Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 355-366

Funzioni caratteristiche e polinomi s-ortogonali

A. OSSICINI – M.R. MARTINELLI – F. ROSATI

Alla memoria di Aldo Ghizzetti, amico e maestro

RIASSUNTO: *Considerate due famiglie di polinomi s-ortogonali (estese al campo complesso), mediante il metodo delle funzioni caratteristiche si stabiliscono proprietà asintotiche relative alle corrispondenti formule ipergaussiane per la valutazione approssimata di integrali.*

ABSTRACT: *Two remarkable systems of s-orthogonal polynomials and their connected hyper-Gaussian quadrature formulae are considered. By method of "characteristic function" (in the complex plane), asymptotic properties for approximate estimations of integrals are given.*

1 – Polinomi s-ortogonali

Sia $[a,b]$, $a<b$, un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ e $p(x)$ un'assegnata funzione misurabile, quasi ovunque positiva e sommabile in $[a,b]$ ($p \in L[a,b]$).

Fissato un intero $s \geq 0$, sia $\{P_{s,m}(x) | m = 0, 1, 2, \dots\}$ una successione di polinomi, di rispettivo grado m, che risulti s-ortogonale in $[a,b]$ rispetto

KEY WORDS AND PHRASES: *Orthogonal polynomials*
A.M.S. CLASSIFICATION: 33A65

al *peso* $p(x)$, cioè per ogni intero $m \geq 1$ si abbia

$$\int_a^b p(x) P_{s,k}(x) [P_{s,m}(x)]^{2s+1} dx = 0 \,, \qquad \forall\, k \leq m-1 \,, \tag{1.1}$$

ovvero, in forma equivalente

$$\int_a^b p(x) \Pi_{m-1}(x) [P_{s,m}(x)]^{2s+1} dx = 0 \,, \tag{1.2}$$

essendo $\Pi_{m-1}(x)$ *un arbitrario polinomio di grado* $\leq m-1$.

Assegnati $p(x)$ ed s, è stato provato (cfr. [1], [2]) che la successione $\{P_{s,m}(x)\}$ risulta individuata a meno di un'arbitraria costante moltiplicativa $c_{s,m}$. Risulta inoltre che, per $m \geq 1$, il polinomio $P_{s,m}(x)$ ha i suoi m zeri *tutti distinti ed interni* all'intervallo $[a, b]$, valendo anche proprietà di densità, al crescere di m [3], per una vasta classe di pesi $p(x)$. Per $s = 0$, si ritrovano naturalmente i classici polinomi ortogonali.

I polinomi $P_{s,m}(x)$ possono essere *normalizzati* mediante un'opportuna scelta delle costanti $c_{s,m}$. Segnaliamo due tipi di normalizzazione di particolare interesse:

nel primo, posto $P_{s,0}(x) = 1$, si richiede che risulti

$$P_{s,m}(x) = x^m + \dots \,, \tag{1.3}$$

cioè, per $m \geq 1$, si abbia $D^m P_{s,m}(x) = m!$;

nel secondo, si impone invece la condizione integrale

$$\int_a^b p(x) [P_{s,m}(x)]^{2s+2} dx = 1 \,, \qquad \forall\, m = 0, 1, 2, \dots \,, \tag{1.4}$$

in analogia a quanto viene fatto per $s = 0$, nel caso della ortogonalità.

In [1] sono indicati vari problemi che conducono alla considerazione di sistemi di polinomi s-ortogonali.

Vogliamo qui esaminare quello relativo alla valutazione approssimata di integrali (formule di quadratura a *nodi multipli*, o *ipergaussiane*).

Fissati $s \geq 0$ ed $m \geq 1$, per ogni $f \in AC^{2s}[a,b]$, onde $f^{(2s+1)} \in L[a,b]$, si vuole costruire una formula di quadratura *ipergaussiana* del tipo

$$(1.5) \qquad \int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=0}^{2s} A_{hj} f^{(h)}(x_{m,j}) + R_{s,m}[f]\,,$$

ove i coefficienti A_{hj} (dipendenti da s e m) non dipendono da f e sono univocamente individuati dalla condizione che risulti $R_{s,m}[f] = 0$, quando f è *un arbitrario* polinomio di grado $\leq 2m(s+1) - 1$; risulta inoltre che i *nodi* $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,m}$, (dipendenti in generale da s) debbono essere necesssariamente gli m *zeri* di $P_{s,m}(x)$.

Nasce il problema di una valutazione "a priori" dell'ordine di grandezza dell'*errore* o *resto* $R_{s,m}[f]$. È questo lo scopo del presente lavoro ove sono trattati due casi relativi a pesi $p(x)$ di particolare interesse per le applicazioni; in conseguenza si stabiliscono proprietà asintotiche che migliorano quelle trovate da A. Ossicini e F. Rosati in [4] e [5].

2 – Funzioni caratteristiche e formule di quadratura

Sia $f(x)$ *traccia* su $[a,b]$ di una funzione $f(z)$ analitica in un aperto B del piano della variabile complessa z, $(B \supset [a,b])$. Fissato un dominio regolare $D \subset B$ e detta ∂D la sua frontiera, risulti $[a,b] \subset D - \partial D$; è allora evidente che vale per $f(x)$ la rappresentazione integrale

$$(2.1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z-x} dz\,, \qquad \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Indicato allora con $I[f]$ l'integrale da valutare che figura a primo membro di (1.5), si ha manifestamente

$$(2.2) \qquad I[f] = \int_a^b p(x)f(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b p(x)\Big(\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z-x} dz \Big) dx\,.$$

Introdotta la funzione ausiliaria

$$(2.3) \qquad \psi(z) = \int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx\,, \qquad \forall\, z \notin [a,b]\,,$$

l'integrale da valutare assume la forma

$$I[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(z)\psi(z)dz\,. \tag{2.4}$$

Tenendo conto di tale espressione e della (2.2), in virtù di (1.5), l'errore $R_{s,m}[f]$ è espresso da

$$R_{s,m}[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} f(z)\Phi_{s,m}(z)dz\,, \tag{2.5}$$

avendo indicato con $\Phi_{s,m}(z)$ la cosiddetta *funzione caratteristica* individuata da

$$\Phi_{s,m}(z) = \psi(z) - \psi_A(z)\,, \tag{2.6}$$

ove $\psi(z)$ è data da (2.3), mentre $\psi_A(z)$ (dipendente in generale da s ed m) è definita da

$$\psi_A(z) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=0}^{2s} A_{hj} \frac{h!}{(z - x_{m,j})^{h+1}}\,, \quad \forall\, z \notin \bigcup_{j=1}^{m} \{x_{m,j}\}\,. \tag{2.7}$$

In [4] è stato mostrato che sussiste la relazione

$$\Phi_{s,m}(z) = \frac{Q_{s,m}(z)}{[P_{s,m}(z)]^{2s+1}}\,, \quad \forall\, z \notin [a,b]\,, \tag{2.8}$$

avendo posto

$$Q_{s,m}(z) = \int_a^b p(x) \frac{[P_{s,m}(x)]^{2s+1}}{z - x} dx\,, \quad m = 1, 2, \dots\,, \tag{2.9}$$

ed indicato con $P_{s,m}(z)$ il polinomio dedotto da $P_{s,m}(x)$ con z in luogo di x.

Stante (2.5), riveste particolare interesse ai fini della valutazione dell'errore, lo studio delle *funzioni caratteristiche*, al variare di s ed m. In ogni caso rileviamo che $\Phi_{s,m}(z)$ *non ha zeri per* $z \notin [a,b]$, ciò che risulta dal comportamento della $Q_{s,m}(z)$, per la quale A. Ossicini e F. Rosati ([4], [5]) hanno provato che

$$Q_{s,m}(z) \neq 0\,, \qquad \forall\, z \notin [a,b]\,. \tag{2.10}$$

Nel seguito, per comodità di calcolo, e senza ledere la generalità, supporremo che sia

$$[a,b] = [-1,1]\,, \quad B \supset [-1,1]\,; \tag{2.11}$$

scriveremo perciò la (2.9) per $m \geq 1$ nella forma

$$Q_{s,m}(z) = \int_{-1}^{1} p(x) \frac{[P_{s,m}(x)]^{2s+1}}{z-x} dx\,, \quad \forall\, z \notin [-1,1] \tag{2.12}$$

e quindi

$$\Phi_{s,m}(z) = \frac{Q_{s,m}(z)}{[P_{s,m}(z)]^{2s+1}}\,, \quad \forall\, z \notin [-1,1]\,. \tag{2.13}$$

3 – Caso dei polinomi di Tchebychef di prima specie

In relazione all'intervallo $[-1,1]$, sia assegnato il *peso*

$$p(x) = (1-x^2)^{-1/2}\,; \tag{3.1}$$

detto $\{T_m(x)\}$ il sistema dei polinomi di *Tchebychef di prima specie*, consideriamo la successione

$$P_{s,m}(x) = 2^{1-m} T_m(x)\,, \quad m = 0,1,2,\dots\,, \tag{3.2}$$

di polinomi ortogonali ($s = 0$) rispetto al peso (3.1); è noto (vedi ad esempio [6]) che essa risulta anche *s-ortogonale*, $\forall\, s \in \mathbb{N}$, rispetto al peso considerato.

Da (2.12) si ha allora, nel caso in esame,

$$Q_{s,m}(z) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} \frac{[2^{1-m} T_m(x)]^{2s+1}}{z-x} dx\,, \quad \forall\, z \notin [-1,1]\,. \tag{3.3}$$

Posto $x = \cos\theta$ e tenendo conto che $T_m(\cos\theta) = \cos m\theta$, si ha

$$(3.4)\qquad Q_{s,m}(z) = 2^{(1-m)(2s+1)} \int_0^\pi \frac{[\cos m\theta]^{2s+1}}{z-\cos\theta} d\theta\,, \quad \forall\, z \notin [-1,1]\,.$$

Considerata nel piano complesso $\mathbb{C}$ una famiglia E_ρ di *ellissi omofocali* (fuochi in $z = 1, z = -1$) di parametro $\rho > 1$ individuata da

$$(3.5)\qquad E_\rho = \left\{ z \,\middle|\, |z + \sqrt{z^2-1}| = \rho \right\},$$

ove per la radice va presa la determinazione principale, si osserva che i semiassi di E_ρ sono dati da

$$(3.6)\qquad a_\rho = (\rho + 1/\rho)/2\,, \qquad b_\rho = (\rho - 1/\rho)/2\,;$$

è perciò evidente che per $\rho \to 1$ l'ellisse E_ρ degenera nel segmento focale $[-1, 1]$.

Dalla relazione immediata

$$(3.7)\qquad |z - \cos\theta| \geq a_\rho - 1\,, \quad \forall\, z \in E_\rho\,,$$

da (3.4), calcolando $\int_0^\pi |\cos m\theta|^{2s+1} d\theta$, si ricava

$$(3.8)\qquad |Q_{s,m}(z)| \leq \frac{2}{2^{(m-1)(2s+1)}} \cdot \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} \cdot \frac{1}{a_\rho - 1}\,, \quad \forall\, z \in E_\rho\,.$$

Poiché per i polinomi di Tchebychef di prima specie vale la rappresentazione complessa [5]

$$(3.9)\qquad T_m(z) = \frac{1}{2}\Big[(z + \sqrt{z^2-1})^m + (z - \sqrt{z^2-1})^m\Big], \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,,$$

tenuto conto di (3.2) e (2.13), si perviene alla

$$(3.10)\qquad \Big|\Phi_{s,m}(z)\Big|_{z\in E_\rho} \leq \frac{2}{a_\rho - 1} \cdot \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} \cdot \Big|\frac{1}{T_m(z)}\Big|^{2s+1}_{z\in E_\rho}\,.$$

Poiché su E_ρ vale la (3.5) e si ha inoltre

$$\left|z-\sqrt{z^2-1}\right| = \left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^{-1} = \rho^{-1}\,, \tag{3.11}$$

in virtù di (3.9), dalla (3.10), stante la (3.11) si ottiene la

$$\left|\Phi_{s,m}(z)\right|_{z=E_\rho} \leq \frac{2}{a_\rho - 1}\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\left(\frac{2}{\rho^m-\rho^{-m}}\right)^{2s+1}, \tag{3.12}$$

che fornisce la richiesta maggiorazione del modulo della funzione caratteristica sulla famiglia E_ρ.

Conseguito tale risultato, nel caso del peso $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, possiamo dare una valutazione dell'errore (2.5) della formula di quadratura ipergaussiana.

In relazione al fissato campo di analiticità di $f(z)$, $B \supset [-1,1]$, è evidente che esiste una famiglia E_ρ, $\rho > 1$, di ellissi, tale che il dominio ellittico D_ρ di frontiera E_ρ contenga all'interno $[-1,1]$ e risulti contenuto in B. Sia ρ^* l'estremo superiore dei ρ ammissibili. Allora, $\forall\ \rho \in (1,\rho^*)$ da (2.5) e (3.12) si ha immediatamente

$$\left|R_{s,m}[f]\right| \leq \frac{1}{\pi}\frac{L_\rho M_\rho}{a_\rho - 1}\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\left(\frac{2}{\rho^m-\rho^{-m}}\right)^{2s+1}, \tag{3.13}$$

avendo indicato con L_ρ la lunghezza dell'ellisse E_ρ, e con M_ρ il massimo di $|f(z)|$ su E_ρ.

Dalla (3.13) appare evidente che per s fissato si ha

$$\lim_{m\to\infty} R_{s,m}[f] = 0\,, \tag{3.14}$$

la velocità di convergenza risultando tanto più elevata quanto più grande è s:

$$R_{s,m}[f] = O(\rho^{-m(2s+1)})\,,\quad m\to\infty\,. \tag{3.15}$$

4 – Il caso dei polinomi di Tchebychef di seconda specie

In relazione all'intervallo $[-1,1]$ consideriamo la famiglia di pesi $p_s(x)$ dati da

$$p_s(x) = (1-x^2)^{s+1/2}\,, \qquad s = 0,1,2,\dots\,. \tag{4.1}$$

In corrispondenza ad un fissato s, un sistema $\{P_{s,m}(x)\}$ di polinomi s-ortogonali rispetto al peso $p_s(x)$ è individuato da

$$P_{s,m}(x) = 2^{-m}V_m(x)\,, \quad m = 0,1,2,\dots\,, \tag{4.2}$$

ove $V_m(x)$ indica il *polinomio di Tchebychef di seconda specie e di grado m.*

Con le notazioni del n. 2, nel caso attuale risulta

$$Q_{s,m}(z) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{s+1/2}\frac{[2^{-m}V_m(x)]^{2s+1}}{z-x}dx\,, \quad \forall\, z \notin [-1,1]\,. \tag{4.3}$$

Tenendo conto della nota relazione $V_m(\cos\theta) = \sin(m+1)\theta/\sin\theta$ la (4.3) assume la forma

$$Q_{s,m}(z) = 2^{-m(2s+1)}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{z-\cos\theta}[\sin(m+1)\theta]^{2s+1}d\theta\,. \tag{4.4}$$

Operando sulla famiglia di ellissi omofocali E_ρ, $\rho > 1$, introdotta in (3.5) e tenendo conto della (3.7), non appena si osservi che

$$\int_0^{\pi} \sin\theta|\sin(m+1)\theta|^{2s+1}d\theta \le 2\int_0^{\pi/2}(\sin\tau)^{2s+1}d\tau = 2\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\,,$$

si perviene alla formula di maggiorazione

$$|Q_{s,m}(z)| \le \frac{2}{2^{m(2s+1)}}\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\cdot\frac{1}{a_\rho - 1}\,, \quad \forall\, z \in E_\rho\,. \tag{4.5}$$

Adottando per i polinomi di Tchebychef di seconda specie la rappresentazione complessa [5]

$$V_m(z) = \frac{1}{2}\,\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{m+1}-(z-\sqrt{z^2-1})^{m+1}}{\sqrt{z^2-1}}\,, \tag{4.6}$$

da (4.2) e (2.13), in virtù di (4.5) si ha

$$|\Phi_{s,m}(z)|_{z\in E_\rho} \le \frac{2}{a_\rho-1}\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\left(\frac{\rho+\rho^{-1}}{\rho^{m+1}-\rho^{-m-1}}\right)^{2s+1}. \tag{4.7}$$

Pertanto, operando come in (3.13) si perviene alla maggiorazione dell'errore della formula di quadratura ipergaussiana, del tipo (1.5), relativa al peso $p_s = (1-x^2)^{s+1/2}$:

$$|R_{s,m}[f]| \le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{L_\rho M_\rho}{a_\rho-1}\cdot\frac{(2s)!!}{(2s+1)!!}\left(\frac{\rho+\rho^{-1}}{\rho^{m+1}-\rho^{-m-1}}\right)^{2s+1}, \tag{4.8}$$

valida $\forall\ \rho \in (1,\rho^*)$, con il consueto significato dei simboli.

Dalla (4.8) segue ancora

$$R_{s,m}[f] = O(\rho^{-m(2s+1)})\,,\quad m\to\infty\,. \tag{4.9}$$

5 – Conclusioni

Le (3.13) e (3.15) relative al peso $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ e le (4.8), (4.9) relative ai pesi $p_s = (1-x^2)^{s+1/2}$, $s = 0,1,\dots$, completano e migliorano i risultati stabiliti da A. Ossicini e F. Rosati in [4] e [5], precisando anche l'ordine di infinitesimo (per $m\to\infty$) dell'errore, cioè la rapidità di convergenza delle corrispondenti formule di quadratura ipergaussiane al crescere del numero m dei nodi (fissati negli zeri dei corrispondenti polinomi s-ortogonali).

In particolare per le (3.13) e (3.15) si ha la già osservata circostanza che peso $p(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ e polinomi $P_{s,m}(x)$ dati in (3.2) non dipendono da s, onde la corrispondente formula di quadratura ipergaussiana dedotta da (1.5) e (2.2), può essere anche utilizzata per m fissato ed $s\to\infty$.

Posto

$$X_m = \frac{2}{\rho^m - \rho^{-m}}\,, \tag{5.1}$$

è evidente che non appena si ha

$$X_m \leq 1\,, \tag{5.2}$$

risulta

$$R_{s,m}[f] \to 0\,, \text{ per } s \to \infty\,, \tag{5.3}$$

avendosi ovviamente (ricorrendo alla formula di Wallis)

$$R_{s,m}[f] = O\Big(\frac{X_m^{2s+1}}{\sqrt{s+1}}\Big), \quad s \to \infty\,. \tag{5.4}$$

Con le notazioni del n. 3, è evidente che risulta conveniente realizzare la condizione $X_m < 1$, cosa certamente possibile non appena

$$\rho^m > 1 + \sqrt{2}\,. \tag{5.5}$$

È evidente che tale condizione è tanto più facilmente realizzabile *con m piccolo*, quanto più è possibile prendere $\rho \in (1, \rho^*)$ grande, cioè quanto più grande è ρ^*.

Il risultato (5.4) permette di ritrovare per altra via una proprietà, già evidenziata dagli Autori della presente nota, attraverso lo studio di funzionali ipergaussiani trigonometrici nel campo analitico [7]. Qui, non ricorrendo a trasformazioni di coordinate, si ha il vantaggio di poter individuare direttamente, attraverso la geometria dell'aperto $B \supset [-1, 1]$, il valore ρ^* e quindi la classe dei $\rho > 1$ ammissibili. Nel contempo, confrontando con quanto fatto in [8][(1)], risulta meglio evidenziato come il miglioramento di ipotesi qualitative su $f(x)$, porti ad una maggiore rapidità di convergenza a zero di $R_{s,m}[f]$, anche per $m \to \infty$.

[(1)] Nei lavori indicati nella “Bibliografia”, è riportata un'ampia e dettagliata bibliografia sugli argomenti trattati; qui abbiamo riportato solo gli elementi essenziali.

Rileviamo infine che per una più semplice valutazione numerica di (3.13) e (4.8), con s ed m fissati, può risultare conveniente operare in scala logaritmica, facendo intervenire le funzioni iperboliche. Più precisamente, posto

$$\rho = e^{\alpha}\,, \quad \alpha > 0 \tag{5.6}$$

la (3.13) si scrive

$$|R_{s,m}[f]| \leq \frac{1}{\pi}\frac{L_\rho M_\rho}{a_\rho - 1} \cdot \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} \cdot \left(\frac{1}{\sinh m\alpha}\right)^{2s+1}$$

ed analogamente la (4.8) assume la forma

$$|R_{s,m}[f]| \leq \frac{1}{\pi}\frac{L_\rho M_\rho}{a_\rho - 1} \cdot \frac{(2s)!!}{(2s+1)!!} \cdot \left(\frac{\cosh \alpha}{\sinh(m+1)\alpha}\right)^{2s+1}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Ghizzetti – A. Ossicini: *Polinomi s-ortogonali e sviluppi in serie ad essi collegati*, Memoria Acc. Sc. Torino, (4), **18** (1974).

[2] A. Ghizzetti – A. Ossicini: *Sull'esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. Mat. e Appl., VI, **8** (1975).

[3] M.R. Martinelli – A. Ossicini – F. Rosati: *Densità degli zeri di un sistema di polinomi s-ortogonali*, Rend. Mat., VII, **12** (1992).

[4] A. Ossicini – F. Rosati: *Funzioni Caratteristiche nelle formule di quadratura gaussiane con nodi multipli*, Bollettino U.M.I., 4, **11** (1975).

[5] A. Ossicini – F. Rosati: *Procedimenti interpolatori nella valutazione gaussiana di integrali a valore principale*, Le Matematiche, Catania, XXXI, **1** (1976).

[6] A. Ossicini – F. Rosati: *Polinomi di Jacobi s-ortogonali*, Rend. Mat., VII, **12** (1992).

[7] M.R. Martinelli – A. Ossicini – F. Rosati: *Funzionali ipergaussiani trigonometrici nel campo analitico*, Le Matematiche, Catania, XXXIX, **1-II** (1984).

[8] A. Ossicini – F. Rosati: *Sui funzionali ipergaussiani trigonometrici*, Calcolo, XX, **II** (1983).

Lavoro pervenuto alla redazione il 3 marzo 1994

Indirizzo degli Autori:

Alessandro Ossicini – Maria Renata Martinelli – Francesco Rosati – Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate – Via Antonio Scarpa, 16 – 00161 Roma, Italia