Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 9-36

Ricordo di Aldo Ghizzetti

G. FICHERA

Aldo Ghizzetti nacque a Torino l'8 ottobre del 1908 ed in questa città si è spento il 2 dicembre del 1992.

Egli compì a Torino gli studi medi ed universitari e si laureò con lode in quella Università nel 1930. Relatore della tesi era stato Alessandro Terracini. La tesi riguardava lo studio della figura geometrica, ottenuta come limite per $t \to 0$ della trasformata di una curva piana algebrica mediante una omografia del suo piano che dipende analiticamente da un parametro continuo t e che per $t \to 0$ tende ad una omografia degenere. La tesi di laurea dette luogo alle due prime pubblicazioni di Ghizzetti: una Nota lincea [1] ed una Memoria dell'Accademia di Torino [2]. Ma ben presto, seguendo la sua vocazione, fu attratto verso l'Analisi matematica e le applicazioni di questa e naturalmente portato ad accostarsi a Guido Fubini che, allora, era a Torino il massimo rappresentante di quegli indirizzi. Divenne, quasi subito dopo la laurea, Aiuto di ruolo alle Cattedre di Analisi matematica e Geometria, presso il Politecnico di Torino, dove la Cattedra di Analisi matematica era tenuta da Guido Fubini. Mantenne questa posizione fino al 1940. Le leggi razziali fasciste ed il conseguente allontanamento dalla Cattedra dei Professori ebrei gettarono nello sconforto i giovani che, allora, con essi lavoravano. Fra questi Aldo Ghizzetti. Ma, per sua fortuna, proprio in quegli anni, giunse al Politecnico di Torino, fresco vincitore di concorso universitario, Carlo

Miranda, il quale non tardò ad accorgersi del talento di Ghizzetti e, giustamente, valutò che l'ambiente più adatto alla sua formazione scientifica sarebbe stato quello della Cattedra di Analisi superiore, a Roma, e dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo (INAC) del CNR. Della prima Mauro Picone era il titolare e del secondo il Direttore.

L'intuizione di Miranda si rivelò felicissima. A Roma, presso Picone, Ghizzetti trovò l'atmosfera a lui più congeniale e nel giro di pochi anni raggiunse la piena maturità scientifica. Fu Assistente presso la Cattedra di Picone e Consulente ordinario dell'INAC dal 1940 al 1948, anno nel quale riuscì primo nella terna dei vincitori del concorso a Cattedre per l'Analisi matematica. Dopo un anno trascorso presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, fu, nel 1949, chiamato a Roma in una Cattedra di Analisi matematica presso la Facoltà di Scienze. A Roma assunse anche le funzioni di Vicedirettore dell'INAC fino al 1960, anno in cui, dopo il collocamento a riposo di Picone, fu, dal Comitato per la Matematica del CNR, proposto come Direttore di quell'Istituto, carica che conservò fino al 1968. Nel 1962 Ghizzetti passò dalla Cattedra di Analisi matematica della Facoltà di Scienze a quella della Facoltà di Ingegneria, sempre nella Università di Roma.

Dopo il ritiro di Picone dalla direzione dell'INAC, venne dal CNR nominato un Comitato direttivo per quell'Istituto, del quale facevano parte Picone stesso, come Presidente onorario dell'INAC, Ghizzetti, quale Direttore, Amerio ed io per la lunga attività che entrambi avevamo, nel recente passato, svolto presso l'INAC.

Era quello un momento ideologicamente importante nella vita dell'Istituto. L'INAC, sotto la direzione di Picone, aveva raggiunto una posizione di primissimo piano internazionale nel campo dell'Analisi matematica, dell'Analisi numerica (per la quale era il primo Istituto sorto nel mondo!) e della Matematica applicata. Ma da qualche anno era stato installato presso l'INAC il primo calcolatore elettronico, che Picone aveva fermamente voluto al fine di rendere esecutivi molti procedimenti numerici, in parte da lui stesso escogitati, che non potevano esser portati avanti con le piccole calcolatrici da tavolo. Dopo che l'Istituto di Picone acquisì, nel 1955, quell'importante strumento, apparve chiaro che questo non poteva soltanto configurarsi come un semplice *tool*, ma il suo funzionamento, specialmente per quanto concerneva la preparazione dei *softwares*, richiedeva tutta un'attività *a latere* che poco o nulla aveva a che vedere con la ricerca, come fin'allora concepita, nei campi dell'Analisi e della Matematica applicata. L'*optimum* sarebbe stato un giusto equilibrio fra le due attività. Ma la tendenza dell'Istituto a trasformarsi in un Istituto per il calcolo automatico, piuttosto che di Analisi e Matematica applicata, si era, secondo quanto a me appariva, pericolosamente accentuata al principio degli anni '60. Ritenni perciò mio dovere adoperarmi perché la primitiva impostazione dell'Istituto restasse prevalente ed il calcolatore elettronico fosse considerato un mezzo, ma non un fine. Di parere opposto era Aldo Ghizzetti, che, per quanto ottimo analista e matematico applicato, era molto più propenso di me a concedere sempre più spazio alle tecniche per il calcolo automatico, restringendo sempre più il primitivo campo di interessi dell'Istituto.

Il contrasto fra lui e me divenne assai aspro ed alla fine, dovendo comunque l'Istituto funzionare, io ritenni opportuno dimettermi da quel Comitato. Debbo tuttavia dire che lo scontro ideologico non influì minimamente sui nostri rapporti personali e la nostra amicizia, che non fu mai molto stretta, data l'estrema diversità dei nostri caratteri, rimase sempre leale e cordiale. Voglio ricordare che Ghizzetti, alcuni anni dopo le mie dimissioni da quel Comitato, in uno dei nostri frequenti incontri, amareggiato dal recente annunzio da parte di uno dei maggiori Centri di Matematica applicata del mondo di voler sospendere lo scambio delle pubblicazioni con l'INAC, ebbe l'onestà di dichiararmi che nelle nostre precedenti discussioni ero io ad avere ragione. Con uguale onestà devo io oggi ammettere che il punto di vista di Ghizzetti era più proteso verso il futuro di quanto, forse, non lo fosse il mio. Il calcolo elettronico ha avuto, in questi ultimi decenni, tali portentosi sviluppi da poter forse condizionare, in un prossimo futuro, il modo di concepire la Matematica applicata e la stessa Analisi. Ho recentemente sviluppato questi concetti in altra sede e non è il caso di ripetermi qui(1). Voglio solo dare atto al Collega scomparso che se oggi, anche in Italia, esiste un'intensa attività nel campo del Calcolo automatico e della Informatica, questo è, in parte, merito suo, per l'opera da lui svolta a favore del progresso di detto calcolo, non solo presso l'INAC, ma anche presso vari importanti organismi nazionali ed internazionali. Mi limito a ricordare che Ghizzetti fu

(1) Cfr. G. Fichera, *Il Calcolo infinitesimale alle soglie del Duemila*, Rend. Suppl. Accad. Lincei, 4, 1993. Conferenza tenuta all'Accademia il 13.III.1993.

membro del Consiglio direttivo dell'Associazione Italiana per il Calcolo automatico dal 1961 al 1976 e Presidente dal 1961 al 1966. Membro di un'analoga Commissione italiana presso l'UNESCO dal 1964 al 1974 e Presidente della medesima dal 1969 al 1972.

Ghizzetti fu Socio dell'Accademia di Madrid dal 1953, dell'Accademia delle Scienze di Torino (Corrispondente dal 1959, Nazionale dal 1978), dell'Accademia dei Lincei (Corrispondente dal 1980, Nazionale dal 1987). Nel 1973 gli fu conferito il Premio internazionale Bressa per la Matematica dall'Accademia delle Scienze di Torino. Nel 1983 la Facoltà di Ingegneria della "Sapienza" lo propose per la nomina a Professore Emerito. Nel 1984 gli fu conferita la medaglia d'oro del Presidente della Repubblica per i Benemeriti della Scuola, della Cultura e dell'Arte.

Parte non trascurabile dell'attività scientifica ed organizzativa di Ghizzetti è stata quella svolta quale Direttore dei *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, Rivista dalle nobili tradizioni, che costituisce la pubblicazione ufficiale di tre Istituti romani: il Dipartimento di Matematica, quello di Metodi e Modelli Matematici, entrambi della "Sapienza", e l'Istituto di Alta Matematica.

Ghizzetti ha diretto i *Rendiconti* dal 1973 fino al 1982. Mi è gradito ricordare, fra i fascicoli dei *Rendiconti* apparsi durante la sua direzione, il I e II del vol. 8, 1975, dedicati a Mauro Picone per i suoi 90 anni. Essi contengono articoli di alcuni dei maggiori Matematici viventi in quel tempo. Ma debbo dire che il lavoro per la conduzione scientifica di una Rivista, anche se non lieve, è tuttavia il più piacevole. Ben più fastidioso impegno è curarne l'amministrazione. Nel caso dei *Rendiconti*, il compito è reso più gravoso dal fatto che la Rivista fa capo a due distinte burocrazie: quella dell'Università e quella dell'Istituto di Alta Matematica. Ghizzetti seppe assai bene fronteggiare questi problemi. Egli non soltanto eliminò il non indifferente disordine burocratico nel quale, nel 1973, la Rivista, all'atto del suo insediamento nella direzione, si trovava, ma ne instradò l'amministrazione lungo sentieri netti e precisi. Naturalmente, anche sul piano strettamente scientifico, il contributo da lui dato fu cospicuo. Tutti i Matematici romani debbono essere a lui grati per avere egli assicurato ai nostri *Rendiconti* buon livello scientifico e limpidezza burocratica ed amministrativa. E mi sia permesso, per inciso, affermare che uguale riconoscenza debbono a Paolo Emilio Ricci, allievo mio e di Ghizzetti, a lui succeduto nella direzione della Rivista, che Ricci, proseguendo lungo la via tracciata da Ghizzetti, ha diretto, con pari efficienza e signorilità, fino al 1992.

Come per tutti gli studiosi, anche per Aldo Ghizzetti l'attività maggiormente qualificante è quella svolta come ricercatore. Questa, nel suo caso, è stata vasta e pregevole ed ha toccato vari campi dell'Analisi e della Matematica applicata. Essa si è concretata in circa 200 pubblicazioni fra Note, Memorie, Monografie e Trattati e, di queste, più di un terzo sono dedicate a ricerche originali ed a scoperte di nuovi risultati.

Cercherò di delineare la figura di Ghizzetti come ricercatore, raggruppando sotto titoli diversi i vari argomenti dei quali egli si occupò.

1) *Trasformazione di Laplace e Calcolo simbolico*

L'interesse di Ghizzetti per il calcolo simbolico, usato, specialmente, in Elettrotecnica, ebbe inizio quando ancora egli si trovava a Torino e lavorava sotto l'influenza di Guido Fubini. Scopo del Fubini, che, insegnando in un Politecnico, fu anche sensibilissimo ai problemi degli ingegneri, era quello di pervenire alla redazione di una Monografia nella quale il ben noto *Calcolo simbolico degli Elettrotecnici* venisse esposto non su basi matematiche empiriche, ma con assoluto rigore analitico, facendo sistematico uso della trasformazione di Laplace. A questo progetto egli aveva associato il giovane e promettente Aldo Ghizzetti. Ma Fubini, per le ben note esecrabili vicende politiche, non potè portare a termine il suo programma. Questo fu proseguito da Ghizzetti che, profondamente impadronitosi, sia della teoria dei circuiti elettrici che di quella della trasformazione di Laplace [3], pubblicò in seguito, nel 1943, l'assai utile Monografia [13]. Ghizzetti non soltanto seppe entrare in possesso della tecnica della trasformazione di Laplace, ma alla teoria di questa recò anche qualche contributo [35], [37]. Ma soprattutto pregevole è l'ampio Trattato [62], scritto in collaborazione con il suo valoroso allievo Alessandro Ossicini. In esso, in maniera esemplare, viene svolta la teoria della trasformazione di Fourier e di quella di Laplace e vengono riprese e riesposte le applicazioni all'Elettrotecnica. La teoria delle trasformazioni di Fourier e di Laplace è svolta in [62] nell'ambito dell'integrale di Lebesgue e non vengono considerate, tranne che per qualche cenno, le successive estensioni alla *Teoria delle distribuzioni*. Ma il giovane studioso che si impadronisse bene della teoria classica, come esposta nel Trattato [62], non avrebbe poi difficoltà alcuna a rendersi edotto di più moderne teorie.

2) *Equazioni alle derivate parziali*

Le ricerche di Ghizzetti sulle equazioni alle derivate parziali, portate avanti fra il '42 ed il '55, appartengono ad un settore della teoria di quelle equazioni che, anche all'epoca in cui egli si occupava dei relativi problemi, poteva considerarsi assai classico. Esse riguardano, in particolare, l'equazione armonica $\Delta_2 u = 0$ [7], [16], [17], [21], quella biarmonica $\Delta_2\Delta_2 u = 0$ [18], [21], [22], l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$ [21], [27]. Per queste equazioni vengono considerati taluni problemi al contorno in una striscia del piano [7], [18], [21], [22], in uno strato di $\mathbb{R}^3$ [7], in un angolo e, per rappresentazione conforme, in un disco [16], [17] ed, infine, in altri domini di forma particolare (domini normali, etc.) [21], [27], [29]. Ad equazioni di tipo più generale sono dedicati i lavori [29], [40]. In quest'ultimo vengono determinate tutte le equazioni lineari del secondo ordine, nel piano, per le quali è applicabile il metodo delle trasformate parziali. La questione sembra essere connessa o generalizzare quella relativa alla possibilità di una *separazione delle variabili*. Varrebbe la pena confrontare i risultati di Ghizzetti con quelli di altri autori, analisti o cultori di Geometria differenziale che, in diversi contesti, hanno studiato quest'ultimo problema.

I metodi, in genere impiegati da Ghizzetti nelle sue ricerche sulle equazioni a derivate parziali, sono quelli delle trasformazioni funzionali classiche: trasformazione di Fourier, continua o discreta, trasformazione di Laplace, totale o parziale e con intervallo d'integrazione infinito o finito. È indubbio merito di Ghizzetti avere studiato i classici problemi, da lui considerati, con assoluto rigore, precisando ogni volta, in maniera ineccepibile, le ipotesi sotto cui valgono i risultati acquisiti. Egli, in qualcuno di questi suoi lavori, [21], [27], ha anche ben chiarito le relazioni esistenti fra il metodo classico delle *trasformate* ed il metodo che Picone ed altri suoi allievi sviluppavano in quegli anni, relativo alla traduzione dei problemi al contorno per equazioni lineari in sistemi integrali di Fischer-Riesz. Tale metodo, in seguito, venne riconosciuto equivalente a quello della cosiddetta *formulazione debole dei problemi al contorno* che, in quel lasso di tempo, veniva, specialmente, portato avanti da S.L. Sobolev in Russia e da K.O. Friedrichs negli USA.

Desidero ricordare che i risultati del lavoro [22] furono ripresi da Duffin (Journ. of Math. & Phys., 1948, 253-258) nel tentativo di dimostrare non vera la congettura di Hadamard relativa alla positività della funzione di Green del problema biarmonico per un campo limitato del piano. Duffin riesce nel suo intento per un campo illimitato: una striscia, servendosi di formule che Ghizzetti aveva stabilito per primo, come Duffin, implicitamente, riconosce. Egli cerca, poi, con procedimenti ingegnosi ma non conclusivi, di trasferire il risultato per la striscia a particolari domini limitati. Dirò, per completezza, che Loewner e Szegö erano riusciti (in un *Report* interno della Stanford University, mai pubblicato) a dimostrare falsa la congettura di Hadamard per un particolare campo piano limitato *non convesso*. Nel 1951 Garabedian dimostrò (Pacific Journ. of Math., 1951, 485-524) che, anche nel caso in cui detta congettura appariva plausibile, cioè quello di un campo piano limitato e convesso, essa è falsa. In effetti, la congettura è vera in un'ellisse con semiassi a e b se $ab^{-1} = 1$ (caso considerato da Hadamard per formulare la sua congettura), è falsa se ab^{-1} è molto piccolo (Garabedian).

3) *Equazioni differenziali ordinarie*

Tale gruppo di ricerche riguarda le proprietà asintotiche delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari e non lineari.

Nel 1941 era stato proposto all'INAC un problema di ricerca asintotica per una particolare equazione differenziale non lineare. Picone riconobbe subito la difficoltà del problema e ne affidò lo studio a Renato Caccioppoli, Consulente dell'Istituto. Questi, superando ardue difficoltà, riuscì a conseguirne la soluzione. Picone, con la particolare sensibilità che egli aveva nel saper mettere in luce tutto quanto poteva accrescere il prestigio del suo Istituto, esortò Caccioppoli a pubblicare le sue ricerche, estendendole a più generali sistemi non lineari ai quali il suo metodo fosse applicabile. Caccioppoli, con l'abituale distaccco e noncuranza che egli aveva per tutte le cose pratiche e quindi, anche, per quelle intese a far conoscere i risultati del suo genio matematico, non se ne dette per inteso. Picone incaricò allora Ghizzetti di redigere uno o più lavori, traendoli dai sommari appunti trasmessi da Caccioppoli. Mi ricordo che, a quel tempo, Ghizzetti mi parlava spesso delle non lievi difficoltà che incontrava nel trarre dalla schematica relazione di Caccioppoli le dimostrazioni dei teoremi, ridotte, in quella, a pochi cenni, ed a ben precisare le ipotesi entro cui queste valevano. Alla fine, dopo mesi di severo impegno, Ghizzetti riuscì a redigere i due lavori [8] e [9], nei quali il suo contributo va ben oltre quello di un semplice redattore[(2)]. Dirò, per inciso, che il ricordo di questi eventi riporta la mia mente a quello che a quell'epoca era l'INAC, che tutti chiamavano l'*Istituto di Picone*: allo spirito di collaborazione che vi regnava, all'altissimo *standard* scientifico in cui si operava. In esso lavoravano o prestavano la loro costante consulenza Uomini come Luigi Amerio, Renato Caccioppoli, Lamberto Cesari, Fabio Conforto, Sandro Faedo, Aldo Ghizzetti, Giuseppe Grioli, Wolf Gross, Giulio Krall, Carlo Miranda, Antonio Signorini, Carlo Tolotti. Un'epoca che non si è più ripetuta in seguito.

Il lavoro [48] è anch'esso dedicato ad un'equazione non lineare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{1}$$

nelle ipotesi in cui: a) $\varphi(v) \in C^1(\mathbb{R})$ è crescente; b) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 2p > 0$; c) esistono $L > 0$, $\alpha > 0$ tali che $|\varphi'(v) - 2p| \leq (\alpha+1)L|v|^\alpha$ in un intorno di $v = 0$. Lo scopo è un'analisi asintotica delle soluzioni della (1) per $t \to +\infty$.

G. Sestini aveva già intrapreso questo studio e fatto vedere che occorre distinguere quattro casi:

$$0 < p < 1\,, \qquad p = 1\,, \qquad 1 < p < \frac{\alpha+2}{2\sqrt{\alpha+1}}\,, \qquad p \geq \frac{\alpha+2}{2\sqrt{\alpha+1}}$$

con risultati diversi, caso per caso. Ghizzetti, in ciascuno dei detti casi, reca un perfezionamento al corrispondente risultato ottenuto da Sestini. Ad esempio, per $0 < p < 1$, Sestini dimostra che: $x(t)$, $x'(t) = O(e^{-pt})$ (per $t \to +\infty$), laddove Ghizzetti fa vedere che ad ogni integrale $x(t)$ della (1) può biunivocamente associarsi un integrale $y(t)$ dell'equazione: $y'' + 2py' + y = 0$ tale che $x(t)$ e $y(t)$ hanno lo stesso comportamento asintotico per $t \to +\infty$.

[(2)] La Nota [8] è relativa all'equazione differenziale: $ay''(t) + \{b + \varphi[y'(t)]\}y'(t) + cy(t) = f(t)$, con a, b, c costanti, $a > 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, $\varphi(v) \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi(v) = \varphi(-v)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(v)$ crescente per $v > 0$, $f(t) \in \mathbb{C}^1(\mathbb{R})$ e periodica di periodo ω. Si dimostra che esiste un solo integrale periodico di periodo ω ed ogni altro integrale è a questo asintotico per $t \to +\infty$.

I risultati di [8] sono stati estesi in [9] ad una classe di sistemi di equazioni non lineari, usando, come in [8], i metodi della topologia funzionale.

I lavori [24], [30], [47], [52], [53], [55], [56] riguardano il comportamento asintotico di integrali di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti variabili:

$$E[x(t)] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=1}^{n} p_k(t) \frac{d^{n-k} x}{dt^{n-k}} = 0 \,. \tag{2}$$

Il metodo seguito è, in genere, quello classico di Liouville-Stekloff, che Tricomi amava chiamare di Liouville-Stekloff-Fubini[(3)], che consiste nello scrivere la (2) nella forma seguente

$$2E[x(t)] \equiv E_0[x(t)] + E_1[x(t)] = 0 \,,$$

dove E_0 ed E_1 hanno una definizione perfettamente analoga a quella dell'operatore E, ma su $E_0[x(t)] = 0$ si hanno informazioni che permettono di descriverne il comportamento asintotico degli integrali. Ad esempio, E_0 si può assumere a coefficienti costanti. Considerato $E_1[x(t)]$ alla stregua di un termine noto, si perviene, con un ben noto procedimento, ad ottenere $x(t)$ come soluzione di un'equazione integrale di Volterra di II specie. La classica formula risolutiva di questa porta a formule di maggiorazione che, unitamente alla conoscenza del comportamento asintotico della generica soluzione $y(t)$ della equazione differenziale $E_0[y(t)] = 0$, possono fornire indicazioni sul comportamento asintotico di $x(t)$. Questo metodo, ancorché classico, adoperato da Ghizzetti con la sua consueta abilità algoritmica, lo ha portato a stabilire diversi nuovi teoremi, alcuni dei quali generalizzano risultati di autori che, in precedenza, si erano occupati di tali problemi.

In questo gruppo di lavori è, secondo me, di notevole spicco la Memoria [53], cui la Nota [56] porta qualche ulteriore complemento. In essa Ghizzetti considera l'equazione (2) nell'ipotesi che ogni coefficiente $p_k(t) (k = 1, \ldots, n)$ sia reale e localmente sommabile in $(a, +\infty)$. Con la tecnica sopra accennata ottiene formule di maggiorazione per ogni soluzione $x(t)$ della (2), nonché per $x^{(h)}(t)$ $(h = 1, \ldots, n-1)$. In queste formule egli fa intervenire n numeri complessi $\rho_1, \ldots, \rho_n$, assoggettati alle condizioni di essere a due a due distinti e tali che, se fra essi vi è un numero complesso, vi è anche il suo coniugato. Per il resto $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sono

[(3)] Cfr. F. Tricomi, *Equazioni differenziali*, Boringhieri, Torino, 1967, 189-197.

del tutto arbitrari. Ghizzetti si propone di vedere quando accade che dalle formule di maggiorazione ottenute segua che, ad esempio, per ogni $x(t)$,

$$\lim_{t\to+\infty} x^{(h)}(t) = 0 \qquad (h = 0, 1, \dots, n-1)\,,$$

cioè che $x(t)$ sia *asintoticamente stabile* (per $t \to +\infty$). Dimostra che ciò si verifica se la curva di $\mathbb{R}^n$ di equazioni parametriche $\xi_k = p_k(t)$ $(k = 1, \dots, n)$ è *definitivamente* (per $t \to +\infty$) contenuta all'interno dell'iperellissoide di $\mathbb{R}^n$ di equazione

$$\sum_{h=1}^{n} \left| \rho_h^n + \sum_{k=1}^{n} \rho_h^{n-k} \xi_k \right|^2 = \frac{\Big| \max(\mathcal{R}\rho_1, \dots, \mathcal{R}\rho_n) \Big|^2}{\sum\limits_{h=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{n} |\rho_h - \rho_j|^{-2}}\,. \tag{3}$$

Da ciò, evidentemente, trae una condizione sufficiente per la stabilità asintotica di ogni soluzione di (2).

È ben noto che nel caso in cui $p_k(t) \equiv c_k$ $(k = 1, \dots, n)$, con c_k costante, riesce ogni $x(t)$ asintoticamente stabile se e solo se tutti gli zeri del polinomio $f(z) \equiv z^n + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k z^{n-k}$ hanno parte reale negativa (*condizione di Hurwitz*). Orbene, se il punto $c \equiv (c_1, \dots, c_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è tale che il corrispondente polinomio $f(z)$ verifica la condizione di Hurwitz, Ghizzetti dimostra che esistono $\rho_1, \dots, \rho_n$ del tipo anzidetto, tali che l'iperellissoide di equazione (3) contiene c nel suo interno. Pertanto la condizione di asintotica stabilità trovata da Ghizzetti si riduce alla condizione di Hurwitz quando i coefficienti di (2) sono costanti, nel senso che questa condizione implica ed è implicata da quella.

4) *Equazioni integrali*

A questo argomento Ghizzetti dedica la Memoria [63], scritta in collaborazione con Ossicini. È un lavoro che, per quanto dedicato ad un problema particolare, è veramente pregevole. In esso gli Autori dànno piena misura della loro bravura di provetti analisti.

Lo studio fu originato da un problema posto all'INAC. Si tratta dell'equazione integrale lineare ed omogenea

$$\Phi(t) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)^2} \Phi(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

con λ reale e positivo e per la quale si ricercano le autosoluzioni nella classe Γ_α delle funzioni che hanno una trasformata bilatera di Laplace complessa

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\Phi(t)dt$$

convergente in un semipiano $\mathcal{R}s > \alpha$; con $\alpha \geq -\infty$ e arbitrariamente prefissato. La (4) è un'equazione integrale del tipo di Wiener-Hopf. Per siffatte equazioni questi Autori avevano sviluppato una tecnica per la ricerca delle autosoluzioni, contenute però in una classe più ristretta della Γ_α. Per poter utilizzare i loro metodi, Ghizzetti ed Ossicini debbono rielaborare la teoria di Wiener e Hopf, onde estenderla a Γ_α. Riescono alla fine a dimostrare che, posto $c = -\log(\sqrt{2\pi}\lambda)$, si hanno autosoluzioni della (4) in Γ_α se e solo se riesce $\alpha \geq 0$, se è $c < 0$, ed $\alpha \geq \sqrt{2c}$, se è $c \geq 0$. Il numero massimo di autosoluzioni indipendenti è $2p+1$, essendo p il più grande intero tale che

$$p \leq \frac{1}{2\pi}\alpha\sqrt{\alpha^2 - 2c}\,.$$

Forniscono poi per ogni autosoluzione due diversi sviluppi in serie: uno per t reale e positivo, l'altro valido in tutto il piano complesso. L'analisi svolta è così minuziosa e ricca di dettagli, che non è possibile sunteggiarla qui ora.

5) *Il problema dei momenti. Coefficienti di Fourier di una funzione*

Il *problema dei momenti* si è presentato nel *Calcolo delle probabilità* fin dalla fine del secolo scorso, rivestendo interesse centrale in tutta la teoria. Per la storia delle sue origini e di suoi successivi sviluppi, rimando al classico Trattato di Guido Castelnuovo[(4)] ed al lavoro [31] dello stesso Ghizzetti. Mi limito qui solo ad esporre, fra i contributi dati da Ghizzetti, quello relativo ai *momenti di una funzione limitata* in un intervallo $[a, b]$ dell'asse reale.

[(4)] Cfr. G. Castelnuovo, *Calcolo delle Probabilità*, Soc. Ed. Dante Alighieri, Milano-Roma-Napoli, 1919, 318-347.

Sia $f(x)$ reale ed integrabile secondo Lebesgue in $[a,b]$. Posto

$$\mu_n = \int_a^b x^n f(x)dx \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)\,, \tag{5}$$

μ_n è il *momento di ordine* n di $f(x)$[(5)]. Ghizzetti si pone il problema di dare condizioni necessarie e condizioni sufficienti perché, data la successione

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots \tag{6}$$

esista una $f(x)$ verificante (quasi ovunque) in $[a,b]$ le condizioni

$$0 \leq f(x) \leq 1 \tag{7}$$

e tutte le equazioni (5).

Il problema era stato, in precedenza, considerato a fondo da Hausdorff (Math. Zeits., 1923, 220-248), Widder (Trans. Amer. Math. Soc., 1931, 851-892), Boas (Duke Math. Journ., 1935, 449-476), Akieser-Krein (Comm. Math. Karkov, 1935, 13-33), Verblunsky (Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, 30-39), Kantorovic (Dokl. Akad. Nauk USSR, 1937, 531-537). Tuttavia, la soluzione che ne fornisce Ghizzetti è di notevole valore per la relativa semplicità e per la possibilità di estensione del metodo seguito, come lo stesso Ghizzetti ha mostrato, a sistemi di funzioni diversi da quello dei monomî. Egli, nell'importante Memoria [11], fornisce le condizioni necessarie a cui deve soddisfare la successione (6) (teoremi di tipo *tauberiano*) e nella Nota [23] dimostra la sufficienza di tali condizioni (teoremi di tipo *abeliano*)[(6)].

[(5)]Se $f(x)$ è la densità di una distribuzione di masse su $[a,b]$, per $n = 1$ e $n = 2$ si hanno il *momento statico* ed il *momento di inerzia* di tale distribuzione. Da ciò la motivazione della nomenclatura.

[(6)]Nella teoria delle serie di potenze, di Fourier, etc. od in quelle della trasformazione di Fourier, di Laplace, etc. diconsi teoremi di tipo *abeliano* quelli che, da una o più proprietà della serie considerata (o dei coefficienti di essa) o di una data trasformata, deducono proprietà della funzione cui quella serie (o quei coefficienti) o quella trasformata si riferisce. Viceversa, sono *tauberiani* quei teoremi che da proprietà di una data funzione traggono proprietà per la serie (per i coefficienti) o per la trasformata ad essa relativa (o relativi). Tale classificazione, piuttosto barocca, sembra oggi caduta in di-

Se $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ è una successione numerica, dicesi *successione di Hankel* ad essa associata quella in cui il termine D_n di indice n ($n = 0, 1, \dots$) è il determinante di Hankel dei numeri $c_0, \dots, c_{2n}$, cioè

$$D_n = \begin{vmatrix} c_0 \dots c_n \\ \\ c_1 \dots c_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ c_n \dots c_{2n} \end{vmatrix} .$$

La successione di Hankel $\{D_n\}$, associata ad una successione $\{c_n\}$ ed, in particolare, a quella dei momenti di una distribuzione di masse, aveva fatto la sua comparsa fin dalle antiche ricerche di Tchebycheff sul Calcolo delle Probabilità. Essa interviene in tante altre importanti ricerche[(7)].

L'idea veramente brillante di Ghizzetti è quella di associare alla $f(x)$ non solo i suoi momenti, ma quelli che egli chiama i *bimomenti a sinistra* $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots$ ed i *bimomenti a destra* $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n, \dots$. Queste due successioni sono definite tramite gli sviluppi in serie, validi per $|z|$

suso. Tuttavia, sono celebri il *teorema di Abel sulle serie di potenze* come prototipo dei teoremi *abeliani*, poi, in certo senso, invertito da *Tauber* (teorema *tauberiano*!); il *teorema di Paley-Wiener sulla trasformazione di Fourier*, altro importante teorema *abeliano* nella sua condizione sufficiente, *tauberiano* in quella necessaria; e potrebbero portarsi numerosi altri esempi. *Il teorema di Wiener* sulla convergenza assoluta della serie di Fourier di $1/f(x)$ è un celebre teorema *tauberiano*. Per inciso, dirò che la dimostrazione di questo teorema, riottenuta in modo semplice, generale e brillante con i metodi dell'*Analisi armonica astratta* (così come la dimostrazione fornita da Beurling con quelli della *Teoria spettrale degli operatori lineari*), aveva fatto sorgere, all'inizio degli anni '50, tante speranze in molti matematici (compreso chi scrive), i quali si aspettavano che quella Teoria astratta potesse dar luogo ad applicazioni ai problemi dell'Analisi classica e della Fisica matematica almeno così cospicue come quelle della Teoria spettrale. Tali speranze sono però andate deluse nel volger degli anni. L'Analisi armonica astratta, teoria assai suggestiva, sorta dai grandi teoremi di I.M. Gelfand e di M.A. Naimark sulla rappresentazione delle algebre normate, vive oggi dei suoi stessi problemi.

Tutte queste cose mi vengono in mente riesaminando l'opera di Aldo Ghizzetti, così concreta ed essenziale. Voglio aggiungere che una generale definizione di *teoremi abeliani* e *tauberiani* è stata data dallo stesso Ghizzetti (cfr. [38], 113-115).

(7) Mi limito a ricordare lo splendido teorema di Kronecker secondo cui la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ è quella di una funzione razionale di z se e solo se i termini della successione di Hankel $\{D_n\}$ sono definitivamente nulli.

abbastanza grande

$$\exp - \int_a^b \frac{f(x)}{z-x} dx = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n z^{-n}$$

$$\exp \int_a^b \frac{f(x)}{z-x} dx = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} .$$

Egli esprime in [11] σ_n e δ_n come polinomi nei $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ e dimostra che la successione di Hankel $\{\Delta_n\}$ di $\{\sigma_n\}$ coincide con quella di $\{\delta_n\}$. Considera quindi le due successioni $\{\Delta'_n\}$ e $\{\Delta''_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ con

$$\Delta'_n = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \dots a^n \\ \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \dots \sigma_n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \dots \sigma_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n-1} & \sigma_n & \sigma_{n+1} \dots \sigma_{2n-1} \end{vmatrix} , \quad \Delta''_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \dots b^n \\ \delta_0 & \delta_1 & \delta_2 \dots \delta_n \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \dots \delta_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n-1} & \delta_n & \delta_{n+1} \dots \delta_{2n-1} \end{vmatrix}$$

e dimostra, [11], [23], che esiste $f(x)$ verificante (5) e (7) se e solo se le tre successioni $\{\Delta_n\}$, $\{\Delta'_n\}$, $\{\Delta''_n\}$ verificano una delle seguenti condizioni:

A) $\Delta_n > 0$ $(n = 0, 1, \dots)$; $\Delta'_n > 0$, $\Delta''_n > 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

B) Esiste $n \geq 1$ tale che:

$$\begin{aligned} \Delta_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0, \dots, \quad & \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n = 0, \quad \Delta_{n+h} = 0, \\ \Delta'_1 > 0, \dots, \quad & \Delta'_{n-1} > 0, \quad \Delta'_n \geq 0, \quad \Delta'_{n+h} = 0, \\ \Delta''_1 > 0, \dots, \quad & \Delta''_{n-1} > 0, \quad \Delta''_n \geq 0, \quad \Delta''_{n+h} = 0 \end{aligned}$$

$$(h = 1, 2, \dots) ,$$

C) $\Delta_0 = 0$, $\Delta_n = \Delta'_n = \Delta''_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Si ha il caso B) se e solo se $f(x)$ è una *funzione rettangolare di ordine* n, cioè una funzione che vale 1 in n intervalli chiusi disgiunti contenuti in $[a, b]$ e 0 altrove. Si ha il caso C) se e solo se $f(x)$ è q.o. nulla su $[a, b]$.

Al problema dei momenti sono anche dedicati i lavori [6], [12], [31].

Le tecniche sviluppate in [11], [23] sono trasferite, nei lavori [4], [34], [41], [43], allo studio di analoghi problemi relativi al *sistema trigonometrico* (coefficienti di Fourier) o ai *polinomi di Legendre* (coefficienti di Legendre). Ghizzetti mostra qual'è il *problema chiave* da risolvere, volta per volta, per trasferire la tecnica di [11], [23] a problemi analoghi relativi ad un qualsiasi prefissato sistema completo di funzioni di una variabile reale (cfr. [38], 130). Problemi multidimensionali sono considerati in [12].

I lavori di Ghizzetti sul problema dei momenti e su questioni analoghe appartengono, forse, alla parte più elevata della sua produzione scientifica. Alcuni dei suoi risultati trovansi citati nella eminente Monografia di J.A. Shoat e J.D. Tamarkin, *The Problem of Moments* (Amer. Math. Soc., 1943).

Più recentemente [68] Ghizzetti è ritornato sui problemi relativi ai momenti, ottenendo un'estensione del teorema di Lerch[(8)] all'intervallo $[0, +\infty)$, secondo cui se $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}[0, +\infty)$, $f(x) = O(\exp -ax^\gamma)$, $a > 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$ e se tutti i momenti di $f(x)$ in $[0, +\infty)$ sono nulli, allora $f(x)$ è q.o. nulla in $(0, +\infty)$. Dimostra che questo teorema cessa di sussistere se si assume $\gamma < \frac{1}{2}$. Il risultato di [68] è, a mio avviso, veramente pregevole.

6) *Funzioni speciali e Teoria dell'approssimazione*

La *Teoria delle funzioni speciali* riveste nell'Analisi matematica, in quella numerica e nelle applicazioni di queste, un ruolo centrale. Mi è accaduto spesso, in questi ultimi trent'anni, sentire alcuni Colleghi, specie fra i più giovani, affermare che per questa classica teoria è tempo di recitare il "*De profundis*". Ma succede sempre che questa cerimonia debba essere rimandata. O perché vengono scoperte nuove insospettate connessioni delle funzioni speciali con settori assai lontani dell'Algebra e della Geometria algebrica, o perché, anche restando in un àmbito assolutamente classico, le funzioni speciali si rivelano lo strumento insostituibile per risolvere problemi di *hard Analysis*. Il caso recente più clamoroso è la dimostrazione ottenuta da De Branges, nel 1984, della celebre *congettura di Bieberbach*[(9)].

[(8)] Il teorema di Lerch afferma che se $f(x) \in L^1[a, b]$ con a e b finiti e se tutti i suoi momenti relativi ad $[a, b]$ sono nulli, allora è $f(x) = 0$ q.o. in $[a, b]$. Questo teorema non è più valido se a oppure b, o entrambi, non sono finiti.

[(9)] La funzione $f(z)$, olomorfa nel disco D: $|z| < 1$ ed ivi *univalente*, abbia in D lo

Tale dimostrazione non sarebbe stata possibile se Askey, il maggiore esperto in USA di funzioni speciali, interpellato da De Branges, non avesse potuto dimostrare, usando la teoria delle funzioni ipergeometriche generalizzate, la positività di certe funzioni, necessaria a De Branges per portare avanti la sua dimostrazione.

L'Italia ha una gloriosa tradizione anche nella Teoria delle funzioni speciali. Nel recente passato *leader* indiscusso in questo settore, e non solo in campo nazionale, è stato Francesco Tricomi. Ma distinti cultori e profondi conoscitori di quella teoria furono anche Mauro Picone e Giovanni Sansone. Aldo Ghizzetti ha proseguito questa tradizione ed egli ed i suoi allievi hanno recato notevoli contributi allo studio delle funzioni speciali. Sarebbe qui troppo lungo parlare di tutti i risultati dovuti a Ghizzetti in questo campo e rimando per ciò ai lavori [36], [60], [65], [67], [79], [80]. Ma non posso fare a meno di ricordare due contributi che mi appaiono particolarmente interessanti. Uno è rappresentato dal lavoro [60], in collaborazione con Ossicini, nel quale, su richiesta di un Laboratorio di Fisica, viene studiato il comportamento asintotico per $x \to +\infty$ delle funzioni della successione

$$f_n(x,u) = \int_0^{1/u} \tau^{-n-2}\Big(\exp -\frac{1}{\tau^2}\Big) \exp ix\tau \, d\tau \quad (x > 0, u \geq 0, n = 0,1,2,\dots)\,.$$

In questa indagine gli Autori dispiegano la loro consueta perizia analitica, risolvendo esaurientemente il problema.

Un altro lavoro [65], sempre in collaborazione con Ossicini, considera i cosiddetti *polinomi s-ortogonali*, concetto che generalizza quello di *polinomi ortogonali*. In un intervallo (a,b) finito o infinito è assegnato un *peso* $p(x)$ non negativo e tale che $x^n p(x) \in L^1(a,b)$ $(n = 0,1,2,\dots)$. Fissato l'intero $s \geq 0$ si considera una successione di polinomi $\{P_n(x)\}$ tali che

$$\int_a^b p(x) P_m(x) [P_n(x)]^{2s+1} dx = 0 \quad \text{per} \quad n > m\,.$$

---

sviluppo in serie: $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Ludwig Bieberbach congetturò nel 1916 che si ha per ogni n: $|a_n| \leq n$ e che vale il segno = per qualche n se e solo se $f(z)$ è una funzione di Koebe: $f(z) = z(1 - e^{i\theta} z)^{-2}$ (θ reale).

Per $s = 0$ si ottiene l'ordinaria definizione di *successione di polinomi ortogonali*. È ben nota l'importanza delle successioni di polinomi ortogonali in tutta l'Analisi ed in particolare nella Teoria dell'approssimazione[(10)]. La generalizzazione considerata è tutt'altro che sterile, come dimostrano le sue applicazioni alla Teoria dell'approssimazione ed in particolare a quella delle formule di quadratura (cfr. [61] pp. 131-139).

La Teoria delle funzioni speciali è intimamente legata alla *Teoria dell'approssimazione*. Anche in tale campo Ghizzetti ha pubblicato diversi notevoli lavori [15], [42], [57], [69], [72], [73], [74], [77], [78], sui quali sarebbe assai lungo riferire. Mi limito solo a ricordare il suo eccellente corso di lezioni [42]: *Teoria dell'approssimazione lineare*, che certamente meriterebbe migliore sorte che non esser confinato in mere dispense universitarie.

7) *Formule di quadratura*

Un'ampia parte della produzione scientifica di Ghizzetti è dedicata alla Teoria delle formule di quadratura per il calcolo numerico approssimato degli integrali definiti delle funzioni di una o di più variabili [39], [44], [45], [46], [49], [50], [51], [58], [59], [64], [66].

L'impostazione da lui data ai fondamenti analitici di questa teoria ha fatto compiere ad essa un autentico *salto di qualità*. Riassumiamo rapidamente la trattazione di Ghizzetti, considerando il caso di un integrale esteso ad un intervallo limitato $[a, b]$ dell'asse reale.

Ghizzetti considera una formula di quadratura del tipo generale seguente:

$$\int_a^b u(x)g(x)dx = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} A_{hi} u^{(h)}(x_i) + R(u)\,, \tag{8}$$

dove u è la *funzione integranda*, g è il *peso*, i punti $x_1 \dots x_m$ di $[a, b]$ sono i *nodi*, n un intero positivo, la sommatoria è il *valore approssimato* dell'integrale ed il funzionale lineare $R(u)$ è il *resto*. Ispirandosi ad un'idea che, in precedenza, Radon (Monatsh. Math., 1935, 389-396) e Picone (Ann. di Pisa, 1951, 193-244) avevano, in casi particolari, affacciato, egli

[(10)] Si confronti, ad esempio, la magistrale opera di G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. XXIII, 1959.

associa la (8) ed un operatore differenziale lineare di ordine n

$$E(u) \equiv \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u$$

imponendo la condizione: la (8) *sia esatta, sia cioè* $R(u) = 0$*, in corrispondenza ad ogni soluzione dell'equazione* $E(u) = 0$.

Egli riesce a determinare, fissati $g(x)$, $x_1, \ldots, x_m$ ed E, tutte le formule di quadratura che verificano la condizione ora enunciata. Precisamente, posto

$$E_r^*(v) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}[a_k(x)v(x)] \quad (a_0(x) = 1)\,,$$

le predette formule sono tutte e sole quelle per le quali

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} A_{hi} &= \Big[E_{n-h-1}^*(\varphi_i - \varphi_{i-1})\Big]_{x=x_i}\,, \\ R(u) &= \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_i+1}\varphi_i E(u)dx \qquad (x_0 = a, x_{m+1}=b), \end{aligned}$$

dove $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}, \varphi_m$ sono tutte soluzioni in (a, b) dell'equazione $E^*(\varphi) \equiv E_n^*(\varphi) = g$, con $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ arbitrarie e φ_0 e φ_m verificanti le condizioni di Cauchy, rispettivamente in a ed in b, con dati iniziali tutti nulli.

Appare subito l'interesse della (8) e delle (9), perché viene, intanto, immediatamente indicato come valutare l'*errore di approssimazione* $R(u)$. Ghizzetti fa vedere che, scegliendo opportunamente gli elementi arbitrari, che compaiono nella (8) e nelle (9), cioè $g(x)$, i nodi $x_1, \ldots, x_m$, l'operatore E e le soluzioni di $E^*(\varphi) = g$: $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, nella (8) rientrano quasi tutte le formule di quadratura, note in letteratura, dalle più semplici alle più sofisticate. D'altra parte, con il metodo di Ghizzetti può generarsi un'amplissima varietà di nuove formule[11]. Questa teoria è stata estesa al caso in cui l'intervallo di integrazione diventi illimitato. Essa si trova

[11] Si osservi che, fissati il peso $g(x)$ ed i nodi $x_1, \ldots, x_m$ e scelto l'operatore E, si hanno $\infty^{(m-1)n}$ formule di quadratura date da (8) e (9).

splendidamente esposta nella Monografia [61], scritta da Ghizzetti in collaborazione con Ossicini. Tale Monografia può essere oggi considerata uno dei testi più autorevoli, in campo internazionale, nella teoria delle formule di quadratura unidimensionale.

Le idee di Ghizzetti sono state riprese da diversi suoi allievi e da altri autori ed esiste oggi una vasta letteratura sul metodo da lui introdotto. Personalmente ritengo che questo suggestivo modo di vedere le formule di quadratura possa ancora essere suscettibile di ampî sviluppi. Sarebbe infatti, ad esempio, assai interessante cercare di adoperare nei metodi di soluzione numerica del problema di Cauchy: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, $y(x_0) = y_{00}$, $y'(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$, i quali fanno ricorso a formule di quadratura classiche, le generali formule di quadratura di Ghizzetti, cercando di sfruttarne il grado di arbitrarietà per favorirne l'impiego, ottimizzando i risultati.

La teoria può estendersi al calcolo approssimato degli integrali multipli. Risultati in questo indirizzo sono stati ottenuti da Ghizzetti e da suoi allievi. Si comprende, tuttavia, che in tale più ampia accezione, i problemi si complicano notevolmente e molto lavoro è ancora da compiere. Sarebbe anche interessante, nel caso degli integrali multipli, confrontare la teoria di Ghizzetti con quella di Serghej L. Sobolev, basata su concetti dell'Analisi funzionale.

8) *Calcolo delle probabilità*

Ghizzetti, e per i suoi studi sul problema dei momenti e per le esigenze dell'INAC, cui spesso venivano proposti problemi di *Calcolo delle probabilità*, fu buon conoscitore di questa disciplina che egli, anche, insegnò per incarico nella Facoltà di Statistica dell'Università di Roma, dal '42 al '47. Le sue lezioni, raccolte nelle dispense [10], sono redatte con la chiarezza ed il rigore a lui consueti.

Ghizzetti si occupò anche, per conto dell'INAC, di qualche problema teorico di Calcolo delle probabilità. Fra i suoi lavori in questo campo, emerge la Memoria [14] dedicata al problema che si presenta quando si effettua il collaudo di una partita di numerosi *oggetti* e si vuole stabilire quale sia la percentuale di quelli *difettosi*. Si tratta di questo. Allorché il costruttore consegna all'acquirente una partita N di oggetti tutti uguali fra loro, con N molto grande, l'uno e l'altro debbono convenire sulla istituzione di un collaudo di un certo numero $n < N$ degli oggetti in modo che, dai risultati di questo collaudo, si possa dedurre se la partita è da accettare o da rifiutare. Naturalmente, n, per ragioni di costi e di tempo, deve essere molto piccolo rispetto a N. Ci si chiede: come varia, al crescere di n, la *probabilità* che il collaudo eseguito su n oggetti riproduca la realtà effettiva, cioè il collaudo su tutti gli N oggetti? La difficoltà del problema consiste essenzialmente nel definire la *probabilità* anzidetta. Ghizzetti fornisce una sua soluzione che sembra offrire dei vantaggi rispetto a quelle proposte, in precedenza, da altri autori.

Naturalmente il problema potrebbe generalizzarsi, come lo stesso Ghizzetti avverte, ad esempio classificando *a priori* più tipi distinti di *difettosità*. È da notare che tecniche del genere vengono adottate dai Laboratori statistici, che durante le elezioni, politiche o amministrative, usando solo risultati parziali, fanno le *proiezioni* delle percentuali dei voti favorevoli ad ogni partito. È inutile dire che in questo caso la classificazione degli eleggibili viene fatta in base ai partiti di appartenenza. Le *difettosità* emergono dopo ...

Ad altri problemi di Calcolo delle probabilità sono dedicati i lavori [12], [28], [54].

9) *Teoria matematica dell'elasticità*

A questa teoria Ghizzetti ha dedicato il solo lavoro [32]. Ma si tratta di un lavoro, a mio avviso, assai importante per le ricerche che esso ha, in seguito, originato.

Sia Ω un campo limitato di $\mathbb{R}^3$ con frontiera $\partial\Omega$ abbastanza regolare. Esso rappresenti la *configurazione naturale* di un solido elastico isotropo ed omogeneo. Il solido sia sottoposto ad un assegnato sistema di *forze superficiali* $f \equiv (f_1, f_2, f_3)$, che agiscono su $\partial\Omega$, mentre (ipotesi non restrittiva) si considerano nulle le forze di massa. Se il solido acquista, sotto l'azione delle forze assegnate, una configurazione di equilibrio, allora è ben noto, dalla classica *Teoria lineare dell'elasticità* che, detto $u(x) \equiv [u_1(x), u_2(x), u_3(x)]$ lo *spostamento* del punto $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ del solido, le tre funzioni $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ sono soluzione del seguente sistema alle derivate parziali

$$(10)\quad \mu\Big(\frac{\partial^2 u_h}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_3^2}\Big) + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_h}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big) = 0$$

$$(h = 1, 2, 3)\,;$$

λ e μ sono le *costanti di Lamé*, verificanti le condizioni $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$. Al sistema (10) vanno associate le *condizioni al contorno* che esprimono la condizione di equilibrio su $\partial\Omega$, sotto l'azione di f.

Nei problemi della Tecnica, specie in quelli della *Scienza delle Costruzioni*, non tanto interessa la determinazione di $u(x)$, quanto quella dello *sforzo* che agisce su tutto $\overline{\Omega}$. Se con ε_{hk} si indicano le componenti della *deformazione* (linearizzata), cioè

$$\varepsilon_{hk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) \tag{11}$$

le componenti dello *sforzo* sono date dalla celebre *legge di Hooke* (in verità dovuta a Cauchy)

$$\sigma_{hk} = 2\mu\varepsilon_{hk} + \lambda\delta_{hk}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad (\delta_{hk} = 1 \text{ se } h = k, \delta_{hk} = 0 \text{ se } h \neq k). \tag{12}$$

Il calcolo effettivo dei σ_{hk}, attraverso l'integrazione del sistema (10) con le relative condizioni al contorno, ed usando (11) e (12), è problema, ancora oggi, di cospicua difficoltà. Fin dal secolo scorso vennero proposte notevoli semplificazioni nel caso in cui Ω è il cilindro $C = A \times (-L, L)$, dove A è un campo limitato del piano x_1, x_2 ed è $L > 0$. Genialissima la semplificazione proposta da Saint-Venant nel caso in cui, detta A_t la sezione di C: $A_t = \{x, (x_1, x_2) \in A, x_3 = t\}$, il corpo è assoggettato a forze che agiscono su A_L e su A_{-L} e nessuna forza agisce su $\partial A \times (-L, L)$. Saint-Venant riduce il problema ad un problema di Neumann per una funzione armonica in A. Appassionante la tematica, cui la semplificazione di Saint-Venant ha dato luogo, per poterne rigorosamente giustificare i risultati. Ma è anche assai importante il caso delle *deformazioni piane*, nel quale, in base a considerazioni fisiche *a priori*, si suppone che nella configurazione d'equilibrio sia $\varepsilon_{13} \equiv \varepsilon_{23} \equiv \varepsilon_{33} \equiv 0$ ed $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$ dipendano solo da x_1 e x_2. Perché una tale situazione si verifichi, le componenti f_1 e f_2 delle forze assegnate su $\partial A \times (-L, L)$ non devono dipendere da x_3 e deve essere $f_3 \equiv 0$. Inoltre, dai dati su $\partial A \times (-L, L)$ restano determinate, sia su A_L che su A_{-L}, le componenti f_1 e f_2 delle forze superficiali e quella u_3 dello spostamento.

Il problema si riduce ad un problema piano nel campo A. Precisamente, supposto A semplicemente connesso, e supposte piane le deformazioni, esiste in A una funzione biarmonica $F(x_1, x_2)$ (la cosiddetta *funzione di Airy*) tale che $\sigma_{11} = F_{x_2x_2}$, $\sigma_{12} = -F_{x_1x_2}$, $\sigma_{22} = F_{x_1x_1}$. La F si ottiene risolvendo un *problema biarmonico* in A i cui dati al contorno si esprimono tramite la f_1 e la f_2 assegnate su ∂A.

Il problema degli *sforzi piani* è simmetrico a quello delle deformazioni piane, con la differenza che le condizioni, imposte prima alle ε_{hk}, lo sono ora alle σ_{hk}. Precisamente

1) $\sigma_{13} \equiv \sigma_{23} \equiv \sigma_{33} \equiv 0$;

2) $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ non dipendono da x_3[12].

I due problemi *deformazioni piane* e *sforzi piani* coincidono solo nel caso in cui è $\lambda = 0$. Se è $\lambda \neq 0$, Ghizzetti ha dimostrato [32] che i due casi sono del tutto diversi. Tale scoperta di Ghizzetti è tanto più pregevole in quanto, precedentemente, eminenti cultori di Teoria della elasticità avevano creduto di dimostrare che anche nel caso degli sforzi piani esiste un'analoga della funzione di Airy e ci si può ridurre alla risoluzione di un problema biarmonico[13]. Ghizzetti dimostra invece che, supposto A semplicemente connesso, si ha un sistema di sforzi piani se e solo se esistono una funzione φ *armonica* in A e tre costanti reali a, b, c tali che: $\sigma_{11} = bx_2 + c - \varphi_{x_1}$, $\sigma_{12} = -\varphi_{x_2}$, $\sigma_{22} = ax_1 + c + \varphi_{x_2}$. Fornisce poi l'espressione dell'*integrale generale* del sistema (10) nel caso di sforzi piani.

Molti anni dopo, nel 1982, Caterina Cassisa (Mem. lincee, 17, 1982, 5-27) ha dato le condizioni necessarie e sufficienti perché le forze assegnate su ∂C diano luogo a sforzi piani. Esse sono analoghe a quelle delle deformazioni piane su $\partial A \times (-L, L)$, ma f deve essere nulla su A_L e su A_{-L}. Inoltre f_1 e f_2 devono verificare su ∂A una ben determinata successione di condizioni integrali di grande interesse analitico. Dimostrato così che il problema di sforzi piani con f assegnata su ∂C (e quindi su ∂A) è *iperdeterminato*, Cassisa considera il problema consistente nell'assegnare su ∂A la sola componente normale dello sforzo. Si tratta di un problema eterodosso di *derivata obliqua* per l'equazione $\Delta_2 \varphi = 0$ in quanto le incognite, oltre che la φ, sono anche le costanti a, b, c. La ricerca venne

[12] In verità taluni Autori chiamano *problemi di sforzi piani* quelli in cui solo le condizioni 1) vengono imposte. Ma in tale ipotesi lo studio analitico è oggi assai meno approfondito che non nel caso delle ipotesi 1), 2).

[13] S. Timoshenko, *Théorie de l'elasticité*, Paris-Liege, 1936, 13-14; G. Krall, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, parte II, Zanichelli, Bologna, 1940, 34-35; L. Sobrero, *Elasticidade*, Boffoni, Rio de Janeiro, 1942, 437-489.

ripresa da Walter Hayman (Mem. lincee, 17, 1982, 35-56 e IMA Journ. of Appl. Math. 31, 1983, 91-111) con risultati stupefacenti. Egli dimostrò che esistono curve $\Sigma = \partial A$ per le quali il problema è risolubile (per esempio le curve convesse). La circostanza quasi incredibile è che, data $\Sigma = \partial A$, analitica e dotata di un centro di simmetria, in *ogni* intorno di Σ (cioè in ogni *straterello* che include Σ) esistono sempre due curve chiuse di Jordan analitiche tali che per la prima il problema è risolubile, per la seconda non lo è. Tale fenomeno attende ancora una spiegazione fisica.

Più recentemente, nell'ambito della teoria degli sforzi piani, come impostata da Ghizzetti, è stato dato, credo per la prima volta, un significato fisico ad un celebre teorema di Analisi pura: il *teorema dei fratelli Riesz* (Cassisa-Fichera, in *Elasticity*, Horwood-J.Wiley & S., Chichester, 1990, 35-48)(14).

La figura di Ghizzetti come ricercatore non sarebbe completa se non menzionassi la quantità impressionante di problemi proposti all'INAC che egli risolse durante la sua lunga permanenza in quell'Istituto. Spesso egli portò il suo contributo, non solo nella fase risolutiva, ma anche nell'impostazione matematica dei problemi stessi. A questo proposito, oltre ad alcuni lavori già ricordati, ritengo debbano essere menzionate le pubblicazioni [5], [19], [25], [26], [33].

Ghizzetti fu espositore e didatta di esemplare chiarezza: uno dei migliori che abbia avuto la Matematica italiana in questo secolo. Sui suoi testi di Analisi istituzionale [70], [71], [75], [76] si sono formati e seguitano a formarsi generazioni di studenti di Matematica, di Fisica e di Ingegneria.

Ghizzetti ha portato alla Cattedra universitaria i seguenti allievi, come Professori di prima fascia: Alessandro Ossicini, Francesco Rosati, Luigi Marchetti (purtroppo prematuramente scomparso), Gino Roghi, Laura Gori Nicolò Amati, Lionello Pasquini. Sono oggi Professori associati i suoi allievi: Andreina Morelli, Giancarlo Pesamosca, Wilma Sciam-

(14)Il teorema dei fratelli Riesz (4$^{\text{me}}$ Congr. Math. Scandinaves, Stockholm, 1916, 27-44) afferma che se α è una misura definita su ogni boreliano dell'intervallo $[0, 2\pi]$ e se per ogni intero $k \geq 0$ riesce

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\alpha = 0\,,$$

allora α è assolutamente continua.

plicotti, Jolanda Verna, Luigina Cosimi, Bruna Germano. Numerosi altri studiosi, oggi docenti universitari, anche se non esclusivamente allievi di Ghizzetti, si sono valsi del suo insegnamento.

Per concludere questo ricordo del Collega scomparso, non posso fare di meglio che riportare qui il giudizio finale, contenuto nella relazione che fu presentata, nel 1987, alla Categoria I della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia di Lincei per proporre la sua elezione a Socio Nazionale. Elezione poi avvenuta con voto unanime della Classe.

Aldo Ghizzetti è un matematico di particolare acutezza, che riesce, grazie ad una larga cultura nel campo della Matematica classica e ad una raffinata abilità algoritmica, ad affrontare e risolvere difficili problemi nell'ambito dell'Analisi e delle sue applicazioni. Veramente non comuni la chiarezza espositiva, il rigore della forma, l'assoluta correttezza dei risultati messi in luce nella sua vasta produzione scientifica.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

[1] *Determinazione delle curve limiti di un sistema continuo* ∞^1 *di curve piane omografiche*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, **23** (1936), 261-264.

[2] *Sulle curve limiti di un sistema continuo* ∞^1 *di curve piane omografiche*, Mem. R. Acc. Scienze Torino, **68** (1935), 123-141.

[3] *Sull'uso della trasformazione di Laplace nello studio dei circuiti elettrici*, Rend. Circ. Matem. Palermo, **51** (1937), 1-30.

[4] *Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **9** (1940), 215-223.

[5] (con C. Ferrari, C. Possio), *Determinazione della legge di distribuzione della circolazione lungo il raggio per un'elica data col metodo di Sandi-Kawada. Calcolo dell'elica di dato raggio e di data distribuzione della circolazione lungo la pala*, in "*Sistemi di propulsione per la navigazione aerea e marittima*", R. Acc. Scienze Torino, (1942), 1-51.

[6] *Sui momenti di una funzione limitata*, Atti R. Acc. Scienze Torino, **77** (1941), 1-11.

[7] *Sui problemi di Dirichlet per la striscia e per lo strato*, Mem. R. Acc. d'Italia, **13** (1942), 617-649.

[8] (con R. Caccioppoli), *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare*, Rend. R. Acc. d'Italia, **3** (1942), 427-440.

[9] (con R. Caccioppoli), *Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari*, Rend. R. Acc. d'Italia, **3** (1942), 493-501.

[10] *Calcolo delle probabilità*, Ed. D.U.S.A., Roma, 1942-43, 1-362.

[11] *Ricerche sui momenti di una funzione limitata compresa fra limiti assegnati*, Mem. R. Acc. d'Italia, **13** (1942), 1165-1199.

[12] *Sui momenti di 2° ordine di una legge di probabilità in n dimensioni*, Rend. Matem. e sue appl., (1943), 94-101.

[13] *Calcolo simbolico.* (*La trasformazione di Laplace ed il calcolo simbolico degli elettrotecnici*), Collez. "Monografie di Matem. Appl.", Ed. N. Zanichelli, Bologna, (1943), 1-331.

[14] *Sul problema del collaudo di partite di numerosi oggetti*, Atti VII Riun. Soc. Ital. Statistica, Roma, (1943), 1-19.

[15] *Sull'approssimazione delle funzioni continue*, Atti R. Acc. Scienze Torino, **80** (1944-45), 1-6.

[16] *Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **1** (1946), 40-44.

[17] *Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali*, Rend. Matem. e sue appl., (1946), 1-38.

[18] *Sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **1** (1946), 214-218.

[19] (con A. Borsellino), *Produzione di coppie di elettroni da parte di raggi γ nel campo di un elettrone*, in "Ricerca Scient. e Ricostruz.", (1946), 1-3.

[20] *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **1** (1946), 691-696.

[21] *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito*, Rend. Matem. e sue appl. (1947), 1-47.

[22] *Ricerche analitiche sul problema dell'equilibrio di una piastra indefinita a forma di striscia, incastrata lungo i due lati*, Rend. Matem. e sue appl., (1947), 1-43.

[23] *Condizioni necessarie e sufficienti per i momenti di una funzione limitata*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **2** (1947), 533-536.

[24] *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, lineari ed omogenee*, Giorn. Matem. Battaglini, **77** (1947), 5-27.

[25] *Tavola della funzione euleriana $\Gamma(z)$ per valori complessi dell'argomento*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **3** (1947), 254-257.

[26] *Sul calcolo di un integrale che compare nella teoria della produzione di coppie di elettroni*, Rev. Matem. y Fis., Univ. Nacional Tucuman, **6** (1947), 37-50.

[27] *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace al problema di Dirichlet per l'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ in n variabili*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, **17** (1948), 39-74.

[28] *Sul prodotto di due variabili casuali gaussiane*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **4** (1948), 534-539.

[29] *Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **5** (1949), 344-348.

[30] *Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee*, Rend. Matem. e sue appl., (1948), 1-15.

[31] *Sul problema dei momenti*, Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. Torino, **8** (1947-48 e 1948-49), 93-107.

[32] *Sugli stati di tensione piana in un corpo elastico*, Ann. Matem. pura appl., **29** (1949), 125-130.

[33] *Oscillazioni dell'acqua in impianti idraulici dotati di pozzi piezometrici*, Ed. Perrella, Roma (1950), 1-84. Trad. francese: *Calcul des conduites d'eau avec cheminées d'équilibre*, Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[34] *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **4** (1950), 131-156.

[35] *Sul teorema del prodotto integrale nella teoria della trasformazione di Laplace*, Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. Torino, **9** (1950), 251-261.

[36] *Sugli sviluppi in serie di funzioni di Hermite*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **5** (1951), 29-37.

[37] *Sopra un fondamentale teorema nella teoria della trasformazione di Laplace*, Rend. Sem. Fac. Scienze Univ. Cagliari, **21** (1951-52), 1-13.

[38] *Ricerche abeliane e tauberiane compiute nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*, Ann. di Matem. pura appl., (1953), 113-132.

[39] *Sulle formule di quadratura*, Rend. Sem. Matem. Fis. Milano, **26** (1954-55), 1-16.

[40] *Sulle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, lineari, in due variabili indipendenti, le cui soluzioni godono di proprietà integrali rispetto ad una delle variabili*, Ann. Matem. pura appl., **40** (1955), 41-59.

[41] *Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **20** (1956), 580-583.

[42] *Lezioni di Analisi Superiore* (*Teoria dell'approssimazione lineare*), Ed. Veschi, Roma, 1955-56, 1-251.

[43] *Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **20** (1956), 753-758.

[44] *Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura*, Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, **26** (1957), 201-222.

[45] *Questioni connesse con le formule di cubatura*, Atti V Congresso UMI, Pavia-Torino 1956, 318-319.

[46] *Sugli integrali doppi di espressioni lineari alle derivate parziali*, (I e II), Rend. Acc. Naz. Lincei, **22** (1957), 1-10.

[47] *Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **24** (1958), 262-269.

[48] *Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione differenziale* $x'' + x + \varphi(x') = 0$, Ann. Matem. pura appl., **51** (1960), 167-202.

[49] *Sulle formule di cubatura relative ad intervalli piani*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **14** (1960), 237-268.

[50] *Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati*, (I e II), Rend. Acc. Naz. Lincei, **32** (1962), 290-298 e 467-470.

[51] *Les formules de quadrature sur les intervalles infinis*, Ann. Fac. Sciences Univ. de Clermont, **2** (1962), 109-115.

[52] *Alcuni criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del 2° ordine*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **33** (1962), 219-229.

[53] *Formule di maggiorazione e criteri sufficienti di stabilità per gli integrali di un'equazione differenziale omogenea di ordine n*, Mem. Acc. Naz. Lincei, **7** (1963), 17-31.

[54] (con M.S. Roma), *Calcolo di alcune probabilità relative alla suddivisione casuale di un segmento in n parti*, Giorn. Ist. Ital. Attuari, **1**, 1964.

[55] *Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee*, Rend. Circ. Matem. Palermo, **13** (1964), 1-20.

[56] *Su due configurazioni di dominii che ricoprono la varietà di Hurwitz*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **39** (1965), 422-427.

[57] (con A. Ossicini), *Su un nuovo tipo di sviluppo di una funzione in serie di polinomi*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **43** (1967), 21-29.

[58] *Procedure for constructing quadrature formulae on infinite intervals*, Numerische Mathematik, **12** (1968), 111-119.

[59] *Sulla struttura delle formule di quadratura*, Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. di Torino, **27** (1967-68), 69-84.

[60] (con A. Ossicini), *Studio asintotico di una particolare funzione*, Rend. di Matem., **2** (1969), 1-13.

[61] (con A. Ossicini), *Quadrature formulae*, Intern. Series of Numer. Mathem., **13**, Birkhäuser Verlag, Basel 1970.

[62] (con A. Ossicini), *Trasformate di Laplace e calcolo simbolico*, Collez. Matem. Appl., **4**, UTET, Torino, 1971, XII+474.

[63] (con A. Ossicini), *Studio di una particolare equazione integrale singolare di Wiener-Hopf*, Rend. di Matem., **4** (1971), 1-41.

[64] (con A. Ossicini e F. Rosati), *Formule di quadratura con funzione di influenza di segno costante*, Calcolo, **10** (1973), 87-100.

[65] (con A. Ossicini), *Polinomi s-ortogonali e sviluppi in serie ad essi collegati*, Mem. Acc. Sci. Torino, **18** (1974), 1-16.

[66] (con A. Ossicini), *Sull'esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. di Matem., **8** (1975), 1-15.

[67] (con A. Ossicini), *Generalizzazione dei polinomi s-ortogonali e dei corrispondenti sviluppi in serie*, Atti Acc. Sci. Torino, **109** (1974-75), 371-379.

[68] *Sul teorema di Lerch per l'intervallo* $(0, +\infty)$, Rend. di Matem., **10** (1977), 535-538.

[69] (con B. Germano), *Sulla completezza in* $L^2(0, +\infty)$ *di certi sistemi di polinomi ortonormali*, Quaderno I.M.A., **11** (1978), 3-6.

[70] (con F. Rosati), *Lezioni di Analisi Matematica*, I, Ed. Veschi, Roma, 1980, 1-500.

[71] (con F. Rosati), *Complementi ed Esercizi di Analisi Mateamtica*, I, Ed. Veschi, Roma, 1980, 1-500.

[72] *Sull'approssimazione delle funzioni* $f(x)$ *dello spazio* $L^2[0,1]$ *mediante combinazioni lineari di potenze della variabile* x, Rend. di Matem., **1** (1981), 147-158.

[73] *Un problema riguardante l'approssimazione delle funzioni* $f(x)$ *di uno spazio* $L^2_{d\varphi}$ $[a,b]$ *mediante combinazioni lineari di assegnate funzioni di tale spazio*, Rend. di Matem., **2** (1982), 1-29.

[74] *Una questione riguardante l'approssimazione negli spazi* $L^2_{d\varphi}[a,b]$, Convegno celebr. Renato Calapso, Messina-Taormina, 1981, Ed. Veschi, Roma, 165-173.

[75] (con F. Rosati), *Lezioni di Analisi Mateamtica*, II, Ed. Veschi, Roma, 1981, 1-500.

[76] (con F. Rosati), *Complementi ed esecizi di Analisi Mateamtica*, II, Ed. Veschi, Roma, 1981, 1-520.

[77] *Un ulteriore esempio relativo ad un certo problema di approssimazione negli spazi* $L^2_{d\varphi}[a,b]$, Calcolo, **19** (1982), 1-14.

[78] *Interpolazione con splines verificanti una opportuna condizione*, Calcolo, **20** (1983), 53-65.

[79] *Costruzione di un sistema di polinomi ortonormali a partire da due suoi polinomi consecutivi*, Rend. Acc. Naz. Lincei, **76** (1984), 346-352.

[80] *Sulla costruzione di un sistema di polinomi ortonormali a partire da tre suoi polinomi consecutivi*, Calcolo, **22** (1985), 1-6.

INDIRIZZO DELL'AUTORE:

Gaetano Fichera - Via Pietro Mascagni, 7 - 00199 Roma - Italy