Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13 , Roma (1993), 467-497

Curvature sezionali critiche e curvature caratteristiche di una varietà Kähleriana quaternionale

S. MARCHIAFAVA

RIASSUNTO: *Si considerano tensori di curvatura ammissibili in un punto di una varietà Kähleriana quaternionale* M^{4n}. *Si studiano le relazioni tra curvature sezionali critiche e curvature quaternionali. Si definiscono alcuni invarianti che ha interesse studiare sul fibrato unitario tangente della varietà* M^{4n}.

ABSTRACT: *Curvature tensors that are admissible in a point of a quaternionic Kähler manifold* M^{4n} *are considered. The relationships between critical sectional curvatures and quaternionic curvatures are studied. Some invariants interesting to be studied on the unitary tangent bundle of the manifold* M^{4n} *are defined.*

KEY WORDS: *Quaternionic Kähler manifolds - Curvature tensors.*

A.M.S. CLASSIFICATION: 53C15 – 53C10

Questo lavoro riguarda lo studio di un tensore di curvatura R che, definito in uno spazio vettoriale V^{4n} con struttura Hermitiana quaternionale, è supposto ammissibile come tensore di curvatura in un punto di una varietà Kähleriana quaternionale.

Lavoro svolto nell'ambito della ricerca del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. e finanziata dal M.U.R.S.T.
La ricerca è iniziata mentre l'autore era ospite dell'Istituto Fourier dell'Università di Grenoble I. Risultati del presente lavoro sono stati comunicati in forma sintetica in conferenze tenute presso le Università di Lodz e a Timişoara.

Nell'esame delle proprietà di R ci siamo basati sulla considerazione delle sue curvature sezionali critiche, come ha significato fare per un qualunque tensore di curvatura secondo diversi punti di vista; ma abbiamo posto anche particolare attenzione alle curvature secondo piani quaternionali (curvature caratteristiche). Allo scopo di tradurre i legami tra i detti tipi di curvature nonché tra i rispettivi valori critici ci è parso naturale considerare una conveniente famiglia di operatori lineari, riduzioni degli operatori di Jacobi alle rette quaternionali. In particolare, per ogni vettore unitario X ne riescono definite tre curvature quaternionali critiche $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(X)$, $\alpha = 1,2,3$ e rispettive funzioni simmetriche $S = S(X)$, $D = D(X)$ che risultano costanti su ogni fissata retta quaternionale di V^{4n}. Si tratta di funzioni che avrà interesse studiare nel fibrato unitario tangente di una varietà Kähleriana quaternionale; in particolare S e D che risultano differenziabili ovunque. Nel caso $n = 1$, intendendosi per varietà Kähleriana quaternionale una varietà di Einstein autoduale, tale studio si collega con quello dello spettro del tensore di Weyl iniziato in [8]; (Cf. anche [3], Appendice H).

Dal punto di vista introdotto si possono fare alcune osservazioni interessanti riguardo a spazi simmetrici che ammettono strutture Kähleriane quaternionali. Tra l'altro, nel caso delle Grassmanniane $G_4(\mathbb{R}^6)$, $G_2(\mathbb{C}^4)$ risulta che due delle tre curvature quaternionali critiche sono sempre coincidenti, come spesso avviene per una varietà autoduale di Einstein compatta (si confronti con l'osservazione a pag. 428 di [8]); nel caso di $G_2/SO(4)$ si ha il primo esempio per il quale le tre curvature quaternionali critiche del generico vettore X sono distinte; inoltre in tutti i casi esaminati le funzioni S, D soddisfano una identità polinomiale a coefficienti costanti.

Si tratta di osservazioni che conducono spontaneamente a diversi quesiti riguardo alla geometria delle varietà Kähleriane quaternionali.

1 – Tensori di curvatura e curvature critiche: generalità(1)

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione m e $\langle\, ,\, \rangle$ il rispettivo prodotto scalare. Si supponga assegnato in V un *tensore di curvatura*

(1) Si confronti anche [17], [18], [6].

R, verificante le usuali proprietà:

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \quad R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0,$$
$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle = \langle R(Z,T)X,Y\rangle \quad (X,Y,Z,Y \in V).$$

Nel seguito scriveremo anche $R(X,Y,Z,T)$ invece di $\langle R(X,Y)Z,T\rangle$. Se P è un piano (vettoriale) di V e (X,Y) una base ortonormale per P, la *curvatura sezionale* $\sigma(P)$ (o anche $\sigma(X,Y)$) di P è $\sigma(P) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$ (*per* X,Y *qualunque* scriveremo anche $\sigma'(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle$). Sulla Grassmanniana dei piani di V la funzione reale $\sigma : G_2(V) \to R$ è di classe C^ω e si è soliti dire che P è un *piano critico* (per R) se P è un punto critico di σ. Consideriamo qui anche le seguenti definizioni: se X è un *fissato* vettore non nullo e σ_X la *restrizione di* σ alla sottovarietà $\mathcal{P}_X$ dei piani contenenti X, $\sigma_X : \mathcal{P}_X \to \mathbb{R}$, diciamo che P è un *piano critico per* X se P è un valore critico per σ_X e, in tal caso, che $\sigma_X(P)$ è una *curvatura* (*sezionale*) *critica per* X. In particolare, i piani di curvatura massima e minima tra quelli contenenti X sono piani critici per X.

LEMMA. *Sia X un fissato vettore non nullo di V e Y un vettore non nullo ortogonale a X. Allora la curvatura sezionale λ del piano individuato da X,Y è critica per X se e solo se risulta*

$$R(X,Y)X = -\lambda\langle X,\ X\rangle Y. \tag{1.1}$$

DIM. È una facile deduzione simile a quella a pag. 360 di [18].

Sia ora X un fissato vettore non nullo e R_X l'operatore (di Jacobi) definito nell'ortogonale $X^\perp$ di X ponendo

$$R_X : U \to -R(X,U)X \qquad U \in X^\perp.$$

R_X è *simmetrico* ed è immediato rendersi conto che *λ è un valore critico della curvatura per X se e solo se $\lambda\langle X,X\rangle$ è un autovalore di R_X. I vettori Y ortogonali a X che assieme a X individuano un piano di curvatura critica λ sono gli autovettori di R_X associati a $\lambda\langle X,X\rangle$.*

In generale gli autovalori di R_X dipendono dalla direzione di X, oltre che dalla sua norma. Costituiscono un caso molto speciale i tensori di curvatura degli spazi simmetrici doppiamente omogenei. (Cfr. [5]).

2 – Tensori di curvatura Kähleriani quaternionali

Sia V^{4n} uno spazio vettoriale dotato di una *struttura Hermitiana quaternionale (generalizzata)*, [15], individuata da una terna di automorfismi (J_1, J_2, J_3) di V^{4n} e da un prodotto scalare euclideo $\langle\, ,\, \rangle$ verificanti:

$$J_\alpha^2 = -Id; \qquad J_\alpha J_\beta = J_\gamma \qquad \text{(P.C)} \tag{2.1}$$

(cioè (J_1, J_2, J_3) è una *struttura ipercomplessa*) e

$$\langle J_\alpha X, J_\alpha Y\rangle = \langle X, Y\rangle \qquad X, Y \in V^{4n} \tag{2.2}$$

(ove con (P.C) si indica che (α, β, γ) è una qualunque permutazione circolare di (1,2,3)). In base alla citata definizione la struttura ipercomplessa (J_1, J_2, J_3) può essere sostituita con una qualunque altra (J'_1, J'_2, J'_3) *equivalente*, per la quale cioè si abbia

$$J'_\alpha = \sum_\beta c_{\alpha\beta} J_\beta \qquad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

con $C = (c_{\alpha\beta})$ matrice di $SO(3)$. Le terne (J_1, J_2, J_3), (J'_1, J'_2, J'_3), che assieme al prodotto scalare $\langle\, ,\, \rangle$ definiscono in V^{4n} la stessa struttura Hermitiana quaternionale, sono dette strutture ipercomplesse *ammissibili*.

Indichiamo con Z lo spazio ("twistor") delle strutture complesse di V^{4n} associate alla fissata struttura quaternionale generalizzata:

$$Z = \{\mathcal{J} = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3;\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

Ricordiamo che ogni vettore non nullo X, assieme a J_1X, J_2X, J_3X, genera un sottospazio quaternionale 4-dimensionale di V^{4n} che qui denoteremo con HX. Diremo, in breve, che un piano di V^{4n} è *quaternionale* se è contenuto in un sottospazio quaternionale 4-dimensionale (si confronti con [15], [4]).

Ci interessiamo a un tensore di curvatura R di V^{4n} che, per ogni fissata struttura ipercomplessa ammissibile (J_1, J_2, J_3), verifica le

$$\begin{aligned} &R(X,Y)J_\alpha Z - J_\alpha R(X,Y)Z = \\ &= (\eta/n+2)(-\langle J_\gamma X, Y\rangle J_\beta Z + \langle J_\beta X, Y\rangle J_\gamma Z) \end{aligned} \qquad \text{(P.C)} \tag{2.3}$$

ove $4n\eta$ è la curvatura scalare di R, e diremo che R è un tensore di curvatura *K-quaternionale*, poiché di tale tipo è quello di una varietà Kähleriana quaternionale ([3], pagg. 403-405) (se $n = 1$, di una varietà di Einstein autoduale, rispetto a una opportuna orientazione).

Qui appresso ci si riferirà a una struttura (J_1, J_2, J_3) supposta fissata, ma sostituibile all'occorrenza con una qualunque altra ammissibile.

Ricordiamo subito che dalle (2.3) discende tra l'altro che R è sempre di Einstein, ovvero

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \eta\langle X,Y\rangle \qquad X,Y \in V^{4n} \tag{2.4}$$

ove Ric è la forma bilineare di Ricci di R ([1]). Inoltre

$$\langle R(\mathcal{J}X,\mathcal{J}Y)\mathcal{J}Z,\mathcal{J}T\rangle = \langle R(X,Y)Z,T\rangle \quad \forall \mathcal{J} \in Z \tag{2.5}$$

come stabilito esplicitamente in [14], sempre utilizzando le (2.3).

Un esempio particolarmente importante è costituito dal *tensore di curvatura di uno spazio proiettivo quaternionale*, della forma

$$\begin{aligned} R_0^k(X,Y)Z = (k/4)\Big[&\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \sum_\alpha \big(\langle J_\alpha Y,Z\rangle J_\alpha X+ \\ &- \langle J_\alpha X,Z\rangle J_\alpha Y - 2\langle J_\alpha X,Y\rangle J_\alpha Z\big)\Big] \end{aligned} \tag{2.6}$$

per $\eta = (n+2)k$, ove la sommatoria, come anche nel seguito, si intende estesa ai valori $\alpha = 1,2,3$ ([12], pag. 499 o [3], pag. 406). Per esso la curvatura del piano della coppia ortonormale (X,Y), può scriversi

$$\sigma(X,Y) = (k/4)(1 + 3\cos^2\delta) \tag{2.7}$$

ove $\delta = \arccos\left(\langle J_1X,Y\rangle^2 + \langle J_2X,Y\rangle^2 + \langle J_3X,Y\rangle^2\right)^{1/2}$ è l'angolo di *deviazione caratteristica* del piano (X,Y) ([4]); i valori critici della curvatura per un vettore X sono costanti e valgono: $\lambda = k$ per i piani quaternionali passanti per X (ad esempio quelli individuati da J_1X, J_2X o J_3X) e $\lambda = k/4$ per i piani individuati da vettori Y nell'ortogonale di HX.

In [12] viene dimostrato che il *tensore* (2.6) *è caratterizzato tra quelli K-quaternionali di stessa curvatura scalare dal risultare costante la curvatura dei piani quaternionali*; pertanto *ci riferiremo a un tale tensore dicendo che è a curvatura quaternionale costante*, compreso il caso $k = 0$.

Ricordiamo anche che il tensore di curvatura W per il quale si scrive $R = R_0^k + W$ è la *parte di Weyl di* R (cf. ad es. [3] pag. 406).

Un tensore di curvatura K-quaternionale R verifica le identità

$$\sigma'(X, J_\alpha X) = (\eta/n+2)\|X\|^4 + R(X, J_\alpha X, J_\beta X, J_\gamma X)\,. \quad \text{(P.C)} \tag{2.8}$$

Da esse segue che *per ogni vettore unitario* X si ha

$$\sum_\alpha \sigma(X, J_\alpha X) = 3(\eta/n+2) \tag{2.9}$$

$$\sum_\alpha \sigma(X, J_\alpha X)^2 \geq 3(\eta/n+2)^2 \tag{2.10}$$

l'uguaglianza valendo se e solo se $\sigma(X, J_\alpha X) = \eta/n + 2$ $(\alpha = 1,2,3)$.

Ricordiamo anche che *per ogni coppia ortonormale di vettori* X, Y *per i quali* HX, HY *sono totalmente ortogonali si ha*

$$\sigma(X,Y) + \sigma(X, J_1 Y) + \sigma(X, J_2 Y) + \sigma(X, J_3 Y) = \eta/n + 2\,. \tag{2.11}$$

Le interpretazioni geometriche delle precedenti (2.9), (2.11) sono state indicate in [14].

Un'altra formula interessante è la seguente, stabilita da Q.S. CHI in [7]: per ogni coppia ortonormale di vettori (X,Y) si ha

$$\begin{aligned} \sigma(X,Y) = &-[\eta/2(n+2)]\left[1 - \sum_\alpha \langle J_\alpha X, Y\rangle^2\right] + \\ &+ (1/8)\sum_\alpha \Big[\big(1 - \langle J_\alpha X, Y\rangle\big)^2 \sigma(X + J_\alpha Y, J_\alpha(X + J_\alpha Y)) + \\ &+ \big(1 + \langle J_\alpha X, Y\rangle\big)^2 \sigma(X - J_\alpha Y, J_\alpha(X - J_\alpha Y))\Big]\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

(Essa può verificarsi anche con semplici calcoli usando le (3.8), (3.9) di [14] per le coppie di vettori $X + J_\alpha Y$, $X - J_\alpha Y$).

Nello stesso citato lavoro [7], come conseguenza quasi immediata ma notevole della (2.12), si mostra che *se per un assegnato tensore di curvatura* K*-quaternionale* R *non nullo la curvatura scalare è non negativa, (rispettivamente, non positiva) i massimi (minimi) della curvatura sezionale possono essere assunti solo su piani quaternionali.*

3 – Operatori di Jacobi ridotti e curvature quaternionali critiche

Sia assegnato un tensore di curvatura K-quaternionale R dello spazio vettoriale V^{4n} (dotato di fissata struttura Hermitiana quaternionale).

Definiamo la seguente *famiglia di operatori lineari* associati a R: per ogni vettore *unitario* X restringiamoci all'ortogonale H_0X di X nel sottospazio quaternionale HX da esso individuato e sia $R^c_X : H_0X \to H_0X$ l'operatore lineare risultante dalla successiva applicazione dell'operatore di Jacobi $R_X = -R(X,.)X$ e della proiezione ortogonale su H_0X (ovvero su HX, poiché $R(X,Y)X$ e X sono sempre ortogonali). (R^c_X = *operatore di Jacobi ridotto* in X).

Se (J_1, J_2, J_3) è una fissata struttura ipercomplessa ammissibile in V^{4n}, i vettori J_1X, J_2X, J_3X formano una base ortonormale per H_0X e l'operatore R^c_X si scrive

$$\begin{aligned} R^c_X(Y) = \langle R(X,Y)X, J_1X\rangle J_1X + \langle R(Y,X)X, J_2X\rangle J_2X+ \\ + \langle R(Y,X)X, J_3X\rangle J_3X \quad (Y \in H_0X)\,. \end{aligned}$$

La matrice di R^c_x nella stessa base è $A=(a_{\alpha\rho})$ con $a_{\alpha\rho}=\langle R(J_\alpha X, X)X, J_\rho X\rangle$, $(\alpha, \rho = 1,2,3)$, evidentemente simmetrica.

Le proprietà fondamentali degli operatori così definiti, e parametrizzati dai vettori X della sfera unitaria UV^{4n} di V^{4n} sono espresse dalla proposizione seguente.

Consideriamo le funzioni $H_\alpha : UV^{4n} \to \mathbb{R}$, $F_\alpha : UV^{4n} \to \mathbb{R}$, ($\alpha = 1,2,3$), definite ponendo $H_\alpha(X) = R(X, J_\alpha X, J_\alpha X, X)$, ovvero $H_\alpha(X) = \sigma(X, J_\alpha X)$, e $F_\alpha(X) = R(X, J_\beta X, X, J_\gamma X)$. Notiamo che le (2.5) danno

$$H_\alpha(J_\rho X) = H_\alpha(X) \quad \forall\alpha, \rho = 1,2,3; \quad \forall X \in V^{4n} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &F_\alpha(J_\alpha X) = F_\alpha(X), && \forall\alpha = 1,2,3; \\ &F_\alpha(J_\rho X) = -F_\alpha(X) && \forall\rho \neq \alpha; \qquad \forall X \in V^{4n}\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

PROPOSIZIONE. *Per ogni vettore unitario X l'operatore R^c_X è simmetrico, con traccia costante uguale a $3\eta/n + 2$. Considerata l'equazione caratteristica di R^c_X, $-\lambda^3 + (3\eta/n+2)\lambda^2 - S(R^c_X)\lambda + \det(R^c_X) = 0$, risulta*

$$\begin{aligned} S(R^c_X) \equiv S(X) = \sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} [H_\beta(X)H_\gamma(X) - F_\alpha(X)^2] = \\ = (1/2)[(3\eta/n+2)^2 - \sum_\alpha H_\alpha(X)^2] - \sum_\alpha F_\alpha(X)^2\,; \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\det(R^c_X) \equiv D(X) = H_1(X)H_2(X)H_3(X)+ \tag{3.3.2}$$
$$- 2F_1(X)F_2(X)F_3(X) - \sum_\alpha H_\alpha(X)F_\alpha(X)^2$$

qualunque sia la struttura ipercomplessa ammissibile (J_1, J_2, J_3).

Quando X *varia in un fissato sottospazio quaternionale* 4*-dimensionale* W *gli autovalori di* R^c_X *sono costanti.*

DIM. Sia $(I, J, K) \equiv (J_1, J_2, J_3)$ una fissata struttura ipercomplessa ammissibile. La prima affermazione è evidente, constatato che la matrice A di R^c_X nella base ortonormale (IX, JX, KX) è simmetrica; la (2.9) dà poi subito $Tr(R^c_X) = 3\eta/n+2$. Inoltre, con il semplice calcolo e l'uso della (2.9), si verifica che le sopra scritte espressioni per $S(R^c_X)$, $\det(R^c_X)$ sono valide. Per quanto riguarda l'ultima affermazione, si osserva dapprima che gli operatori R^c_X, R^c_{IX} ammettono gli stessi autovalori (con le stesse rispettive molteplicità): infatti, facendo uso anche delle (3.1), i coefficienti delle equazioni caratteristiche di tali operatori risultano uguali. Si osserva poi che data l'arbitrarietà della struttura ipercomplessa ammissibile (I, J, K) gli operatori R^c_X, R^c_Y associati ai vettori X, Y ortonormali nel fissato sottospazio quaternionale W ammettono ancora gli stessi autovalori: infatti "ruotando" opportunamente una fissata struttura ipercomplessa ammissibile prefissata, si può sempre fare una scelta di (I, J, K) per la quale risulti $Y = IX$. Si perviene alla conclusione osservando che dati comunque due vettori unitari X, Z in W esiste sempre un vettore unitario Y di W ortogonale a entrambi.

DEFINIZIONE. *Diremo curvature quaternionali critiche per* X *gli autovalori di* R^c_X *e piani quaternionali critici per* X *quelli individuati dai corrispondenti autovettori.*

Osservazioni. 1) Dalla proposizione può farsi discendere che *in una varietà* M^{4n} *Kähleriana quaternionale ogni sottovarietà quaternionale* 4*-dimensionale, dotata di una opportuna orientazione e della metrica riemanniana indotta da quella di* M^{4n}*, è di Einstein e autoduale* (come dimostrato di recente). 2) Nel caso $n = 1$ è quasi immediato rendersi conto che λ è critica per R^c_X se e solo se $\lambda' = \lambda - (\eta/n + 2)$ è critica per il tensore di Weyl W e pertanto lo studio qui fatto si ricollega a quello di [8].

4 – Gradienti di curvature quaternionali; uso di strutture ipercomplesse adattate

Sia $(I, J, K) \equiv (J_1, J_2, J_3)$ una fissata struttura ipercomplessa ammissibile in V^{4n}. Se X appartiene alla sfera unitaria UV^{4n} di V^{4n}, come d'uso, identifichiamo lo spazio vettoriale tangente a UV^{4n} in X con l'ortogonale di X in V^{4n}. Consideriamo le funzioni $H_\alpha : UV^{4n} \to \mathbb{R}$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ (all'occorrenza scriveremo anche, ad esempio, H_I in luogo di H_1). Indichiamo con $(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X$ il gradiente di H_α in X. Dalla (2.9) segue subito l'identità

$$\sum_\alpha \mathrm{grad}^V H_\alpha = 0. \tag{4.1}$$

LEMMA. *Per ogni vettore unitario X risulta*

$$(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X = 4[J_\alpha R(X, J_\alpha X)X - H_\alpha(X)X] \quad \alpha = 1,2,3. \tag{4.2}$$

$$(\mathrm{grad}^V H_\alpha)(J_\rho X) = J_\rho(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X \quad \alpha, \rho = 1,2,3. \tag{4.3}$$

DIM. Se Y è un vettore unitario ortogonale a X per la derivata di H_I secondo Y in X si ha, anche con l'uso della prima delle (2.5),

$$\begin{aligned}(Y \cdot H_I)(X) &= 2\langle R(X, IX)IX, Y\rangle + 2\langle R(X, IX)IY, X\rangle = \\ &= 4\langle R(X, IX)IY, X\rangle.\end{aligned}$$

Tenuto conto che $\langle R(X, IX)X, IY\rangle = -\langle IR(X, IX)X, Y\rangle$, risulta $(Y \cdot H_I)(X) = 4\langle IR(X, IX)X - H_I(X)X, Y\rangle$ con $Z = IR(X, IX)X - H_I(X)X$ vettore ortogonale a X. La prima delle (4.2) segue ovviamente; in modo simile si deducono le altre (4.2). Con l'uso delle (2.2), (2.5) si verifica direttamente che valgono le (4.3).

COROLLARIO. *Per ogni struttura ipercomplessa ammissibile (J_1, J_2, J_3) e per ogni vettore unitario X risulta*

$$\sum_\alpha J_\alpha R(X, J_\alpha X)X = (3\eta/n + 2)X, \tag{4.4.1}$$

$$\sum_\alpha R(X, J_\alpha X)J_\alpha X = (3\eta/n + 2)X. \tag{4.4.2}$$

DIM. La (6.4.1) è equivalente alla (4.1). La (4.4.2) si deduce osservando che è sempre

$$J_\alpha R(X, J_\alpha X)X = R(X, J_\alpha X)J_\alpha X \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{4.5}$$

(Infatti per ogni Y si ha, ad esempio, $\langle IR(X, IX)X, Y\rangle = -\langle R(X, IX)X, IY\rangle = -\langle R(IX, X)IX, Y\rangle = \langle R(X, IX)IX, Y\rangle$).

Osservazioni. La (4.2) è valida separaramente per ogni J_α sulla base solo della J_α-invarianza del tensore di curvatura R. La (4.4.2) è stata stabilita indipendentemente da D.V. ALEKSEEVSKY in un lavoro dal titolo "*On the lenght of minimal geodesics in quaternionic manifolds*".

Ora, facendo sempre riferimento alla fissata struttura ipercomplessa (J_1, J_2, J_3) consideriamo i gradienti delle funzioni $F_\alpha : UV^{4n} \to \mathbb{R}$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

LEMMA. *Risulta*

$$(\mathrm{grad}^V F_\alpha)_X = -2[J_\beta R(X, J_\gamma X)X + J_\gamma R(X, J_\beta X)X] - 4F_\alpha(X)X \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{grad}^V F_\alpha)_X &= 2[H_\gamma(X) - H_\beta(X)]J_\alpha X + \\ &+ (1/2)J_\alpha[(\mathrm{grad}^V H_\gamma)_X - (\mathrm{grad}^V H_\beta)_X] - 4F_\alpha(X)X.\end{aligned} \tag{4.7}$$

DIM. Sia Y un vettore unitario perpendicolare a X. Con l'uso delle (2.3) si trova che la derivata di F_α rispetto a Y in X è data da

$$(Y \cdot F_\alpha)(X) = -2\langle J_\beta R(X, J_\gamma X)X + J_\gamma R(X, J_\beta X)X, Y\rangle$$

ovvero anche, poiché Y è ortogonale a X,

$$(Y \cdot F_\alpha)(X) = -2\langle J_\beta R(X, J_\gamma X)X + J_\gamma R(X, J_\beta X)X + 2F_\alpha(X)X, Y\rangle.$$

Si perviene alla conclusione osservando che il vettore fattore sinistro nel prodotto scalare a secondo membro è ortogonale a X. Infine, per dedurre le (4.7) basta tenere conto delle (4.6) e usare le (4.2).

Facciamo ora alcune considerazioni con l'uso di strutture ipercomplesse ammissibili verificanti opportune condizioni.

DEFINIZIONE. *Sia X un fissato vettore unitario. Una struttura ipercomplessa ammissibile (J_1, J_2, J_3) per la quale J_1X, J_2X, J_3X formano una base ortonormale di autovettori di R^c_X si dirà adattata a X e si indicherà con $(J_1, J_2, J_3)_X$. Le curvature quaternionali critiche per X associate a J_1X, J_2X, J_3X saranno indicate con $\lambda_1(X)$, $\lambda_2(X)$, $\lambda_3(X)$ rispettivamente.*

LEMMA. *Sia X un fissato vettore unitario. Una struttura ipercomplessa ammissibile (J_1, J_2, J_3) è adattata a X se e solo se $F_\alpha(X) = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, ovvero se e solo se $(\operatorname{grad}^V H_\alpha)_X$ è ortogonale a HX, $\alpha = 1, 2, 3$.*

In $(J_1, J_2, J_3)_X$ risulta $H_\alpha(X) = \lambda_\alpha(X)$, $\alpha = 1, 2, 3$, e quindi

$$(4.8)_X \qquad \lambda_\alpha(J_\rho X) = \lambda_\alpha(X) \quad \alpha, \rho = 1, 2, 3\,.$$

DIM. La dimostrazione è immediata se si tiene conto delle (4.2), (3.1).

Avvertenza. Apponiamo un indice X alla numerazione delle formule che valgono con riferimento a una struttura ipercomplessa adattata a X.

COROLLARIO. *Supponiamo che esista una struttura ipercomplessa (J_1, J_2, J_3) tale che per ogni $X \in UV^{4n}$ le curvature quaternionali $H_\alpha(X)$ sono critiche per R^c_X. Allora R è a curvatura quaternionale costante.*

DIM. Nella nostra ipotesi per (J_1, J_2, J_3) valgono le identità $F_\alpha(X) = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, ovvero, tenuto conto delle (4.7),

$$\begin{aligned} &2[H_\gamma(X) - H_\beta(X)]X + (1/2)[(\operatorname{grad}^V H_\gamma)_X + \\ &- (\operatorname{grad}^V H_\beta)_X] = 0 \qquad \alpha = 1, 2, 3\,. \end{aligned}$$

Inoltre $(\operatorname{grad}^V H_\alpha)_X$ è ortogonale a X per ogni $X \in UV^{4n}$. Ne segue subito che si ha identicamente $H_\alpha(X) = \eta/n + 2$, $\alpha = 1, 2, 3$, $X \in UV^{4n}$.

Osservazione. Se per un fissato vettore unitario X uno degli autovalori di R^c_X è semplice, e sia ad esempio $\lambda_1(X)$, ne risulta definita su un opportuno intorno di X in UV^{4n} una funzione, $\lambda_1 = \lambda_1(Y)$, differenziabile e a valori nell'insieme degli autovalori di R^c_Y per ogni Y in tale intorno. Ciò spesso sottointenderemo nel seguito.

LEMMA. *Sia X un fissato vettore unitario e $(I,J,K)_X$ una struttura ipercomplessa adattata a X. Sia, ad esempio $\lambda_I(X)$ un autovalore semplice per R^c_X e $\lambda_I = \lambda_I(Y)$ la funzione differenziabile che ne risulta definita per Y variabile in un opportuno intorno di X in UV^{4n}. Allora*

$$(4.9)_X \qquad (\operatorname{grad}^V \lambda_I)(X) = (\operatorname{grad}^V H_I)(X).$$

$$(4.10)_X \qquad (\operatorname{grad}^V \lambda_1)(J_\rho X) = J_\rho(\operatorname{grad}^V \lambda_1)_X \quad \forall \rho = 1,2,3.$$

DIM. Per $Y \in UV^{4n}$ si ponga

$$(4.11)_X \qquad \begin{aligned} S'(Y) &= H_I(Y)H_J(Y) + H_J(Y)H_K(Y) + H_K(Y)H_I(Y), \\ D'(Y) &= H_I(Y)H_J(Y)H_K(Y) \end{aligned}$$

e si osservi che S, S' e D, D' rispettivamente differiscono per addendi di grado almeno due negli $F_\alpha(Y)$ $(\alpha = 1,2,3)$. Poiché, per la scelta fatta di (I,J,K), in X si ha $F_\alpha(X) = 0$ $(\alpha = 1,2,3)$ risulta immediatamente

$$(4.12)_X \qquad (\operatorname{grad}^V S')_X = (\operatorname{grad}^V S)_X, \quad (\operatorname{grad}^V D')_X = (\operatorname{grad}^V D)_X.$$

Ora, differenziando le due identità

$$(4.13.1) \qquad -\lambda_I(Y)^3 + (3\eta/n+2)\lambda_I(Y)^2 - S(Y)\lambda_I(Y) + D(Y) = 0$$

$$(4.13.2) \qquad -H_I(Y)^3 + (3\eta/n+2)H_I(Y)^2 - S'(Y)H_I(Y) + D'(Y) = 0$$

e confrontando in X, ove $S'(X) = S(X)$, $D'(X) = D(X)$ e valgono le $(4.12)_X$, si ottiene

$$\begin{aligned} &[-3\lambda_I^2(X) + (6\eta/n+2)\lambda_I(X) - S(X)]\,[(\operatorname{grad}^V \lambda_I)(X) + \\ &\quad - (\operatorname{grad}^V H_I)(X)] = 0. \end{aligned}$$

Il fattore a sinistra non può annullarsi, ché altrimenti $\lambda_I(X)$ sarebbe doppio: se ne trae la $(4.9)_X$. Le $(4.10)_X$ seguono poi dalle (4.3).

LEMMA. *Supponiamo che esista una struttura (I,J,K) ammissibile per la quale sussiste l'identità $R(X,IX)X + \lambda\|X\|^2 IX = 0$ con λ costante. Allora R è a curvatura quaternionale costante.*

DIM. Polarizzando si deduce

$$R(Y,IX)X + R(X,IY)X + R(X,IX)Y + \lambda[2\langle X,Y\rangle IX + \\ + \langle X,X\rangle IY] = 0 \quad \forall X,Y \in V^{4n}.$$

Se si moltiplica per IY e poi si usa l'identità di Bianchi, si ha

$$R(Y,IX,X,IY) + R(X,IY,X,IY) - R(X,IY,IX,Y) + \\ - R(X,Y,IY,IX) + \lambda[2\langle X,Y\rangle^2 + \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle] = 0$$

da cui, fatto uso della prima delle (2.3),

$$3\sigma'(X,IY) + \sigma'(X,Y) = (3\eta/n + 2)[\langle Y,JX\rangle^2 + \langle Y,KX\rangle^2] + \\ + \lambda[2\langle X,Y\rangle^2 + \langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle] = 0.$$

Supposto $\|X\| = 1$, per $Y = JX$, $Y = KX$ si ha rispettivamente

$$3\sigma(X,KX) + \sigma(X,JX) = (3\eta/n + 2) + \lambda, \\ 3\sigma(X,JX) + \sigma(X,KX) = (3\eta/n + 2) + \lambda$$

e con la (2.9) segue $\lambda = \sigma(X,IX) = \sigma(X,JX) = \sigma(X,KX) = \eta/n + 2$.

LEMMA. *Sia $n > 1$. Si supponga che una delle curvature quaternionali critiche degli operatori R^c_X è costante, uguale a λ, assieme alla rispettiva molteplicità. Allora* 1) *λ è anche una curvatura critica per gli operatori R_X, oppure* 2) *tutte e tre le curvature quaternionali critiche sono costanti.*

DIM. Scrivendo l'identità $(\mathrm{grad}^V D)(X) = \lambda(\mathrm{grad}^V S)(X)$ rispetto ad una struttura ipercomplessa $(I,J,K)_X$ adattata a X e per la quale $\lambda = \lambda_I(X)$ si trova, con l'uso anche della (4.4.1), $[\lambda - \lambda_J(X)][\lambda - \lambda_K(X)][IR(X,IX)X - \lambda X] = 0$. Dunque, se $\lambda = \lambda_I(X)$ ha molteplicità 1 risulta sempre $IR(X,IX)X - \lambda X = 0$ (come anche si poteva dedurre con l'uso del primo Lemma di questo numero. D'altra parte, se λ ha molteplicità maggiore di 1 ne segue già immediatamente che le curvature quaternionali critiche sono costanti.

Nota. Vedremo che nel caso 2) R è curvatura quaternionale costante.

5 – Laplaciani di curvature quaternionali; qualche applicazione

Consideriamo su $S^{4n-1} \equiv UV^{4n}$ la metrica canonica di curvatura 1. Per ogni vettore unitario X pensiamo lo spazio tangente $T_X S^{4n-1}$ identificato con l'ortogonale a X stesso in V^{4n}. Indichiamo con Δ_V l'operatore di Laplace di S^{4n-1}. Riferiamoci a una struttura ipercomplessa ammissibile (I, J, K) fissata. Calcoliamo i Laplaciani delle funzioni H_I, H_J, H_K e delle funzioni S, D definite su S^{4n-1} (queste ultime due indipendenti da (I, J, K)).

Supponiamo dapprima (I, J, K) arbitraria. Sia Z un vettore unitario perpendicolare a X. Indichiamo con $(\partial^2/\partial z^2)_X$ la derivata seconda lungo la circonferenza $Z_\theta = \cos\theta X + \sin\theta Z$ calcolata in X, cioè per $\theta = 0$. Derivando ad esempio la funzione $H_I : S^{4n-1} \to \mathbb{R}$, con facili calcoli e tenuto conto che la (2.5) dà $R(IX, Z, Z, IX) = R(X, IZ, IZ, X)$, risulta

$$\begin{aligned}(\partial^2 H_I/\partial z^2)_X = 4[-H_I(X) + R(IX, X, Z, IZ)+\\ + R(Z, IX, IZ, X) + R(X, IZ, IZ, X)]\end{aligned}$$

e poi, utilizzando l'identità di Bianchi e le (3.1),

$$\begin{aligned}(\partial^2 H_I/\partial z^2)_X = 4[-H_I(X) + 3\sigma'(X, IZ) + \sigma(X, Z)+\\ -(3\eta/n + 2)\{\langle JX, Z\rangle^2 + \langle KX, Z\rangle^2\}] \qquad \text{(P.C)}.\end{aligned} \tag{5.1}$$

(Le analoghe formule per H_J, H_K seguono infatti permutando circolarmente I, J, K).

Sia ora fissata una base ortonormale $(E_1, \ldots, E_{4n})$ di V^{4n} con $E_1 = X$, $E_2 = IX$, $E_3 = JX$, $E_4 = KX$; consideriamo poi la base ortonormale $(E_2, \ldots, E_{4n})$ di $T_X S^{4n-1}$ e l'associato sistema di coordinate normali $(y_2, \ldots, y_{4n})$ per S^{4n-1} definito nell'intorno dell'origine X. Poiché $(\Delta_V H_I)_X = \sum_{a>1} (\partial^2 H_I/\partial y_a^2)_X$, usando la (9.1), si trova

$$\Delta_V H_I = -8(2n + 1)[H_I - (\eta/n + 2)] \quad \text{(P.C.)}. \tag{5.2}$$

Notiamo che, considerata l'arbitrarietà della scelta di (I, J, K), si ha

LEMMA. *Per ogni struttura complessa $\mathcal{J} = aI + bJ + cK \in Z$ in V^{4n}, posto $H_{\mathcal{J}}(X) = \sigma(X, \mathcal{J}X)$, la funzione $f = [H_{\mathcal{J}} - (\eta/n+2)] : S^{4n-1} \to \mathbb{R}$ è una autofunzione di Δ_V associata all'autovalore $-8(2n + 1)$.*

Supponiamo ora la struttura $(I,J,K)=(I,J,K)_X$ *adattata a* X. Osserviamo che in tal caso, indicato con Z un vettore *unitario* in $T_X S^{4n-1}$, usando la (4.3.1) e la (5.2) risulta

$$(5.3.1)_X \qquad (\partial^2 S/\partial z^2)_X = 0 \qquad \forall Z \in H_0 X$$

$$(5.3.2)_X \qquad \begin{aligned} (\partial^2 S/\partial z^2)_X &= -4\sum_\alpha H_\alpha(X)[3\sigma(X,J_\alpha Z)+\sigma(X,Z)]+ \\ &+4[(3\eta/n+2)^2-2S(X)]-\sum_\alpha \|Pr_{HZ}(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2+ \\ &+(3/2)\sum_\alpha \langle(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X, J_\alpha Z\rangle^2 \qquad \forall Z \perp HX \end{aligned}$$

ove Pr_{HZ} denota la proiezione ortogonale sul sottospazio HZ.

Calcoliamo $\Delta_V S$ usando le (5.3) (o anche la (5.2)). Risulta

$$(5.4.1)_X \qquad \begin{aligned} (\Delta_V S)_X &= 16(n-1)\left[\sum_\alpha H_\alpha^2 - 3(\eta/n+2)^2\right]_X + \\ &\quad -(5/2)\sum_\alpha \|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2 \end{aligned}$$

$$(5.4.2)_X \qquad \begin{aligned} (\Delta_V S)_X &= -32(n-1)[S-3(\eta/n+2)^2]_X + \\ &\quad -(5/2)\sum_\alpha \|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2. \end{aligned}$$

Calcoliamo $\Delta_V D$. A partire dalla (4.3.2), con l'uso della (5.2), risulta

$$(5.5)_X \qquad \begin{aligned} (\Delta_V D)_X &= -16(n-1)[3D-(\eta/n+2)S]_X + \\ &-(6\eta/n+2)\sum_\alpha \|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2 + \\ &+(7/2)\sum_\alpha H_\alpha(X)\|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2. \end{aligned}$$

LEMMA. *Le curvature quaternionali critiche* λ_α, $\alpha = 1,2,3$, *sono costanti al variare di* X *se e solo se* R *è di curvatura costante.*

DIM. È immediato rendersi conto che se R è a curvatura quaternionale costante le λ_α sono costanti, tutte uguali a $\eta/n+2$. Viceversa, supponiamo le curvature quaternionali critiche costanti, sicché evidentemente S e D sono costanti. In tal caso la $(5.4.1)_X$ implica subito che le dette curvature non possono essere a due a due distinte: altrimenti $(\operatorname{grad}^V H_\alpha)_X = 0$, $\alpha = 1,2,3$ e quindi $\left[\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 - 3(\eta/n+2)^2\right]_X = 0$ ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \eta/n + 2$. Supponiamo che sia, ad esempio, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ e $(I,J,K)_X$ tale che $H_I(X) = H_J(X) = \lambda_1$. Allora $(\operatorname{grad}^V H_K)_X = (\operatorname{grad}^V \lambda_3)_X = 0$ (e $(\operatorname{grad}^V H_I)_X = -(\operatorname{grad}^V H_J)_X$). Sicché le $(5.4)_X$, $(5.5)_X$ danno rispettivamente

$$\begin{aligned}(\Delta_V S)_X &\equiv 16 \times 6(n-1)[H_I(X) - (\eta/n+2)]^2 + \\ &\quad - 5\|(\operatorname{grad}^V H_I)_X\|^2 = 0\,, \\ (\Delta_V D)_X &\equiv 16 \times 6(n-1)H_I(X)[H_I(X) - (\eta/n+2)]^2 + \\ &\quad - [12(\eta/n+2) - 7H_I(X)]\|(\operatorname{grad}^V H_I)_X\|^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Ne segue $16\times 6(n-1)(12/5)[H_I(X)-(\eta/n+2)]^3 = 0$ ovvero $H_I(X) = H_J(X) = \eta/n+2$, in contraddizione con l'assunto $H_I(X) \neq H_K(X)$. In definitiva, l'unico caso ammissibile è $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \eta/n + 2$ e R deve avere curvatura quaternionale costante. (Il massimo o il minimo della curvatura di piani quaternionali deve essere $\eta/n+2$).

Osservazione. Per $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \eta/n + 2$ il risultato è già in [12].

LEMMA. *Sia X un fissato vettore unitario e $(I,J,K)_X$ una struttura ipercomplessa adattata a X. Sia, ad esempio, $\lambda_I(X)$ un autovalore semplice per R^c_X e $\lambda_I = \lambda_I(Y)$ la funzione differenziabile che ne risulta definita per Y variabile in un opportuno intorno di X in UV^{4n}. Allora in X risulta*

$$(5.6)_X \quad \begin{aligned}&[\lambda_I(X) - H_J(X)][H_K(X) - \lambda_I(X)](\Delta_V\lambda_I)_X = -[\lambda_I(X)+ \\ &- (\eta/n+2)]\Big\{16(n-1)[\lambda_I(X) - H_J(X)][H_K(X) - \lambda_I(X)] + \\ &+3\sum_\alpha \|(\operatorname{grad}^V H_\alpha)_X\|^2\Big\} + (3/2)[\lambda_I(X)-H_J(X)]\|(\operatorname{grad}^V H_J)_X\|^2 + \\ &- (3/2)[H_K(X) - \lambda_I(X)]\|(\operatorname{grad}^V H_K)_X\|^2\,.\end{aligned}$$

DIM. Ricordando le osservazioni a proposito delle $(4.9)_X$, se si applica il Laplaciano ai primi membri delle identità (4.13) e poi si confronta, risulta

$$[\lambda_I(X) - H_J(X)]\,[H_K(X) - \lambda_I(X)](\Delta_V\lambda_I - \Delta_V H_I) = [\lambda_I(X)+$$
$$- (\eta/n+2)]\Big\{24[\lambda_I(X) - H_J(X)]\,[H_K(X) - \lambda_I(X)]+$$
$$- 3\sum_\alpha \|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2\Big\} + (3/2)[\lambda_I(X) - H_J(X)]\,\|(\mathrm{grad}^V H_J)_X\|^2+$$
$$- (3/2)[H_K(X) - \lambda_I(X)]\,\|(\mathrm{grad}^V H_K)_X\|^2$$

da cui, tenuto conto della (5.2), si ottiene la $(5.6)_X$.

PROPOSIZIONE. *Sia* $n > 1$. *Supponiamo che una delle tre curvature quaternionali critiche sia costante, uguale a* λ, *assieme alla rispettiva molteplicità. Allora* 1) $\lambda = \eta/n + 2$, *con molteplicità* 1, *oppure* 2) R *è a curvatura quaternionale costante* (*ovvero* $\lambda = \eta/n + 2$, *con molteplicità* 3). *In entrambi i casi* $\lambda = \eta/n+2$ *è una curvatura critica anche per ogni* R_X, $X \in S^{4n-1}$.

DIM. Se λ ha molteplicità 3, e quindi $\lambda = \eta/n + 2$, l'affermazione è stata già dimostrata. Possiamo quindi ridurci a considerare il caso in cui λ ha molteplicità 1; teniamo inoltre conto che allora, in base al precedente lemma, tutti gli autovettori di R^c_X associati a λ sono anche autovettori di R_X, per ogni X unitario. Mostriamo ora che non può essere $\lambda \neq \eta/n + 2$. Per ogni X unitario, con riferimento ad una struttura ipercomplessa ammissibile $(I, J, K)_X$ adattata a X e per la quale $H_I(X) = \lambda$, la $(5.6)_X$ dà

$$- [\lambda - (\eta/n+2)]\Big\{16(n-1)[\lambda - H_J(X)]\,[H_K(X) - \lambda]+$$
$$+ 3\sum_\alpha \|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\|^2\Big\}$$
$$+ (3/2)[\lambda - H_J(X)]\,\|(\mathrm{grad}^V H_J)_X\|^2 - (3/2)[H_K(X)+$$
$$- \lambda]\,\|(\mathrm{grad}^V H_K)_X\|^2 = 0.$$

Inoltre risulta $(\mathrm{grad}^V H_I) = (\mathrm{grad}^V \lambda_I)_X = 0$, $(\mathrm{grad}^V H_K) = -(\mathrm{grad}^V H_J)_X$ e $(\mathrm{grad}^V S)_X = -[H_J(X) - H_K(X)]\ (\mathrm{grad}^V H_J)_X$. Supponiamo che il massimo o il minimo di S sia assunto su X ove $\lambda_J \neq \lambda_K$: in tal caso deve aversi $(\mathrm{grad}^V H_J) = (\mathrm{grad}^V \lambda_J)_X = 0$ e quindi $[\lambda - (\eta/n+2)]\,[\lambda - H_J(X)]\,[H_K(X) - \lambda] = 0$, contraddicendo le poste ipotesi. Rimane solo il caso in cui S assume sia il massimo che il minimo su vettori X per i quali le curvature critiche diverse da λ sono coincidenti: ma allora S è costante e così anche le tre curvature quaternionali critiche. Basta applicare di nuovo il lemma precedente per trovare una contraddizione.

Se si considera che $\eta/n+2$ può essere un massimo o un minimo per la curvatura quaternionale se e solo se R è a curvatura quaternionale costante, si ha subito il seguente corollario.

COROLLARIO. *Sia $n>1$. Si supponga che il massimo o il minimo delle curvature quaternionali critiche per gli operatori R_X^c è costante, indipendente da $X \in UV^{4n}$. Allora R è a curvatura quaternionale costante.*

Tenuto presente il richiamato risultato di Q.S. CHI, si ha anche il seguente altro corollario.

COROLLARIO. *Sia $n>1$. Si supponga che R ha curvatura scalare non negativa (rispettivamente, non positiva) e che il massimo (rispettivamente, il minimo) della curvatura dei piani passanti per un fissato vettore X è costante, indipendente da X. Allora R è a curvatura quaternionale costante.*

PROPOSIZIONE. *Sia $n>1$. Si supponga che $S=S(X)$ è costante, indipendente dal vettore unitario X. Allora R è a curvatura quaternionale costante.*

DIM. Osserviamo che se $\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(X)$ $(\alpha=1,2,3)$ sono le curvature quaternionali critiche per R_X^c in ogni caso risulta

$$3(\eta/n+2)^2-S(X)=(1/2)\left[(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)-3(\eta/n+2)^2\right].$$

Basterà quindi dimostrare che nella posta ipotesi si ha $S=3(\eta/n+2)^2$ perché ne risulti $\lambda_\alpha(X)=\eta/n+2$ $(\alpha=1,2,3)$ per ogni vettore unitario X (in base all'osservazione fatta a proposito della (2.10)). Fissiamo dunque un vettore unitario X e una struttura quaternionale ammissibile $(I,J,K)_X$ adattata. Notiamo subito che la $(5.4)_X$ dà

$$(5.7)_X \qquad 32(n-1)\left[3(\eta/n+2)^2-S\right]=(5/2)\sum_\alpha \left\|(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X\right\|^2.$$

Considerato poi un qualunque vettore unitario Y ortogonale a $\mathbb{H}X$ sommiamo le identità che si ottengono dalla $(9.3.2)_X$ sostituendovi $Z = Y, IY, JY, KY$ rispettivamente; tenuto conto della (4.4) si trova

$$(5.8)_X \qquad \begin{aligned} &32(n-1)[3(\eta/n+2)^2 - S] = \\ &\qquad = (5/2)(n-1)\sum_{\alpha} \left\|Pr_{\mathbf{H}Y}(\mathrm{grad}^V H_\alpha)(X)\right\|^2 . \end{aligned}$$

Confrontando con la $(5.7)_X$ (alla quale si riduce solo nel caso $n = 2$) ne segue subito che se $n > 2$ deve essere $(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X = 0$, $\alpha = 1,2,3$ e quindi appunto $3(\eta/n+2)^2 - S = 0$. Rimane il caso $n = 2$, per il quale si può ragionare come segue. Nell'ipotesi $(\mathrm{grad}^V S)_X = 0$, se in X le tre curvature quaternionali critiche sono distinte si ha

$$(5.9)_X \qquad \begin{aligned} (\mathrm{grad}^V D)_X = -[\lambda_\alpha(X) - \lambda_\beta(X)]\,[\lambda_\gamma(X) + \\ - \lambda_\alpha(X)]\,(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X \quad \text{(P.C.)} \end{aligned}$$

e se anche $(\mathrm{grad}^V D)_X = 0$ ne seguirà subito $(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X = 0$, $\alpha = 1,2,3$, quindi la tesi. D'altra parte consideriamo un X per il quale $(\mathrm{grad}^V D)_X = 0$ e sia ad esempio $H_J(X) = H_K(X)$. Se $H_I(X) = \eta/n+2$ anche $H_J(X) = H_K(X) = \eta/n+2$ e di nuovo possiamo concludere. Altrimenti la $(5.9)_X$ per $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,2,3)$, senz'altro valida, implica $(\mathrm{grad}^V H_I)_X = 0$, sicché poi $(\mathrm{grad}^V H_K)_X = -(\mathrm{grad}^V H_J)_X$. Allora scelto un qualunque vettore unitario Y ortogonale a HX e confrontando le identità che si ottengono dalla $(5.3.2)_X$ per $Z = Y, IY$ rispettivamente si trova subito che deve essere $\sigma(X,Y) = \sigma(X,IY)$ e quindi anche, data l'arbitrarietà di Y, $\sigma(X,JY) = \sigma(X,KY)$. Inoltre, la $(9.3.2)_X$ per $Z = Y, JY$ rispettivamente si scrive

$$\begin{aligned} &-12\Big\{[(\eta/n+2) + H_I(X)]\sigma(X,Y) + [(3\eta/n+2) + \\ &\quad - H_I(X)]\sigma((X,JY)\Big\} + U = \\ &\quad = (3/2)\Big[\langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, JY\rangle^2 + \langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, KY\rangle^2\Big] \\ &-12\Big\{[(3\eta/n+2) - H_I(X)]\sigma(X,Y) + \\ &\quad + [(\eta/n+2) + H_I(X)]\sigma(X,JY)\Big\} + U = \\ &\quad = (3/2)\Big[\langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, Y\rangle^2 + \langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, IY\rangle^2\Big] \end{aligned}$$

ove $U = 4[(3\eta/n+2)^2 - 2S] - 2\|(\mathrm{grad}^V H_J)_X\|^2$ è costante. Poiché mediante la variazione $Y_\theta = \cos\theta Y + \sin\theta JY$, $0 \le \theta \le \pi/2$, le due espressioni a secondo membro si scambiano è possibile trovare un vettore Y per il quale siano uguali. Per tale Y evidentemente, confrontando, si ha $2[H_I(X)-(\eta/n+2)][\sigma(X,Y)-\sigma(X,JY)] = 0$ e se $H_I(X) \neq \eta/n+2$, che altrimenti avremmo già concluso, deve essere $\sigma(X,Y) = \sigma(X,JY)$; anzi, per la (2.11), $\sigma(X,Y) = \sigma(X,IY) = \sigma(X,JY) = \sigma(X,KY) = \eta/4(n+2)$. La $(5.3.2)_X$ dà allora, tenuto sempre conto della $(5.7)_X$,

$$\begin{aligned} -24[3(\eta/n+2)^2 - S] - (3/2)[\langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, JY\rangle^2 + \\ + \langle(\mathrm{grad}^V H_J)_X, KY\rangle^2] = 0\,. \end{aligned}$$

Ma ciò contraddice appunto l'ipotesi che sia $H_I(X) \neq \eta/n+2$.

Osservazione. 1) Come corollario si può ottenere una diversa dimostrazione del penultimo lemma.

Concludiamo questa parte generale facendo presente che i risultati dimostrati conducono in modo ovvio a corrispondenti caratterizzazioni delle forme spaziali quaternionali, considerato che una varietà Kähleriana quaternionale con tensore di curvatura a curvatura quaternionale costante è localmente isometrica a uno degli spazi $\mathbb{H}P^n$ (proiettivo quaternionale), $\widehat{\mathbb{H}P}^n$ (iperbolico quaternionale) o $\mathbb{H}^n$, dotati di metriche canoniche, a seconda che la curvatura scalare sia positiva, negativa o nulla rispettivamente. Facciamo anche presente che non siamo riusciti a stabilire se il caso 1) della proposizione precedente possa escludersi, ma ci pare senz'altro nel caso di una varietà Kähleriana compatta e a curvatura scalare positiva (omettiamo la dimostrazione per brevità).

6 – Esempi notevoli: le Grassmanniane $G_4(\mathbb{R}^6)$ e $G_2(\mathbb{C}^4)$

Consideriamo alcune Grassmanniane che ammettono strutture Kähleriane quaternionali (menzionate ad es. in [3]).

Facciamo uso di costruzioni fondamentali in uso per gli spazi simmetrici, rimandando a [11], Cap. IV, o [13], Cap. XI.

Consideriamo lo spazio omogeneo $G_4(\mathbb{R}^6) = SO(6)/SO(2) \times SO(4)$ Grassmanniana dei 4-piani orientati di $\mathbb{R}^6$. Sia $so(6) = \{so(2) + so(4)\} +$

$\mathcal{P}$ la decomposizione canonica dell'algebra di Lie di $SO(6)$ per la quale una matrice di $so(6)$ si scrive

$$\begin{pmatrix} Y & \xi \\ -{}^t\xi & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -{}^t\xi & 0 \end{pmatrix}$$

con Y, Z matrici antisimmetriche di ordine 2,4 rispettivamente, $Y = (y_B^A)$, $(A, B = 1, 2)$, $Z = (z_j^i)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, e $\xi = (\xi_i^A)$ matrice 2×4. Pensiamo $\mathcal{P}$ come spazio tangente in un fissato punto $o \in G_4(\mathbb{R}^6)$ (al quale ci si può sempre riferire a meno di isometrie). Se

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -{}^t\xi & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 & \xi_4^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 & \xi_4^2 \end{pmatrix}$$

è un vettore tangente in o pensiamo X identificato con ξ oppure anche con la coppia (ξ^1, ξ^2) di quaternioni $\xi^A = \xi_1^A + \mathbf{i}\xi_2^A + \mathbf{j}\xi_3^A + \mathbf{k}\xi_4^A$ $(A = 1, 2)$. Sia $\langle\, ,\, \rangle$ il prodotto scalare in o associato alla forma quadratica $\|X\|^2 = Tr(\xi^t\xi) = \sum_A \xi^A \overline{\xi}^A$ (ove $\overline{\xi}^A$ è il quaternione coniugato di ξ^A). È noto che *al prodotto* $\langle\, ,\, \rangle$ *corrisponde una metrica invariante canonica su* $G_4(\mathbb{R}^6)$. Consideriamo poi in o la struttura ipercomplessa $(I, J, K) \equiv (J_1, J_2, J_3)$ per la quale $IX = (-\xi^1\mathbf{i}, -\xi^2\mathbf{i})$, $JX = (-\xi^1\mathbf{j}, -\xi^2\mathbf{j})$, $KX = (-\xi^1\mathbf{k}, -\xi^2\mathbf{k})$ e osserviamo subito che rispetto ad essa *il prodotto* $\langle\, ,\, \rangle$ *è Hermitiano*. Verifichiamo quindi che *la struttura Hermitiana quaternionale definita da* (I, J, K), *assieme a* $\langle\, ,\, \rangle$ *è invariante rispetto all'azione aggiunta del gruppo di isotropia* $SO(2) \times SO(4)$. Sia infatti

$$G = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

con $U = (u_B^A)$, $V = (v_j^i)$, un elemento di $SO(2) \times SO(4)$. Teniamo conto che, come è ben noto, posto

$$J_\lambda X = \begin{pmatrix} 0 & J_\lambda\xi \\ -{}^t(J_\lambda\xi) & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

(con ovvio significato del simbolismo) risulta $V^t(J_\lambda\xi) = J'_\lambda(V^t\xi)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$, ove $J'_\lambda = \sum_\mu c_\lambda^\mu J_\mu$ per una opportuna matrice $C = (c_\mu^\lambda) \in SO(3)$ (cioè (J'_1, J'_2, J'_3) è una struttura ipercomplessa equivalente a (J_1, J_2, J_3)

nel definire la stessa struttura quaternionale). Per $X' = GXG^{-1}$ risulta evidentemente $'\xi = U\xi V^{-1}$. Per la precedente osservazione, si verifica facilmente che $V[{}^t(J_\lambda\xi)]U^{-1} = J'_\lambda(V{}^t\xi U^{-1})$ e quindi che $G(J_\lambda X)G^{-1} = J'_\lambda(GXG^{-1})$, $\lambda = 1,2,3$. Sicché appunto l'azione aggiunta del gruppo di isotropia trasforma la struttura (I,J,K) in un'altra (I',J',K') ammissibile per la stessa struttura Hermitiana quaternionale. *$G_4(\mathbb{R}^6)$ dotata della metrica $\langle\,,\,\rangle$ e della struttura quaternionale generalizzata definita da (I,J,K) è una varietà Kähleriana quaternionale.*

Osservazione. Teniamo ora conto che *per ogni fissato vettore X' tangente in o esiste una isometria di $G_4(\mathbb{R}^6)$ che lascia fisso o e il cui differenziale trasforma X' in un vettore $X = (\xi^1,\xi^2)$ per il quale $\xi^1 = r$, $\xi^2 = v\mathbf{i}$ con $u,v \in \mathbb{R}$.* Ciò può vedersi elementarmente come segue: se $X' = (\xi^{1'},\xi^{2'})$ è l'assegnato vettore tangente in o basta "coniugare" X' mediante l'azione di un elemento $G \in SO(2)\times SO(4)$ scegliendo $U \in SO(2)$ in modo tale che $(\xi^{1''},\xi^{2''}) \equiv \xi'' = U\xi'$ con $\xi^{1''}$, $\xi^{2''}$ ortogonali in $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$ e poi $V \in SO(4)$ tale che $\xi = U\xi' V^{-1}$ è formato da una coppia (ξ^1,ξ^2) di vettori del tipo detto. D'altra parte notiamo che lo stesso può dedursi anche come applicazione di un classico risultato generale riguardante il rango di uno spazio simmetrico (Cf. ad es. la Prop. 6.1 e il Teorema 6.2 in [11]; Cf. anche [3], pag. 298) tenendo conto che

$$\mathcal{A} = \left\{X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -{}^t\xi & 0\end{pmatrix} : \xi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0\end{pmatrix},\quad r,v\in\mathbb{R}\right\}$$

è una sottoalgebra abeliana massimale contenuta in $\mathcal{P}$, di dimensione appunto uguale al rango di $G_4(\mathbb{R}^6)$.

Nel seguito supporremo sempre $X \equiv (\xi^1,\xi^2)$ per quaternioni ξ^1,ξ^2 della forma $\xi^1 = r$, $\xi^2 = v\mathbf{i}$ con $v,r\in\mathbb{R}$, cioè $X \equiv (r, v\mathbf{i})$: di modo che $IX \equiv (-r\mathbf{i}, v)$, $JX \equiv (-r\mathbf{j}, -v\mathbf{k})$, $KX \equiv (-r\mathbf{k}, v\mathbf{j})$. Inoltre supporremo *$X$ unitario*, ovvero $r^2+v^2 = 1$. Calcolando risulta:

$$[X, IX] = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & -2rv & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2rv & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$[[X,IX],X] = (-r(1+2v^2)\mathbf{i}, v(1+2r^2))$$

$$[X,JX] = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v^2 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$[[X,JX],X] = (-r(1-v^2)\mathbf{j}, -v(1-r^2)\mathbf{k})$$

$$[X,KX] = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$[[X,KX],X] = (-r(1-v^2)\mathbf{k}, v(1-r^2)\mathbf{j})$$

Determiniamo ora l'azione dell'operatore R_X su $\mathbb{H}X$, tenendo conto della formula $R(X,Y)Z = -[[X,Y],Z]$.

Risulta:

$$\begin{aligned} R(X,IX)X &= (r(1+2v^2)\mathbf{i}, -v(1+2r^2)) \\ R(X,JX)X &= (r(1-v^2)\mathbf{j}, v(1-r^2)\mathbf{k}) \\ R(X,KX)X &= (r(1-v^2)\mathbf{k}, -v(1-r^2)\mathbf{j}) \end{aligned}$$

$$\sigma(X,IX) = 1+4r^2v^2, \quad \sigma(X,JX) = \sigma(X,KX) = 1-2r^2v^2$$

$$R(X,IX,X,JX) = R(X,JX,X,KX) = R(X,KX,X,IX) = 0.$$

In definitiva, IX, JX, KX *individuano piani quaternionali critici per* R^c_X. *Inoltre, il piano* $\{X,IX\}$ *è critico per* R_X *se e solo se si verifica uno dei seguenti tre casi estremali:* 1) $v=0$ o 2) $r=0$ *nei quali casi* $\sigma(X,IX) = \sigma(X,JX) = \sigma(X,KX) = 1$ *oppure* 3) $r^2 = v^2 = 1/2$, *nel quale* $\sigma(X,IX) = 2$, $\sigma(X,JX) = \sigma(X,KX) = 1/2$. *Analogamente per i piani* $\{X,JX\}$, $\{X,KX\}$.

Osservazioni. In relazione alla fissata struttura ipercomplessa:

1) $H_I(X)$, $H_J(X)$, $H_K(X)$ sono critiche per R_X oppure no simultaneamente;

2) $H_I(X)$, $H_J(X)$ $H_K(X)$ sono critiche per R_X in corrispondenza di vettori X tangenti a sottovarietà quaternionali isometriche a $\mathbb{H}P^1$ o $\mathbb{C}P^2$;

3) in generale, per $X = (\xi^1, \xi^2)$ la condizione $r = 0$ o $v = 0$ corrisponde alla proporzionalità di ξ^1, ξ^2 per un fattore reale; la condizione $|r| = |v|$ invece alla proporzionalità per un fattore unitario immaginario $z \in Im\mathbb{H} \cap Sp(1)$;

4) $H_\alpha(X) \equiv \lambda_\alpha(X) \equiv \sigma(X, J_\alpha X) > 0$, $\forall \alpha = 1, 2, 3$.

Continuando a calcolare, si ottiene successivamente

$$\begin{gathered} R(X,IX)X + \lambda_I(X)IX = 2rv(v(1-2r^2)\mathrm{i}, -r(1-2v^2)) \\ (\operatorname{grad}^V H_I) \equiv 4I[R(X,IX)X + \lambda_I(X)IX] = \\ = 8rv(v(1-2r^2), r(1-2v^2)\mathrm{i}) \\ \|(\operatorname{grad}^V H_I)_X\|^2 = 64r^2v^2(1-4r^2v^2)\,, \\ [X, (\operatorname{grad}^V H_I)_X] = 0, \quad \sigma'(X, (\operatorname{grad}^V H_I)_X) \equiv 0\,. \end{gathered}$$

Analogamente:

$$\begin{gathered} R(X,JX)X + \lambda_J(X)JX = rv(-v(1-2r^2)\mathrm{j}, -r(1-2v^2)\mathrm{k}) \\ (\operatorname{grad}^V H_J)_X = 4rv(-v(1-2r^2), -r(1-2v^2)\mathrm{i}) = \\ = (\operatorname{grad}^V H_K)_X = -(1/2)(\operatorname{grad}^V H_I)_X \end{gathered}$$

e poi

$$I(\operatorname{grad}^V H_I)_X = 8rv(-v(1-2r^2)\mathrm{i}, r(1-2v^2))$$

$$[X, I(\operatorname{grad}^V H_I)_X] = 8rv(1-4r^2v^2)\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Big[[X, I(\operatorname{grad}^V H_I)_X], X\Big] = 8rv(1-4r^2v^2)(-vi, r)\,.$$

Quindi, facendo il prodotto scalare con $I(\operatorname{grad}^V H_I)_X$, risulta

$$\begin{aligned}\sigma'(X, I(\operatorname{grad}^V H_I)_X) &= 64r^2v^2(1-4r^2v^2)^2\,,\\ \sigma(X, I(\operatorname{grad}^V H_I)_X) &= 1-4r^2v^2\,.\end{aligned}$$

Analogamente

$$[X, J(\operatorname{grad}^V H_J)_X] = 4r^2v^2(1-2v^2)\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\Big[[X, J(\operatorname{grad}^V \lambda_J)(X)],\Big] = 4r^2v^2(-r(1-2v^2)\mathbf{j}, -v(1-2r^2)\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}\sigma'(X, J(\operatorname{grad}^V H_J)(X)) &= 32r^4v^4(1-4r^2v^2)\,,\\ \sigma(X, J(\operatorname{grad}^V H_J)(X)) &= 2r^2v^2\,.\end{aligned}$$

Inoltre

$$[X, K(\operatorname{grad}^V H_K)_X] = 4r^2v^2(1-2v^2)\left[\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\Big[[X, K(\operatorname{grad}^V H_K)_X], X\Big] = 4r^2v^2(-r(1-2v^2)\mathbf{k}, v(1-2r^2)\mathbf{j})$$

$$\begin{aligned}\sigma'(X, K(\operatorname{grad}^V H_K)_X) &= 32r^4v^4(1-4r^2v^2)\,,\\ \sigma(X, K(\operatorname{grad}^V H_K)_X) &= 2r^2v^2\,.\end{aligned}$$

Osservazioni. 1) Si ha simultaneamente $\sigma'(X, J_\alpha(\operatorname{grad}^V \lambda_\alpha)_X) = 0$ per $\alpha = 1, 2, 3$ in corrispondenza di vettori X per i quali $rv(1-4r^2v^2) = 0$, cioè nei tre casi estremali già considerati. 2) Si noti che

$$\sum_\alpha \sigma'(X, J_\alpha(\operatorname{grad}^V H_\alpha)_X) = 64r^2v^2(1-4r^2v^2)(1-3r^2v^2)$$

$$\sum_\alpha \sigma(X, J_\alpha(\mathrm{grad}^V H_\alpha)_X) = 1,$$

$$\sum_\alpha \sigma(X, (\mathrm{grad}^V F_\alpha)_X) = 6\left[\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha(X)^2\right) - 3(\eta/n+2)^2\right]$$

(ove $\eta/n + 2 = 1$).

Lo studio della Grassmanniana complessa $G_2(\mathbb{C}^4) = SU(4)/S(U(2)\times U(2))$ si riduce a quello precedente. Basta infatti osservare che $G_2(\mathbb{C}^4)$ è isometrica a $G_4(\mathbb{R}^6)$ con la metrica canonica di stessa curvatura scalare (Cf. ad esempio [16]).

7 – Il caso di $G_2/SO(4)$

Ricordiamo che G_2 è il gruppo degli automorfismi dell'algebra $\mathbb{O}$ degli ottetti di Cayley. Consideriamo un ottetto $x \in \mathbb{O}$ come una coppia ordinata di quaternioni (ξ^1, ξ^2) e il prodotto $x \cdot x'$ definito in $\mathbb{O}$ da

$$(\xi^1, \xi^2)(\xi^{1'}, \xi^{2'}) = (\xi^1\xi^{1'} - \bar{\xi}^{2'}\xi^2, \xi^{2'}\xi^1 + \xi^2\bar{\xi}^{1'}) .$$

Consideriamo l'azione di $Sp(1)\cdot Sp(1) \cong SO(4)$ su $\mathbb{O}$ definita da

$$T_{a,q} : (\xi^1, \xi^2) \to (\bar{q}\xi^1 q, a\xi^2 q)$$

per $a, q \in Sp(1)$. Risulta, con facili calcoli, che le trasformazioni $T_{a,q}$ costituiscono un sottogruppo di G_2: sarà quello che qui indicheremo con $SO(4)$ e rispetto al quale è da intendere eseguito il quoziente $G_2/SO(4)$.

Identificato l'ottetto immaginario $x \in Im\mathbb{O}$ dato dalla coppia di quaternioni ($\xi^1 = x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$, $\xi^2 = x^4 + x^5\mathbf{i} + x^6\mathbf{j} + x^7\mathbf{k}$) con il vettore $x \equiv (x^i)$ di $\mathbb{R}^7$ il gruppo G_2, e quindi anche il considerato sottogruppo $SO(4)$, possono pensarsi in $SO(7)$. L'algebra di Lie di $SO(4)$ può determinarsi come quella degli endomorfismi di $\mathbb{R}^7$ che con notazione quaternionale si scrivono $(d\bar{q}\xi^1 + \xi^1 dq, da\xi^2 + \xi^2 dq) = (\xi^{1'}, \xi^{2'})$ per ogni coppia $(dq, da) = (p^1\mathbf{i} + p^2\mathbf{j} + p^3\mathbf{k}, b^1\mathbf{i} + b^2\mathbf{j} + b^3\mathbf{k})$ di quaternioni immaginari. Ovvero in termini di coordinate reale e vettori x, x' colonna, $x' = Ax$, con A matrice della forma

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2p_1 & -2p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2p_3 & 0 & 2p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p_2 & -2p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -(b_1+p_1) & -(b_2+p_2) & -(b_3+p_3) \\ 0 & 0 & 0 & b_1+p_1 & 0 & -(b_3-p_3) & -(b_2-p_2) \\ 0 & 0 & 0 & b_2+p_2 & b_3-p_3 & 0 & -(b_1-p_1) \\ 0 & 0 & 0 & b_3+p_3 & -(b_2-p_2) & b_1-p_1 & 0 \end{array}\right)$$

Consideriamo ora una matrice antisimmetrica X della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -{}^t\xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

La condizione affinché X appartenga all'algebra di Lie di G_2, cioè che risulti $Xx \cdot x' + x \cdot Xx' = X(x \cdot x')$, $\forall x, x' \in \mathbb{R}^7 = Im\mathbb{O}$, è verificata se e solo se ξ è della forma

$$\xi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ -b'+c & a'+d & d'-a & -c'-b \end{pmatrix}.$$

La decomposizione canonica dell'algebra di Lie di G_2 da considerare è $\mathcal{G}_2 = so(4) + \mathcal{P}$, ove $\mathcal{P}$ è costituito da matrici di tale tipo. Possiamo quindi pensare X come il generico vettore tangente in un punto o fissato dello spazio $G_2/SO(4)$ e identificarlo con la terna di quaternioni (ξ^1, ξ^2, ξ^3) con

$$\xi^1 = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad \xi^2 = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}, \quad \xi^3 = -\xi^1\mathbf{j} + \xi^2\mathbf{i}$$

(cioè $T_o(G_2/SO(4)) \equiv \{(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{H}^3 \colon \xi^1\mathbf{i} + \xi^2\mathbf{j} + \xi^3\mathbf{k} = 0\}$). Rispetto a tale identificazione poniamo allora

$$IX = (\mathbf{i}\xi^1, \mathbf{i}\xi^2, \mathbf{i}\xi^3), \quad JX = (\mathbf{j}\xi^1, \mathbf{j}\xi^2, \mathbf{j}\xi^3), \quad KX = (\mathbf{k}\xi^1, \mathbf{k}\xi^2, \mathbf{k}\xi^3).$$

Non è difficile rendersi conto che *la struttura quaternionale generalizzata definita da* (I, J, K) *è invariante rispetto all'azione aggiunta del gruppo di isotropia* $SO(4)$. Infatti, se

$$G = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

con $U = (u^A_B)$, $A, B = 1, \dots, 3$, $V = (v^i_j)$, $i, j = 1, \dots, 4$, è un elemento del considerato $SO(4)$ e $\xi = (\xi^A_i)$, un vettore tangente in o, ragionando come per $G_4(\mathbb{R}^6)$, si ha $G(J_\lambda X)G^{-1} = J'_\lambda(GXG^{-1})$, $\lambda = 1, 2, 3$, con (J'_1, J'_2, J'_3) struttura ipercomplessa equivalente a (J_1, J_2, J_3). Quindi *risulta definita su* $G_2/SO(4)$ *una struttura quaternionale (generalizzata) invariante.* Consideriamo poi la metrica hermitiana $\langle , \rangle$ associata alla forma quadratica $\|X\|^2 = Tr(\xi^t\xi) = \sum_A \xi^A \overline{\xi}^A$. Con ciò $G_2/SO(4)$ *è una varietà quaternionale Kähleriana.*

Teniamo ora presente che a meno di un movimento possiamo supporre che il vettore X tangente in o da studiare sia della forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ -t\xi & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con $a+b+c = 0$. Infatti, come subito si verifica, tali matrici formano una sottoalgebra abeliana massimale contenuta in $\mathcal{P}$, di dimensione 2, uguale al rango di $G_2/SO(4)$, e si può quindi applicare l'osservazione fatta in caso analogo per la Grassmanniana $G_4(\mathbb{R}^6)$.

Posto $X = (a\mathbf{i}, b\mathbf{j}, c\mathbf{k})$, si ha

$$IX = (-a, b\mathbf{k}, -c\mathbf{j}), \quad JX = (-a\mathbf{k}, -b, c\mathbf{i}), \quad KX = (a\mathbf{j}, -b\mathbf{i}, -c)$$

e, supposto nel seguito X *unitario*, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Calcolando risulta

$$[X, IX] = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2bc & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2bc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(b^2+c^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^2+c^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$[[X, IX], X] = (-a^3, b(b^2 + 3c^2)\mathbf{k}, -c(3b^2 + c^2)\mathbf{j})$$

e poi (permutando circolarmente insieme $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, (a, b, c), (ξ^1, ξ^2, ξ^3)) *si trova*

$$R(X, IX)X = (a^3, -b(b^2 + 3c^2)\mathbf{k}, c(3b^2 + c^2)\mathbf{j})$$

$$R(X, JX)X = (a(a^2 + 3c^2)\mathbf{k}, b^3, -c(3a^2 + c^2)\mathbf{i})$$

$$R(X, KX)X = (-a(a^2 + 3b^2)\mathbf{j}, b(3a^2 + b^2)\mathbf{i}, c^3).$$

$$\langle R(X, IX)X, JX\rangle = \langle R(X, IX)X, KX\rangle = \langle R(X, JX)X, KX\rangle = 0$$

$$\sigma(X, IX) = 1/2 + 6b^2c^2, \ \sigma(X, JX) = 1/2 + 6a^2c^2, \ \sigma(X, KX) = 1/2 + 6a^2b^2.$$

In definitiva, IX, JX, KX individuano piani quaternionali critici per R^c_X. Scriveremo perciò $H_I(X) = \lambda_I(X)$, $H_J(X) = \lambda_J(X)$, $H_K(X) = \lambda_K(X)$. Inoltre, $\lambda_I(X)$, $\lambda_J(X)$, $\lambda_K(X)$ e i corrispondenti piani $\{X, IX\}$, $\{X, JX\}$, $\{X, KX\}$ sono, simultaneamente, critici per R_X se e solo se:

$$\begin{array}{l} a = 0, \quad |b| = |c| = 1/2, \quad \text{ovvero} \quad \sigma(X, IX) = 2, \\ \qquad \sigma(X, JX) = \sigma(X, KX) = 1/2 \end{array} \qquad \text{(P.C.)}.$$

In tali casi il vettore X è tangente a una sottovarietà quaternionale isometrica a $\mathbb{C}P^2$.

Osservazioni. 1) Tenuto conto che $a^4 + b^4 + c^4 = 1/2$ e quindi $a^2b^2, b^2c^2, a^2c^2 \leq 1/4$, risulta subito

$$2 \geq \sigma(X, IX), \quad \sigma(X, JX), \quad \sigma(X, KX) \geq 1/2$$

e si hanno simultaneamente uguaglianze se e solo se ci si trova in uno dei tre casi precedenti. 2) In generale, per $X = (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathcal{P}$ le dette condizioni corrispondono all'annullarsi di uno dei quaternioni ξ^1, ξ^2, ξ^3.

Risulta poi

$$S(X) = 9(1/4 + 4a^2b^2c^2), \quad D(X) = 1/2 + 18a^2b^2c^2(1 + 12a^4b^2c^2)$$

e quindi

$$D = 96^{-1}(16S^2 - 24S + 21).$$

Osserviamo ora che in generale il discriminante

$$\mathrm{Dis} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 - \lambda_3)^2(\lambda_3 - \lambda_1)^2$$

dell'equazione caratteristica $\lambda^3 - (3\eta/n + 2)\lambda^2 + S\lambda - D = 0$ è dato da

$$\mathrm{Dis} = 4\big[3(\eta/n + 2)^2 - S\big]^3 - 27\big[-2(\eta/n + 2)^3 + (\eta/n + 2)S - D\big]^2$$

ovvero nel nostro caso, in cui $\eta/n + 2 = 1$,

$$\mathrm{Dis} = 4[3 - S]^3 - 27[-2 + S - D]^2 .$$

Se poniamo $u = 6a^2b^2c^2$ troviamo subito $\mathrm{Dis} = 108u^3(1 - 9u)$ sicché

$$\mathrm{Dis}(X) = 0 \iff abc = 0$$

(non potendo risultare $1 - 9u = 0$, ovvero $|abc| = 1/3\sqrt{6}$, poiché i valori assoluti di a, b, c sono non superiori a $1/2$). Notiamo che si ritrovano così tutti e soli i casi particolari precedentemente considerati.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Berger: *Remarques sur les groupes d'holonomie des varietés riemanniennes*, C.R. Acad. Sci. Paris, **263** (1966), 76-78.

[2] J. Bernt - L. Vanhecke: *Two natural generalisations of locally symmetric spaces*, Differential Geometry and its Applications, **2** (1992), 57-80.

[3] A.L. Besse: *Einstein manifolds*, Ergebnisse der Math. 3 Folge Band 10, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1987.

[4] M. Bruni: *Relazioni tra metrica euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, (4) **38** (1965), 487-492.

[5] Q.S. Chi: *Two-points homogeneous spaces from a geometric viewpoint*, to appear in J. Differential geometry.

[6] Q.S. Chi: *A curvature characterisation of certain locally rank one symmetric spaces*, J. Differential geometry, (2) **28** (1988), 187-202.

[7] Q.S. Chi: *Quaternionic Kähler manifolds and a curvature characterisation of two-point homogeneous spaces*, III. J. Math., (3) **35** (1991), 408-418.

[8] A. DERDZINSKI: *Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four*, Compositio Mathematica, **49** (1983), 405-533.

[9] A. GRAY: *A note on manifolds whose holonomy group is a soubgroup of $Sp(n) \cdot Sp(1)$*, Michigan Math. J., **16** (1965), 125-128.

[10] A. GRAY: *Compact Kähler manifolds with nonnegative sectional curvature*, Inventiones math., 41 (1977), 33-43.

[11] S. HELGASON: *Differential geometry and Symmetric spaces*, Academic Press, New York e Londra, 1962.

[12] S. ISHIHARA: *Quaternion Kählerian manifolds*, J. Differential geometry, **9** (1974), 483-500.

[13] S. KOBAYASHI - K. NOMIZU: *Foundations of differential geometry, II*, Intersciences Publishers, New York-London, 1969.

[14] S. MARCHIAFAVA: *Sulla geometria locale delle varietà Kähleriane quaternionali*, Bollettino U.M.I., (7) **5-B** (1991), 417-447.

[15] E. MARTINELLI: *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, Rend. Accad. Naz. Lincei, (8) **26** (1959), 353-362.

[16] S. SALAMON: *Riemannian geometry and holonomy groups*, Pitman Research Notes in Math., Vol. 201, Oxford, 1989.

[17] J. SIMONS: *On the transitivity of holonomy systems*, Annals of Math., (2) **76** (1962), 213-234.

[18] I.M. SINGER - J.A. THORPE: *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces*, In: Global Analysis, in honour of K. KODAIRA, pagg. 355-366. Princeton Mathematical series n° 29, Princeton, 1969.

Lavoro pervenuto alla redazione il 4 febbraio 1993
ed accettato per la pubblicazione il 9 giugno 1993

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Stefano Marchiafava - Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Roma - "La Sapienza" - Piazzale A. Moro, 2 - 00185 ROMA - e-mail: Marchiafava e Sci. UNIROMA 1.IT.