Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 385-395

Sulle precessioni di Thomas e di Fokker in relatività generale

M. RICCI

Riassunto: *Lo spin relativo di un elettrone a compasso (sullo schema: linea oraria e trasporto Fermi-Walker di un triedro ortogonale) viene ricavato in modo diretto, nell'ambito della Relatività Generale, utilizzando la nozione di Ribaltamento isometrico [1] e la derivazione vincolata di Cattaneo [13]; si ottiene così, sostanzialmente, l'espressione esatta dello spin, ottenuta da Massa e Zordan ([12], p. 27-30) con un termine aggiuntivo poco chiaro. Naturalmente, nel caso geodetico si ritrova la precessione di Fokker (cfr. [6]).*

Abstract: *By means of the canonic 3-plane isometric correspondence [1] and constrained Cattaneo derivative [13] we derive, in General relativity and in a very simply way, the relative spin of an electron with an axis (in the usual approach worldline l^+ and three orthonormal vectors, orthogonal to l^+ and Fermi-Walker transported). So we obtain the exact law of the spin, different from the Massa-Zordan formula ([12] p. 27-30), because the presence, in the last, of a unclear term, and deduced through a different approach. The Thomas and Fokker precession follow as particular cases.*

1 – Premesse e generalità

Lo schema *punto materiale* si può considerare anche in Relatività, ove esso comprende, nella sua accezione più generale, particelle con struttura interna scalare (*massa propria variabile*); come tale, esso costituisce uno

Key Words and Phrases: *Relatività generale – Particelle con spin – Precessioni di Thomas e Fokker*
A.M.S. Classification: 83C10

schema a quattro parametri e non a tre come nella situazione classica.

Dal punto di vista dinamico, lo schema è regolato dai due *teoremi della quantità di moto e dell'energia*, ora indipendenti, così come le due sorgenti: *forza meccanica e potenza termica* di cui si compone l'azione 4-dimensionale.

Comunque, ai fini di un'adeguata descrizione dello stato cinematico di una particella con struttura interna più complessa, si rende necessaria l'introduzione di altri parametri strutturali, ad esempio un numero finito di vettori applicati nel "baricentro" (*direttori*) atti a definire le posizioni di subparticelle (una o più).

In uno schema di questo tipo, ma con un solo direttore, rientrano le particelle con spin: tra queste l'elettrone con asse [3].

Nella descrizione classica, un elettrone con spin è schematizzato da un giroscopio il cui asse, di versore **k**, conserva direzione invariabile. Pertanto, a partire da prefissate condizioni iniziali, il sistema è descritto dal vettore velocità angolare $\omega = r\mathbf{k}$, applicato nel baricentro P del giroscopio.

Si ha così lo *schema punto a compasso*: $(P,\ \omega)$, il quale ha senso dal punto di vista classico, poiché ω è invariante per cambiamento del Riferimento galileiano ed ha il significato di *velocità angolare propria* ω_0 dell'elettrone.

Questa circostanza apre la strada all'estensione relativistica dello schema a compasso. Invero, appare naturale formulare l'ipotesi di rigidità nel Riferimento proprio dell'elettrone.

Da questo punto di vista, l'elettrone viene schematizzato in una *microstruttura rigida nel senso di Born*.

Tale struttura è priva di deformazione nel Riferimento locale di moto incipiente; appare invece deformabile se esaminata da un qualunque Riferimento galileiano.

Quanto precede suggerisce, per una particella con spin, in Relatività ristretta, un approccio di tipo cinematico, nell'ambito dei Continui omogenei. Si tratta di utilizzare le *formule generali* di trasformazione della velocità angolare e di deformazione di un Continuo relativistico in un cambiamento di Riferimento galileiano ([1], p. 180); da queste, supponendo il Continuo omogeneo e rigido nel senso di BORN, si ricavano le espressioni della velocità angolare e di deformazione in termini di **v**, **a** e ω_0, rispettivamente *velocità*, *accelerazione del baricentro* e *velocità* *angolare propria* della microstruttura.

Comunque, lo spin è del tipo ([1], p. 188, [2]):

$$\omega = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right)\omega_0 + \psi \tag{1}$$

essendo

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2c^2}\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\omega_0 \cdot \mathbf{v}\,\mathbf{v} - \eta^2 \mathbf{v} \times \mathbf{a}\right), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,; \tag{2}$$

con il risultato che il moto dell'elettrone, nell'ambito di un qualunque Riferimento galileiano, diviene una precessione dipendente, in generale da $\mathbf{v}$ ed $\mathbf{a}$ oltre che da ω_0.

In prima approssimazione, ψ risulta indipendente da ω_0:

$$\omega \sim \omega_0 + \psi\,, \qquad \psi = -\frac{1}{2c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{a}\,,$$

e si ritrova così l'ordinaria precessione di Thomas [3], unitamente ad un *effetto relativistico di deformazione* dello stesso ordine ($1/c^2$).

Un secondo schema per l'elettrone a compasso, (ce ne occuperemo in dettaglio nei nn. 2 e 3), si ottiene considerando: a) la linea oraria l^+ del baricentro della particella e b) un *triedro ortogonale* $\mathcal{T}$, normale alla linea l^+, trasportato lungo la curva l^+ con la legge di Fermi-Walker [4]. Si tratta di uno *schema diretto* valido, come il precedente, sia in ambito minkowskiano che in Relatività generale, ma *senza deformazione*; naturalmente il triedro $\mathcal{T}$ è definito a meno di una inessenziale rotazione spaziale costante.

Uno schema siffatto, se esaminato in Relatività ristretta, evidenzia ancora il fenomeno della precessione di Thomas [2]; nell'ambito della Relatività generale porta alla precessione di Fokker [6], più generale in quanto più generale è il Riferimento che si adotta.

Allo schema detto, di *tipo cinematico*, fanno riscontro gli *schemi dinamici*, i quali comprendono le equazioni di evoluzione. Di questo tipo è lo schema in cui la particella con spin è caratterizzata da una opportuna *funzione hamiltoniana* $H(x/P/\tau)$ delle variabili canoniche x^α e P_α ($\alpha = 1, 2, 3$) e del tempo proprio τ. Tale funzione, che diviene la chiave di volta di tutto il problema, fornisce, attraverso il sistema canonico associato, la linea oraria l^+ della particella e l'andamento del 4-impulso P_α lungo la traiettoria.

Si tratta di una generalizzazione del *caso intrinsecamente conservativo* ([1], p. 89, [7]) in cui H è indipendente dal tempo proprio τ e separata; sicché $\mathbf{P}$ è tangente alla linea oraria l^+.

Più in generale, per particelle descritte da una funzione hamiltoniana $H(x/P/\tau)$ che non sia separabile, né dipendente da τ, il sistema hamiltoniano associato caratterizza, a partire dalle condizioni iniziali E_0 e $\mathbf{P}_0$ un *raggio* (linea oraria l^+) e un *fronte d'onda elementare* non necessariamente ortogonale a l^+.

Un secondo schema dinamico, per particelle di prova a più multipoli in Relatività generale, si ricava in [8] per approssimazioni successive, con il metodo dei momenti, a partire dalle equazioni di conservazione della materia, descritta da un tensore energetico arbitrario.

2 – Elettrone a compasso e trasporto Fermi-Walker – Caso di Minkowski

Come abbiamo già detto, un elettrone con asse può essere formalizzato con uno schema diretto, costituito dalla linea oraria l^+ del baricentro e dal trasporto Fermi-Walker di un triedro $\mathcal{T} = \{\mathbf{T}_i\}$, perpendicolare alla linea l^+ e, come tale, di tipo spaziale.

È possibile ritrovare la precessione di Thomas [2], esaminando tale schema nell'ambito di un fissato Riferimento R, e deducendo l'espressione della *velocità angolare ω del triedro $\mathcal{T}$ rispetto a R.* Ma come è definita ω?

La definizione più naturale si ottiene tramite la nozione fondamentale di *ribaltamento isometrico locale*, relativo ad una coppia di Riferimenti ([1], p. 72).

Più precisamente, consideriamo innanzitutto uno Spazio-tempo minkowskiano e fissiamo quivi un Riferimento galileiano R.

Siano: γ il versore dell'asse temporale del Riferimento e Σ la piattaforma spaziale normale a γ: $\mathbf{T}$ il versore tangente ad l^+ nel suo generico punto E di ascissa s e Σ_0 la piattaforma normale a $\mathbf{T}$ in E.

La velocità angolare ω del triedro $\mathcal{T}$ rispetto ad R si può definire pensando all'evoluzione (in Σ) del triedro $\hat{\mathcal{T}}$, ottenuto da $\mathcal{T}$ per ribaltamento isometrico di Σ_0 su Σ; si tratta pertanto di ricavare $\hat{\mathcal{T}}$. Vale il legame [9], [10]:

$$\widehat{\mathbf{T}}_i = \mathbf{T}_i - \varepsilon_i\left(\frac{\eta}{1+\eta}\mathbf{v} + c\gamma\right), \qquad \varepsilon_i \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{c}\mathbf{T}_i \cdot \gamma \tag{3}$$

essendo $\mathbf{v}$ la *velocità relativa* della particella:

$$c\mathbf{T} = \eta(\mathbf{v} + c\gamma)\,; \tag{4}$$

di qui eliminando $\mathbf{v}$ mediante la (4):

$$\widehat{\mathbf{T}}_i = \mathbf{T}_i - \frac{\varepsilon_i c}{1+\eta}(\mathbf{T} + \gamma)\,, \qquad \eta = -\mathbf{T}\cdot\gamma\,. \tag{5}$$

Possiamo ora introdurre lo *spin relativo*, ossia la velocità angolare del triedro $\{\mathbf{T}_i\}$ rispetto al Riferimento fissato R, attraverso il triedro ribaltato $\{\widehat{\mathbf{T}}_i\}$ su Σ:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathbf{T}}_i \times \frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{dt}\,; \tag{6}$$

in termini di ascissa curvilinea, vale il legame minkowskiano

$$ds = \frac{c}{\eta}dt \tag{7}$$

e la (6) diviene:

$$\frac{1}{c}\eta\omega = \frac{1}{2}\widehat{\mathbf{T}}_i \times \frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{ds}\,. \tag{8}$$

Pertanto, tutto si riduce al calcolo delle derivate a 2° membro della (8), tenuto conto della (5) e della legge di trasporto Fermi-Walker:

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{ds} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T}\,, \tag{9}$$

essendo $\mathbf{C} = \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}$ il *vettore di curvatura* della linea l^+.

Innanzitutto si ha, conformemente alla $(3)_2$:

$$\frac{d\varepsilon_i}{ds} = \frac{\eta}{c}\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C} \tag{10}$$

e pertanto, derivando la (5):

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}i}{ds} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C}\,\mathbf{T} - \frac{c}{1+\eta}(\mathbf{T}+\gamma)\left[\frac{\eta}{c}\,\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C} - \frac{\varepsilon_i \mathbf{C}\cdot\gamma}{1+\eta}\right] - \frac{c\varepsilon_i \mathbf{C}}{1+\eta}\,,$$

ovvero

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{ds} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C}\left[\mathbf{T} - \frac{\eta}{1+\eta}(\mathbf{T}+\gamma)\right] - \frac{c\varepsilon_i}{1+\eta}\left[\mathbf{C} + \frac{\mathbf{C}\cdot\gamma}{1+\eta}(\mathbf{T}+\gamma)\right]; \tag{11}$$

di qui, introducendo il *ribaltato* di $\mathbf{C}$ su Σ:

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \frac{1}{1+\eta}\mathbf{C}\cdot\gamma(\mathbf{T}+\gamma)\,, \tag{12}$$

la seguente espressione dei derivati di $\widehat{\mathbf{T}}_i$:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{ds} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C}\left[\mathbf{T} - \frac{\eta}{1+\eta}(\mathbf{T}+\gamma)\right] - \frac{c\varepsilon_i}{1+\eta}\widehat{\mathbf{C}}\,. \tag{13}$$

La (13) si semplifica ulteriormente se si considera il legame (4); si ha infatti

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{ds} = \mathbf{T}_i \cdot \mathbf{C}\frac{\eta\mathbf{v}}{c(1+\eta)} - \frac{c\varepsilon_i}{1+\eta}\widehat{\mathbf{C}}\,. \tag{14}$$

D'altra parte, per quanto riguarda ε_i, risulta, in virtù delle (4) e (5):

$$-c\varepsilon_i = \mathbf{T}_i \cdot \gamma = -\frac{1}{c}\,\mathbf{T}_i \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{c}\,\widehat{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{v} - \frac{\varepsilon_i}{1+\eta}\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}\,,$$

ovvero

$$\varepsilon_i\left(1 - \frac{1}{c}\frac{\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}}{1+\eta}\right) = \frac{1}{c^2}\,\widehat{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{v}$$

e quindi per la (4):

$$\varepsilon_i = \frac{1}{c^2}\eta\,\widehat{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{v}\,. \tag{15}$$

Di qui l'espressione finale dei derivati cercati:

$$\frac{d\widehat{\mathbf{T}}_i}{ds} = \frac{\eta}{c(1+\eta)}(\widehat{\mathbf{T}}_i \cdot \widehat{\mathbf{C}}\,\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{T}}_i \cdot \mathbf{v}\widehat{\mathbf{C}})\,, \tag{16}$$

ove si è tenuto conto che il ribaltamento conserva il prodotto scalare.

La (16) dà luogo direttamente alla seguente espressione della velocità angolare relativa (8):

$$\omega = \frac{1}{1+\eta}\widehat{\mathbf{C}} \times \mathbf{v}\,, \tag{17}$$

sia pure in termini misti, in quanto mette in relazione grandezze assolute e relative. D'altra parte, il prodotto $c^2\mathbf{C}$ coincide con la *4-accelerazione* della particella e vale il legame ([1], p. 54):

$$c^2\mathbf{C} = \eta^2\left[\mathbf{a} + \frac{\eta^2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{v}+c\gamma)\right]. \tag{18}$$

Ora, eliminando $\mathbf{T}$ nell'espressione di $\widehat{\mathbf{C}}$ tramite la (4), si ottiene:

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{C}\cdot\gamma\left(\frac{1}{c}\frac{\eta\mathbf{v}}{1+\eta} + \gamma\right),$$

e pertanto la (18) diviene

$$c^2\widehat{\mathbf{C}} = \eta^2\left[\mathbf{a} + \frac{\eta^2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{v}+c\gamma)\right] - \frac{\eta^4}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\left(\frac{1}{c}\frac{\eta\mathbf{v}}{1+\eta} + \gamma\right),$$

ovvero

$$c^2\widehat{\mathbf{C}} = \eta^2\left[\mathbf{a} + \frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{1+\eta}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\mathbf{v}\right]; \tag{19}$$

di qui l'espressione definitiva di ω:

$$\omega = \frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{1+\eta}\mathbf{a}\times\mathbf{v}\,. \tag{20}$$

Si tratta di una *espressione esatta*; al 1° ordine si ritrova naturalmente la precessione di Thomas.

La (20) mette bene in evidenza che, nel Riferimento di moto incipiente, ove $v = 0$, la velocità angolare del triedro $\{\mathbf{T}_i\}$ è necessariamente nulla; pertanto, lo *schema considerato non è compatibile con la presenza di spin proprio*: $\omega_0 = 0$.

3 – Il caso della Relatività generale

Nel numero precedente è stato esaminato lo schema diretto per l'elettrone a compasso, nell'ambito dello spazio-tempo di Minkowski. Un approccio analogo, ancora di tipo relativo, può essere sviluppato anche in Relatività generale, ove l'ambiente non è più lo spazio piatto minkowskiano ma una Varietà riemanniana (spazio-tempo curvo).

Al tempo stesso, il Riferimento galileiano deve essere sostituito da una *congruenza temporale* Γ, ovvero da un campo di vettori γ unitari, non più costante (Riferimento fluido).

Al tempo stesso, ai fini di determinare l'espressione della velocità angolare relativa, è necessario sostituire nella (6), al tempo pantopico t del Riferimento galileiano R, il *tempo relativo standard* T di Cattaneo, definito sulla linea oraria l^+; quindi si ha:

$$\omega = \frac{1}{2}\,\widehat{\mathbf{T}}_i \times \frac{\overset{\perp}{d}\widehat{\mathbf{T}}_i}{dT}\,, \tag{21}$$

essendo $\overset{\perp}{d}$ la *derivata vincolata* di Cattaneo [13].

Ciò premesso, in vista di calcolare, come già in precedenza, le derivate a 2° membro della (21), riprendiamo la (5).

Indicando con un punto la derivazione rispetto a T, si ha ancora il legame

$$\dot{s} = \frac{c}{\eta}\,; \tag{22}$$

inoltre, stante la variabilità di γ lungo l^+, si deve intendere [11]:

$$\dot{\gamma} = c\underline{\mathbf{C}} + v^i \widetilde{H}_{ik}\tilde{\mathbf{e}}^k\,, \quad \widetilde{H}_{ik} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{K}_{ik} + \widetilde{\Omega}_{ik}\,, \tag{23}$$

ove $\underline{\mathbf{C}}$ indica il *vettore di curvatura* del Riferimento e $\widetilde{H}_{ik}$ riassume la sua *velocità angolare* e di *deformazione*.

In pari tempo si ha

$$\frac{d\varepsilon_i}{ds} = \frac{\eta}{c}\left(\mathbf{T}\cdot\mathbf{C} - \frac{1}{c}\mathbf{T}_i\cdot\dot{\gamma}\right), \quad \frac{d\eta}{ds} = -\mathbf{C}\cdot\gamma - \frac{\eta}{c}\mathbf{T}\cdot\dot{\gamma}\,. \tag{24}$$

Pertanto, la (16) si modifica per l'aggiunta di tre gruppi di termini, pari a

$$\mathbf{W}_i = \frac{\eta}{c}\frac{\mathbf{T}+\gamma}{1+\eta}\left(\mathbf{T}_i - \frac{c\varepsilon_i}{1+\eta}\mathbf{T}\right)\cdot\dot{\gamma} - \frac{\eta}{1+\eta}\varepsilon_i\dot{\gamma}$$

ovvero, tenuto conto che γ e $\dot{\gamma}$ sono perpendicolari:

$$\mathbf{W}_i = \frac{\eta}{c}\frac{1}{1+\eta}\widehat{\mathbf{T}}_i\cdot\dot{\gamma}(\mathbf{T}+\gamma) - \frac{\eta}{1+\eta}\varepsilon_i\dot{\gamma}\,. \tag{25}$$

D'altra parte $\mathbf{T}+\gamma$ si decompone al seguente modo:

$$\mathbf{T}+\gamma = \frac{\eta\mathbf{v}}{c} + (1+\eta)\gamma\,, \tag{26}$$

e inoltre ε_i è del tipo (15); sicché, prescindendo dal componente secondo γ[1], $\mathbf{W}_i$ dà alla velocità angolare (8) un contributo pari a

$$\frac{c}{2\eta}\widehat{\mathbf{T}}_i\times\mathbf{W}_i = \frac{1}{2c}\frac{\eta}{1+\eta}[\dot{\gamma}\times\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{T}}_i\times(\widehat{\mathbf{T}}^i\cdot\mathbf{v})\dot{\gamma}] = \frac{1}{c}\frac{\eta}{1+\eta}\dot{\gamma}\times\mathbf{v}\,.$$

In definitiva, nel caso di uno spazio-tempo curvo, lo spin ω è dato dalla somma

$$\omega = \frac{1}{1+\eta}\widehat{\mathbf{C}}\times\mathbf{v} + \frac{1}{c}\frac{\eta}{1+\eta}\dot{\gamma}\times\mathbf{v}\,, \tag{27}$$

ove $\dot{\gamma}$, a norma della (23), contiene le caratteristiche del Riferimento scelto (*curvatura, velocità angolare e di deformazioni proprie*).

Se la linea oraria della particella è geodetica: $C = 0 \to \widehat{C} = 0$, il 1° termine della (27) si annulla e ω si riduce alla *precessione di Fokker* [6];

(1) La derivata vincolata coincide, per i vettori spaziali, con la *parte spaziale* della derivata [9].

invece, nel *caso generale*, il vettore $\widehat{\mathbf{C}} \neq 0$ si può tradurre, come già in uno Spazio-tempo piatto, in termini di accelerazione.

Più precisamente, la (15) diviene [10]

$$c^2\mathbf{C} = \eta^2\Big[\mathbf{a} + \frac{\eta^2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}(\mathbf{v}+c\gamma) + \mathbf{v}\cdot\dot{\gamma}\gamma + c\dot{\gamma}\Big] \tag{28}$$

e il vettore $\widehat{\mathbf{C}}$ di cui alla (12):

$$\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{C}\cdot\gamma\Big(\frac{1}{c}\frac{\eta}{1+\eta}\mathbf{v} + \gamma\Big)\,,$$

assume la forma

$$\widehat{\mathbf{C}} = \frac{\eta^2}{c^2}\Big(\mathbf{a} + \frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{1+\eta}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\mathbf{v} + c\dot{\gamma}\Big)\,. \tag{29}$$

Pertanto, il 1° termine della (27) si modifica, rispetto al caso piatto, per l'aggiunta del prodotto:

$$\frac{1}{c}\frac{\eta^2}{1+\eta}\dot{\gamma}\times\mathbf{v}\,,$$

e si ottiene la *formula generale*:

$$\omega = \frac{1}{c^2}\frac{\eta^2}{1+\eta}\mathbf{a}\times\mathbf{v} + \frac{1}{c}\eta\dot{\gamma}\times\mathbf{v}\,, \tag{30}$$

fermo restando l'espressione di $\dot{\gamma}$ come dalla (23).

Si noti che il termine aggiuntivo nella (30) ha un significato fisico preciso, nel senso che si tratta di un effetto di gravitazione, dovuto alla curvatura dello spazio-tempo; infatti, esso è legato al prodotto $-c\dot{\gamma}$, il quale si può legittimamente interpretare come *campo gravitazionale relativo* ([9], cap. V).

Infine, va sottolineato che la formula stabilita da MASSA-ZORDAN [12] contiene, rispetto alla (30), un ulteriore *termine aggiuntivo*, corrispondente ad una *pseudo velocità angolare intrinseca* del Riferimento, non del tutto comprensibile; invero esso darebbe luogo, nel Riferimento locale di quiete ($v = 0$), ad uno spin proprio che non ha ragione di essere.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Ferrarese: *Lezioni di Meccanica relativistica*, Pitagora Editrice, Bologna (1980).

[2] G. Ferrarese – L. Stazi – C. Cattani – D. Bini: *Kinematics of Relativistic Deformation and Thomas Precession*, Il Nuovo Cimento, 105 B., **10** (1990), 1131-40.

[3] L.W. Thomas: *On the kinematics of an Electron with an Axis*, Phil. Mag., **7**, 3 (1927), 1-22.

[4] E. Fermi: *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, Atti R. Accad. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Nat., **31** (1922), 21-51.

[5] A.G. Walker: *Relative coordinates*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **52** (1932), 345.

[6] A.D. Fokker: Proc. Royal Acad. Amsterdam, **23** (1920), 729.

[7] L. Stazi: *Sulla meccanica relativistica delle particelle con struttua scalare*, Atti Acc. Lincei, **80** (1986), 196-204.

[8] A. Papapetrou: *Spinning test-particles in General Relativity*, Proc. Roy. Soc. London, A **209** (1951), 249.

[9] G. Ferrarese: *Lezioni di Relatività generale*, Pitagora Editrice, Bologna (1994).

[10] S. Benenti: *Teorema dei moti relativi e di Coriolis in Relatività generale*, Rendic. Semin. Matem. di Torino, **28** (1968-69), 115-113.

[11] C. Cattaneo: *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Veschi, Roma, (1960).

[12] E. Massa – C. Zordan: *Relative Kinematics in General Relativity: the Thomas and Fokker precessions*, Meccanica, (Vol. X) (1975), 27-30.

[13] C. Cattaneo: *Sur la loi relative du mouvement d'une particule d'epreuve gravitant librement*, C. R. Acad. Sc., **256**, 3974-3977.

Lavoro pervenuto alla redazione il 12 gennaio 1993
ed accettato per la pubblicazione il 10 novembre 1993

Indirizzo dell'Autore:

Manuela Ricci - Via Ignazio Giorgi, 29 - 00162 Roma - Italy