Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 145-158

Una proprietà di una classe di trasformazioni integrali che generalizza la trasformata di Fourier

C. BELINGERI – P.E. RICCI

Dedicato alla Memoria del Prof. Aldo Ghizzetti

Riassunto: *In questo lavoro si richiama una nota proprietà della trasformata di Fourier collegata con i polinomi di Hermite e la si estende, poi, a una classe generale di Trasformate Integrali collegate con differenti sistemi di polinomi ortogonali.*

Abstract: *In this paper we first recall of a known property of the Fourier transform (Proposition I), connected with Hermite polynomials, and then we extend this property to a general class of Integral Transform related with different orthogonal polynomial sets.*

1 – Richiami su una proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Denotiamo con

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx \tag{1.1}$$

Key Words and Phrases: *Fourier transform – Orthogonal polynomials – Generating functions*
A.M.S. Classification: 33C25 – 42A38
Questo lavoro è stato in parte finanziato con i fondi 40% del M.U.R.S.T..

la trasformata di Fourier di f.

Siano $He_k(x)$ i polinomi di Hermite, definiti dalla formula di Rodrigues:

$$He_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} D^k(e^{-x^2/2}), \quad (k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}). \tag{1.2}$$

Il sistema $\{He_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ è *ortogonale* in $(-\infty, \infty)$ rispetto alla *funzione peso* $W(x) := e^{-x^2/2}$, ed inoltre si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} He_k^2(x)dx = \sqrt{2\pi}k!, \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Ricordiamo che i polinomi di Hermite $He_k(x)$, che abbiamo qui considerato, sono collegati ai polinomi di Hermite $H_k(x)$, ortogonali sull'asse reale rispetto alla funzione peso e^{-x^2}, dalle formule (cfr. [3, p. XXXV]):

$$He_k(x) = 2^{-k/2} H_k\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \iff H_k(x) = 2^{k/2} He_k(x\sqrt{2}).$$

Dimostriamo la seguente proposizione (cfr. anche [1]):

Proposizione I. *Consideriamo una funzione f per la quale risulti: $x^k f(x) \in L(-\infty, \infty)$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, e siano α_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ i coefficienti di Hermite-Fourier della funzione $f(x)\exp(x^2/2)$:*

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) He_k(x)dx. \tag{1.3}$$

Allora i coefficienti dello sviluppo formale in serie di Taylor in un intorno dell'origine della funzione $\hat{f}(y)\exp(y^2/2)$ sono dati da: $i^k\alpha_k$.

Dim. Scriviamo la (1.1) nella forma:

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-x^2/2}(e^{x^2/2} f(x))dx \tag{1.1'}$$

e sviluppiamo la funzione $e^{x^2/2} f(x)$ in serie di Hermite-Fourier.

(La possibilità di fare uso dello sviluppo in serie di Hermite-Fourier all'interno delle successive formule sarà giustificata, nel caso generale, all'inizio della dimostrazione del successivo Teorema I).

La (1.1) diventa:

$$\hat{f}(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixy} \mathrm{e}^{-x^2/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k He_k(x) \right) dx \,. \tag{1.4}$$

Integrando termine a termine e usando la formula di Rodrigues (1.2), giungiamo allo sviluppo formale:

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) : &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixy} D^k (\mathrm{e}^{-x^2/2}) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k (-i)^k y^k \mathrm{e}^{-y^2/2} = \mathrm{e}^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \alpha_k y^k \,, \end{aligned}$$

cioè alla seguente formula:

$$\mathrm{e}^{y^2/2} \hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k \alpha_k y^k \,. \tag{1.5}$$

□

Per estendere il risultato formale sopra evidenziato al caso di sistemi di polinomi ortogonali differenti dai polinomi di Hermite, osserviamo che lo stesso può essere conseguito facendo uso della funzione generatrice:

$$\psi(x, z) := \mathrm{e}^{xz - z^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} He_k(x) \frac{z^k}{k!} \,. \tag{1.6}$$

Posto $z = iy$, si ha, infatti:

$$\mathrm{e}^{ixy + y^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} He_k(x) y^k \,.$$

Moltiplicando i due termini di tale uguaglianza per $f(x)$ e integrando termine a termine otteniamo:

$$\mathrm{e}^{y^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixy} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) He_k(x) dx \right] y^k \,,$$

cioè, per le (1.1) e (1.3):

$$\sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{y^2/2}\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}(\sqrt{2\pi}k!\alpha_k)y^k\,.$$

Si giunge allora alla:

$$\mathrm{e}^{y^2/2}\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} i^k\alpha_k y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k\,, \tag{1.7}$$

che è equivalente alla (1.5).

2 – Estensione del risultato formale

Si consideri il sistema di *polinomi ortogonali*: $\{G_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, generato in (a,b) dalla *funzione peso* $W(x)$ (cfr. ad esempio [2]).

Facciamo le seguenti ipotesi:

Hp. I: $W(x) \geq 0$ in (a,b), e $W(x) \not\equiv 0$ in ogni intervallo non degenere $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$;

Hp. II: $\forall k \in \mathbb{N}_0$, $x^k W(x) \in L(a,b)$, cioè tutti i momenti della misura associata al peso sono finiti.

Poniamo

$$\int_a^b G_h(x)G_k(x)W(x)dx = h_k\delta_{h,k}\,,$$

e quindi:

$$h_k := \int_a^b G_k^2(x)W(x)dx\,.$$

Sia $F(x,y)$ la funzione generatrice del sistema di polinomi $\{G_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, corrispondente alla successione $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, risulti cioè:

$$F(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k G_k(x) y^k\,. \tag{2.1}$$

Osservazione I. Come successione $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ si sceglie usualmente una delle due seguenti (cfr. ad esempio [6, p. 29]):

$$\text{a)}\quad c_k := 1\,, \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0 \quad \text{(Funzione Generatrice ordinaria)}$$
$$\text{b)}\quad c_k := \frac{1}{k!}\,, \qquad \forall k\in\mathbb{N}_0 \quad \text{(Funzione Generatrice esponenziale)}\,.$$

Supponiamo inoltre che risulti:

Hp. III: $F^2(x,y)W(x)\in L(a,b)$.

Per ogni $f(x)$ tale che: $x^k f(x)\in L(a,b)$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$, consideriamo ora la trasformazione integrale (cfr. [7]):

$$\hat{f}(y) := \int_a^b F(x,y)f(x)dx\,, \tag{2.2}$$

il cui nucleo: $K(x,y) := F(x,y)$, coincide con la funzione generatrice definita dalla (2.1).

Si può allora dimostrare il seguente

TEOREMA I. *Ammesse valide le precedenti ipotesi* I-II-III, *supponiamo che la f sia tale da aversi: $x^k f(x)\in L(a,b)$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$. Denotiamo poi con α_k $(k\in\mathbb{N}_0)$ i coefficienti di Fourier generalizzati della funzione $W^{-1}(x)f(x)$:*

$$\alpha_k = \frac{1}{h_k}\int_a^b f(x)G_k(x)dx\,. \tag{2.3}$$

Allora i coefficienti dello sviluppo formale in serie di Taylor, in un intorno dell'origine, della funzione $\hat{f}(y)$ sono dati da: $\alpha_k\ c_k\ h_k$.

Dim. Mostriamo dapprima che, sotto il segno di integrale, è possibile sostituire la funzione $W^{-1}f$ con il proprio sviluppo in serie di Fourier generalizzata. Sussiste, cioè l'uguaglianza:

$$\int_a^b F(x,y)W(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k G_k(x)\right)dx = \int_a^b F(x,y)f(x)dx\,. \tag{2.4}$$

Infatti, posto $S_N := \sum_{k=0}^{N}\alpha_k G_k(x)$, sussiste la relazione di limite:

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b \left(W^{-1}(x)f(x)-S_N\right)^2 W(x)dx = 0\,.$$

Applicando la diseguaglianza di Schwarz in $L^2(a,b)$ possiamo allora scrivere:

$$\int_a^b F(x,y)W(x)(W^{-1}(x)f(x)-S_N)dx =$$

$$= \int_a^b F(x,y)W^{1/2}(x)(W^{-1}(x)f(x)-S_N)W^{1/2}(x)dx \le$$

$$\le \left\{\int_a^b F^2(x,y)W(x)dx\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b \left(W^{-1}(x)f(x)-S_N\right)^2 W(x)dx\right\}^{1/2}$$

e conseguentemente, ricordando l'ipotesi III:

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b F(x,y)W(x)S_N dx = \int_a^b F(x,y)f(x)dx\,.$$

Avendo conseguito il risultato predetto, possiamo ora ripetere il ragionamento effettuato nel paragrafo precedente, scrivendo la (2.2) nella forma:

$$\hat f(y) := \int_a^b F(x,y)W(x)W^{-1}(x)f(x)dx =$$

$$= \int_a^b F(x,y)W(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k G_k(x)\right)dx\,.$$

Dalla (2.1) otteniamo:

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_a^b F(x,y)W(x)G_k(x)dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_a^b \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell W(x)G_\ell(x)G_k(x)y^\ell dx = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k c_k h_k y^k \,,\end{aligned} \tag{2.5}$$

e quindi:

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k c_k h_k y^k \overset{(2.3)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\int_a^b f(x)G_k(x)dx \right) y^k \,, \tag{2.6}$$

cioè la tesi. □

Osservazione II. Si noti che il risultato del Teorema I ha finora solo carattere formale, in quanto non sono state considerate le condizioni da imporre alla funzione f per garantire la possibilità di invertire, nel corso della dimostrazione della Proposizione I e del Teorema I, i simboli di integrale e di serie né è stata verificata (almeno per $|y|$ sufficientemente piccolo) la convergenza delle serie di Taylor considerate.

3 – Risultati di convergenza per gli sviluppi formali

In questo paragrafo ci limiteremo a considerare il caso dei polinomi ortogonali *classici*. Mostreremo che, almeno in questo caso, è possibile dare *condizioni sufficienti* consistenti in alcune restrizioni sui parametri (α per i polinomi di Laguerre; α, β per i polinomi di Jacobi) e condizioni relative al decadimento asintotico dei coefficienti di Fourier generalizzati α_k della funzione $W^{-1}f$, in modo da garantire la convergenza degli sviluppi formali in precedenza considerati.

Osserviamo che, come si verifica facilmente, per i polinomi ortogonali classici sussiste sempre la precedente Ipotesi III.

3.1 – Polinomi di Hermite $He_k(x)$

Proviamo il seguente

Teorema II. *Se i coefficienti di Hermite-Fourier* α_k *della funzione* $\mathrm{e}^{x^2/2}f(x)$ *verificano il comportamento asintotico,* $\exists\,\varepsilon > 0$ *tale che:*

$$|\alpha_k| = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{(k!)^{1/2}k^{1+\varepsilon}}\Big)\,, \tag{3.1}$$

allora $\forall y \in \mathbb{R}$ *sussiste lo sviluppo in serie di Taylor espresso dalla* (2.6).

Dim. Consideriamo la diseguaglianza:

$$\big|He_k(x)\big| \le C_1 (k!)^{1/2}\mathrm{e}^{x^2/4}\,, \qquad (-\infty < x < \infty)\,, \tag{3.2}$$

che segue immediatamente per i polinomi di Hermite $He_k(x)$ dalla stima che si può trovare nel lavoro di Avantaggiati [1, formula (1.12′)].

Come conseguenza della (3.2), e tenendo conto dell'ipotesi (3.1) si può scrivere:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{-x^2/2}\alpha_k He_k(x)\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|\mathrm{e}^{-x^2/2}\big|He_k(x)\big| \le \\ &\le C_1\sum_{k=0}^{\infty}|\alpha_k|(k!)^{1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4} \le D_1\mathrm{e}^{-x^2/4}\,.\end{aligned}$$

Per il teorema di Lebesgue è allora possibile effettuare il seguente scambio tra il simbolo di limite e quello di integrale:

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k\int_a^b F(x,y)\mathrm{e}^{-x^2/2}He_k(x)dx = \\ &= \int_a^b \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\alpha_k \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}}He_k(x)dx\,,\end{aligned}$$

poiché risulta

$$\left|\sum_{k=0}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}}\alpha_k He_k(x)\right| \le D_1\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}+xy-\frac{y^2}{2}}\,,$$

e, per ogni fissato $y \in \mathbb{R}$, il secondo membro di questa ultima diseguaglianza appartiene a $L(-\infty, \infty)$.

Osservazione III. Poiché l'ulteriore inversione tra il simbolo di serie e quello di integrale che è necessaria per scrivere l'ultima uguaglianza della formula (2.5) non implica alcuna ulteriore restrizione sul comportamento dei coefficienti di Hermite-Fourier α_k, si può ritenere provata la tesi. $\square$

Il risultato del Teorema II si può così riassumere:

Caso dei polinomi di Hermite.

Sia: $a := -\infty$, $b := \infty$,

$$W(x) := \mathrm{e}^{-x^2/2}\,, \quad G_k(x) = He_k(x) \quad \text{(Polinomi di Hermite)}$$

$$h_k = \sqrt{2\pi}k!\,.$$

Si assuma: $c_k := \dfrac{1}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$; allora:

$$F(x,y) = \mathrm{e}^{xy-y^2/2}\,,$$
$$\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{xy-y^2/2} f(x)dx\,.$$

Supponiamo: $|\alpha_k| = \mathcal{O}\big((k!)^{-1/2}k^{-1-\varepsilon}\big)$. Allora, come conseguenza del Teorema II, si hanno le seguenti formule:

$$\mathrm{e}^{x^2/2} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k He_k(x) \tag{3.3}$$

$$\hat{f}(y) = \mathrm{e}^{-y^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} i^k \alpha_k y^k = \mathrm{e}^{z^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k\,, \quad (z := iy)\,. \tag{3.4}$$

(La convergenza dello sviluppo (3.3) essendo generalmente intesa in media quadratica).

3.2 – Polinomi di Laguerre $L_k^{(\alpha)}(x)$

Dimostriamo il seguente

TEOREMA III. *Se* $\alpha \geq -1/2$ *e se i coefficienti di Laguerre-Fourier* α_k *della funzione* $x^{-\alpha}\mathrm{e}^x f(x)$ *hanno il comportamento asintotico descritto dalla formula:* $\exists\varepsilon > 0$ *tale che:*

$$|\alpha_k| = \mathcal{O}\left(\left[\frac{k!}{\Gamma(\alpha+k+1)}\right]^{1/2}\frac{1}{k^{3/4+\varepsilon}}\right), \tag{3.5}$$

allora $\forall y$*:* $|y| < 1$ *sussiste lo sviluppo in serie di Taylor espresso dalla* (2.6)*.*

DIM. Consideriamo la stima:

$$\begin{gathered} |L_k^{(\alpha)}(x)| \leq h_k^{1/2}[C_2 k^{-1/4} + C_3 k^{-1/2} x^{5/4}]\mathrm{e}^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} \\ \left(h_k := \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!};\quad \alpha \geq -\frac{1}{2};\quad 0 \leq x < +\infty\right) \end{gathered} \tag{3.6}$$

che è dimostrata, per i polinomi di Laguerre nel libro di NIKIFOROV – UVAROV [5]. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k^{(\alpha)}(x) F(x,y) W(x)\right| \leq \\ &\leq (1-y)^{-\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| x^{\alpha} \mathrm{e}^{-\frac{x}{1-y}} |L_k^{(\alpha)}(x)| \leq \\ &\leq C_2(\alpha;y)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} x^{\alpha/2-1/4} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \left[\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!}\right]^{1/2} k^{-1/4} + \\ &+ C_3(\alpha;y)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} x^{\frac{\alpha}{2}+1} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \left[\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{k!}\right]^{1/2} k^{-1/2}. \end{aligned}$$

Allora, ammesso che sia verificata la condizione (3.5), si ha $\forall n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_k L_k^{(\alpha)}(x) F(x,y) W(x)\right| \leq \\ &\leq [D_2(\alpha;y) + D_3(\alpha;y) x^{5/4}]\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)} x^{\alpha/2-1/4} \end{aligned}$$

ed è anche questa volta possibile fare uso del teorema di Lebesgue poiché, ricordando la condizione $|y| < 1$, il secondo membro dell'ultima diseguaglianza appartiene a $L(0, \infty)$.

Un'osservazione, simile alla precedente Osservazione III, può essere fatta anche in questo caso, cosicché si può ritenere raggiunta la tesi. $\square$

Il risultato del Teorema III si può così riassumere:

Caso dei polinomi di Laguerre.

Sia: $a := 0$, $b := +\infty$,

$$W(x) := x^\alpha \mathrm{e}^{-x}\,, \qquad (\alpha \geq -1/2)\,,$$

$$G_k(x) = L_k^{(\alpha)}(x) \qquad \text{(Polinomi di Laguerre)}$$

$$h_k = \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!}\,.$$

Si assuma: $c_k := 1$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, allora:

$$F(x, y) = (1 - y)^{-(\alpha+1)} \mathrm{e}^{-\frac{xy}{1-y}}$$

$$\hat{f}(y) := \int_0^{+\infty} (1 - y)^{-(\alpha+1)} \mathrm{e}^{-\frac{xy}{1-y}} f(x) dx\,.$$

Ammesso che $\exists \varepsilon > 0$ tale che:

$$|\alpha_k| = \mathcal{O}\left(\left[\frac{k!}{\Gamma(\alpha + k + 1)}\right]^{1/2} \frac{1}{k^{3/4+\varepsilon}}\right),$$

come conseguenza del Teorema III si hanno le seguenti formule:

$$x^{-\alpha} \mathrm{e}^x f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k^{(\alpha)}(x) \tag{3.7}$$

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k + 1)}{k!} \alpha_k y^k\,, \quad (|y| < 1)\,, \tag{3.8}$$

(la convergenza dello sviluppo (3.7) essendo generalmente intesa in media quadratica).

3.3 – Polinomi di Jacobi $P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$

Proviamo il seguente

TEOREMA IV. *Se $\alpha > -1/2$, $\beta > -1/2$ e se i coefficienti di Jacobi-Fourier α_k della funzione $(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}f(x)$ hanno il comportamento asintotico espresso dalla formula: $\exists\varepsilon > 0$ tale che:*

$$|\alpha_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{1/2+\varepsilon}}\right) \tag{3.9}$$

allora $\forall y$: $|y| < 1$, sussiste lo sviluppo in serie di Taylor espresso dalla (2.6).

DIM. Consideriamo la stima:

$$\begin{gathered} |P_k^{(\alpha,\beta)}(x)| \le C_4 k^{-1/2}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \\ \left(\alpha > -\frac{1}{2};\quad \beta > -\frac{1}{2};\quad -1 \le x \le 1\right) \end{gathered} \tag{3.10}$$

che si può trovare dimostrata, per i polinomi di Jacobi, nel libro di NIKIFOROV – UVAROV [5]. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{gathered} \left|\sum_{k=0}^{N} \alpha_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x) F(x,y) W(x)\right| \le \\ \le D_4(\alpha|\beta)(1-x)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| k^{-1/2}\,, \end{gathered}$$

dove $D_4(\alpha|\beta)$ denota una costante che dipende da α se si considera il problema dell'inversione nell'intorno del punto $x = 1$, e da β se si considera lo stesso problema nell'intorno del punto $x = -1$.

Si vede allora facilmente che la condizione $|y| < 1$ garantisce la possibilità di fare uso del teorema di Lebesgue anche in questo caso e, poiché un'osservazione simile alla Osservazione III sussiste anche questa volta, si può completare senza difficoltà la dimostrazione del teorema. □

Il risultato del Teorema IV si può così riassumere:

Caso dei polinomi di Jacobi.
Sia: $a := -1$, $b := 1$,

$$W(x) := (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\,, \quad (\alpha > -1/2, \quad \beta > -1/2)\,,$$

$$G_k(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(x) \qquad \text{(Polinomi di Jacobi)}$$

$$h_k = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2k+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{k!\Gamma(\alpha+\beta+k+1)}\,.$$

Si assuma: $c_k := 1$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$; $R := \sqrt{1-2xy+y^2}$, allora:

$$F(x,y) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-y+R)^\alpha (1+y+R)^\beta}\,,$$

$$\hat{f}(y) := \int_{-1}^{1} \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1-y+R)^\alpha (1+y+R)^\beta} f(x)dx\,.$$

Ammesso che $\exists \varepsilon > 0$ tale che:

$$|\alpha_k| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{1/2+\varepsilon}}\right),$$

come conseguenza del Teorema IV, si hanno le seguenti formule:

$$(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.11}$$

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2k+1}\,\frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+k+1)}{k!\Gamma(\alpha+\beta+k+1)} \alpha_k y^k\,, \quad (|y| < 1) \tag{3.12}$$

(la convergenza dello sviluppo (3.11) essendo generalmente intesa in media quadratica).

Ringraziamenti

Gli autori sono grati al Prof. Edward B. Saff della University of South Florida (Tampa – FL) per una utile osservazione, che ha permesso di migliorare il lavoro.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Avantaggiati: *Sviluppi in serie di Hermite-Fourier e condizioni di analiticità e quasi analiticità*, Proc. Intern. Meeting dedicated to the memory of Carlo Miranda, Liguori Editore, Napoli, (1982).

[2] A. Ghizzetti – A. Ossicini: *Polinomi ortogonali e problema dei momenti*, Pubbl. Ist. Mat. Applicata Fac. Ingegneria Univ. Stud. Roma, n. **231**, Roma, (1981).

[3] I.S. Gradshteyn – I.M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York and London, (1965).

[4] I.I. Hirschman – D.V. Widder: *La transformation de convolution*, Gauthier-Villars, Paris, (1965).

[5] A.F. Nikiforov – V.B. Uvarov: *Special Functions of Mathematical Physics*, Birkhäuser, Basel, (1988).

[6] J. Riordan: *An introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley & Sons, New York, (1958).

[7] D.V. Widder: *An introduction to Transform Theory*, Academic Press, New York-London, (1971).

Lavoro pervenuto alla redazione il 15 novembre 1993

Indirizzo degli Autori:

Carlo Belingeri – Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate – Università degli Studi di Roma “La Sapienza” – Via A. Scarpa, 10, 00161 – Roma

Paolo Emilio Ricci – Dipartimento di Matematica “Guido Castelnuovo” – Università degli Studi di Roma “La Sapienza” – P.le A. Moro, 2, 00185 – Roma