_{rq}||_{C_0^1(\mathbf{R}^2)}+\varepsilon)\,||\vec{f}\cdot\chi_{(a,a+\varepsilon)}||_{L^p((\partial D_h)_T)}.$$

A causa del Teor. 1.4.3 di [3] per ogni $\varrho>0$ si ha

$$||\chi_{(a,a+\varepsilon)}\Phi_r\bar{J}_r^h((\Theta_r\vec{f}\chi_{(a,a+\varepsilon)})\circ(\tilde{x}_{rh})^{-1})\circ\tilde{x}_{rh}||_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq$$

---

[2] $L_r^h\circ\tilde{S}_r^h$ denota l'operatore pseudoprodotto di L_r^h per $\tilde{S}_r^h$ (cfr. Teor. 1.1.4 di [2]).

$$\leq c\Big(\int_{\mathbf{R}^2} \|(1+\Delta_\xi)H_r^h(\cdot,\xi,1)\|_{L^\infty}|\xi|^\lambda\, d\xi\cdot$$

$$\cdot\int_{\mathbf{R}^2} (\omega_\eta^h(\varrho^{-1})+\varrho\epsilon^\lambda)\|(1+\Delta_\eta)V_r^h(\cdot,\eta,1)\|_{L^\infty}|\eta|^\lambda\, d\eta\Big)\,\|\vec{f}\chi_{(a,a+\epsilon)}\|_{L^p((\partial D_h)_T)}$$

dove V_r^h è il nucleo dell'operatore $\tilde{S}_r^h$ e

$$\omega_\eta^h(\varrho)=\sup_{|x-x'|\leq\varrho}|(1+\Delta_\eta)(V_r^h(x,\eta,1)-V_r^h(x',\eta,1))|.$$

Tenendo presente la (1.3), con ragionamenti analoghi a quelli fatti per provare ii) del Lem. 2.1, si ottiene che

$$\|\chi_{(a,a+\epsilon)}\Phi_r\bar{J}_r^h((\Theta_r\vec{f}\chi_{(a,a+\epsilon)})\circ(\bar{x}_{rh})^{-1})\circ\bar{x}_{rh}\|_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq \tag{3.17}$$

$$\leq c(\varrho\epsilon^\lambda+\|\xi_{rh}-\xi_r\|_{C_0^1(\mathbf{R}^2)}+\sup_{|x-x_1|\leq\varrho}|\nabla\xi_r(x)-\nabla\xi_r(x_1)|)\cdot$$

$$\cdot\|\chi_{(a,a+\epsilon)}\vec{f}\|_{L^p((\partial D_h)_T)}.$$

Da (3.15), (3.16) e (3.17) consegue la (3.13).

Si passa a provare la (3.3). Essendo $E^h=(I-J^h)^{-1}L^h$, a causa dei lemmi 3.1 e 3.2 esiste $\nu\in\mathbf{N}$ tale che per ogni $h\geq\nu$ si abbia

$$\|E^h(\vec{g}_h)\|_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq c\|\vec{g}_h\|_{L^p((\partial D_h)_T)}. \tag{3.18}$$

Inoltre per $\alpha\in(0,1)$, se h è sufficientemente grande, se s è sufficientemente piccolo e se $m_0\leq((1/\alpha)-1)^{1/2}$, allora per ogni $Q\in B_r\cap\partial D$ il punto $X=Q_h+sN(Q_h)$ appartiene al cono $C_Q^\alpha=\{X\in D:(X-Q)\cdot N(Q)>\alpha|P-Q|\}$. Da ciò, da (3.2) e (3.18) consegue che esiste $\nu\in\mathbf{N}$ tale che

$$\sup_{h\geq\nu}\|E^h(\vec{g}_h)\|_{L^p((\partial D_h)_T)}\leq c\sum_{|\beta|\leq 1}\|D_X^\beta u^*\|_{L^p(\partial D_T)}$$

essendo $(D_X^\beta u)^*$ la funzione massimale non tangenziale di $D_X^\beta u$ relativa alla famiglia di coni di ampiezza α. Consegue che per $r=1,\dots,n$, la successione $(E^h(\vec{g}_h)\circ(\Lambda_{rh}^{-1}))$ è equilimitata in $L^p(B_r\cap\partial D_T)$ e, quindi, esiste una sottosuccessione della successione $(E^h(\vec{g}_h))$ qui denotata con lo stesso simbolo, tale che per ogni $r = 1, \ldots, n$, converga debolmente ad una funzione $\vec{q} \in L^p(\partial D_T)$.

D'altra parte, se $(X,t) \in D_T$, allora si ha

$$(3.19) \qquad \int_0^t ds \int_{\partial D_h \cap B_r} \Gamma(X-Q, t-s)\, E^h(\vec{g}_h)(Q,s)\, dQ =$$

$$= \int_0^t ds \int_{\partial D \cap B_r} (\Gamma(X-Q_h, t-s)\, \omega_{rh}(Q) - \Gamma(X-Q, t-s)) E^h(\vec{g}_h)(Q_h, s)\, dQ +$$

$$+ \int_0^t ds \int_{\partial D \cap B_r} \Gamma(X-Q, t-s)\, E^h(\vec{g}_h)(Q_h, s)\, dQ$$

con $\omega_{rh}(Q) = \sqrt{1+|\nabla \xi_{rh}(\bar{x}_r(Q))|^2} / \sqrt{1+|\nabla \xi_r(\bar{x}_r(Q))|^2}$.

Tenendo presente la (1.3) ed essendo

$$\lim_{h\to\infty} Q_h = Q \qquad \text{e} \qquad \lim_{h\to\infty} \omega_{rh}(Q) = 1$$

uniformemente rispetto a Q, per il teorema della convergenza maggiorata di Lebesgue si ha che $\lim_{h\to\infty} \Gamma(X-Q_h, t-s)\, \omega_{rh}(Q) = \Gamma(X-Q, t-s)$ in $L^{p'}(\partial D_T)$ con $1/p + 1/p' = 1$. Consegue che il limite per $h \to \infty$ del primo integrale del secondo membro della (3.19) è zero. Pertanto se $(X,t) \in D_T$, allora per (3.1) e (3.19) si ha

$$u(X,t) = \lim_{h\to\infty} \int_0^t ds \int_{\partial D_h} \Gamma(X-Q, t-s) E^h(\vec{g}_h)(Q,s)\, dQ$$

$$= \int_0^t ds \int_{\partial D} \Gamma(X-Q, t-s)\, \vec{q}(Q,s)\, dQ.$$

Da tutto ciò, per il Teor. 2.1, consegue che $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu}|_{\partial D_T} = S(\vec{q})$ nel senso della convergenza non tangenziale. Essendo, inoltre, per ipotesi $\vec{u}$ soluzione del Problema 1, la stessa $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \nu}|_{\partial D_T}$ coincide con $\vec{g}$ sempre nel senso della convergenza non tangenziale. Dunque $S(\vec{q}) = \vec{g}$ cioè $\vec{q} = E(\vec{g})$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. D. EIDEL'MAN: *Parabolic systems*, North-Holland, Amsterdam and Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

[2] E. B. FABES - M. JODEIT, JR.: *Boundary value problems for second order parabolic equations*, Proceedings of Simposia in Pure Math., Vol. X (1966), 82-105.

[3] E. B. FABES - J. E. LEWIS - N. M. RIVIÈRE: *Singular integrals and Hydrodinamic Potentials*, Amer. Journ. of Math. **99** (1977), 601-625.

[4] E. B. FABES - J. E. LEWIS - N. M. RIVIÈRE: *Boundary value problems for the Navier-Stokes equations*, Amer. Journ. of Math. **99** (1977), 626-668.

[5] A. FRIEDMAN: *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1966.

[6] A. GUTIERREZ: *A priori L^p-estimates for the solution of the Navier equations, of elasticity, given the forces on the boundary*, thesis for the degree of doctor of Philosophy, University of Minnesota, 1979.

[7] M. JODEIT, JR.: *Simbols of parabolic singular integrals*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer. Math. Soc. Providence, Vol. X (1967), 184-195.

[8] J. NEČAS: *Sur les domains du tipe $\mathfrak{N}$*, Czechoslovak Math. Jour., **12**, (1962), 274-287.

[9] J. NEČAS: *Les méthodes directes en Théorie des équations elliptiques*, Masson et C^ie, éditeurs 120, Boul., Saint Germain, Paris VI^e 1967.

[10] R. SELVAGGI - I. SISTO: *Problemi al contorno in cilindri di classe C^1 per equazioni paraboliche del secondo ordine ecc.*, Rend. di Matem. **7**, 3-4 (1987), 335-351.

[11] R. SELVAGGI - I. SISTO: *Integral operators on C^1-cylinders and their non tangential traces*, Ric. di Mat., Vol. XXXVII, fasc. 2 (1988), 325-345.

[12] R. SELVAGGI - I. SISTO: *Parabolic singular integral operators on the surface of a C^1- cylinder*, Journ. of Math. Anal. and Applic. Vol. 149, N.2, July 1 (1990), 335-368.

[13] Z. SHEN: *Layer potentials and boundary value problems for parabolic Lamé systems etc.*, A dissertation for the degree of doctor of Philosophy, Depart. of Math., The University of Chicago, 1979.

Lavoro pervenuto alla redazione il 29 settembre 1992
ed accettato per la pubblicazione il 5 maggio 1993

INDIRIZZO DEGLI AUTORI:

Renata Selvaggi - Dipartimento di Matematica - Università di Lecce - Via Arnesano - 73100 Lecce, Italy

Irene Sisto - Dipartimento di Matematica - Università di Bari - Via E. Orabona - 70125 Bari, Italy