Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 13, Roma (1993), 397-414

Esistenza, unicità e stabilità asintotica per un sistema iperbolico con condizioni al contorno ereditarie

M. FABRIZIO – E. SANTI

In memoria di Aldo Ghizzetti

RIASSUNTO: *Si studia il problema differenziale costituito dalle equazioni lineari di Maxwell con una condizione al contorno con memoria e dissipativa. Per tale problema si stabilisce un teorema di unicità, esistenza e stabilità asintotica.*

ABSTRACT: *We here discuss the differential problem for the Maxwell linear equations with dissipative boundary conditions with fading memory. For this problem we give an existence, uniqueness and asymptotic stability theorem.*

– Introduzione

In elettromagnetismo un contorno di un dominio Ω costituito da un buon conduttore, che però non sia perfetto[(1)], è descritto per campi

---

KEY WORDS AND PHRASES: *Boundary conditions – Hyperbolic equations – Fading memory*
A.M.S. CLASSIFICATION: 35L50 – 78A25
Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G.N.F.M. del C.N.R. e dei progetti 40% e 60% del M.U.R.S.T..

[(1)] È noto che quando la frontiera è costituita da un conduttore perfetto la condizione al contorno si esprime mediante la relazione: $E \times n = 0$ su $\partial\Omega$.

armonici di frequenza ω dalla relazione, che chiameremo condizione di Graffi [1]:

$$E_\tau(\omega) = \lambda_1(\omega) H_\tau(\omega) \times n \tag{1}$$

dove E_τ, H_τ rappresentano la componente tangenziale del campo elettrico E e del campo magnetico H, mentre $\lambda_1(\omega)$ è un opportuno coefficiente caratteristico del materiale che realizza la frontiera di cui n è la normale esterna.

In [2] è stata proposta una generalizzazione dell'equazione (1), che si avvale di una relazione con memoria del tipo:

$$E_\tau(x,t) = \lambda_0(x) H_\tau(x,t) \times n(x) + \int_0^{+\infty} \lambda(x,s) H_\tau(x,t-s) \times n(x)\, ds \tag{1$'$}$$

in grado di descrivere il comportamento del campo elettromagnetico sulla frontiera nel caso di campi arbitrari.

In questo lavoro, per il sistema differenziale costituito dalle equazioni lineari di Maxwell, connesso con una condizione al contorno del tipo (1′), proveremo sotto la sola ipotesi che λ_0 sia positiva, un teorema di esistenza e unicità su $\Omega\times]0,T[$, con T arbitrario ma finito. Lo studio del medesimo problema nel dominio $\Omega\times]0,\infty[$ comporta la necessità di imporre che la funzione $\lambda(x,s)$ verifichi una opportuna condizione che assicuri la dissipatività locale della frontiera ed allora il sistema differenziale costituito dalle equazioni di Maxwell e dalla relazione (1′) ammette una ed una sola soluzione debole. Inoltre quando le sorgenti del campo elettromagnetico soddisfano una condizione di decadimento per $t \to \infty$, allora si perviene ad un teorema di stabilità asintotica anche quando il dominio Ω è costituito da un materiale che non presenta dissipazione.

1 – Posizione del problema e ipotesi costitutive

L'evoluzione di un sistema elettromagnetico all'interno di un dominio connesso $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ è descritto, nell'insieme spazio-temporale $Q = \Omega\times]0,T[$, dalle equazioni di Maxwell:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times H - J\,, \qquad \nabla \cdot D = \rho \tag{2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E\,, \qquad \nabla \cdot B = 0 \tag{3}$$

ove i vettori E, H, D, B, J rappresentano rispettivamente il *campo elettrico*, il *campo magnetico*, lo *spostamento elettrico*, l'*induzione magnetica*, la *corrente elettrica* e la funzione scalare ρ indica la *densità elettrica*.

Supporremo il materiale perfettamente dielettrico e quindi descritto dalle equazioni costitutive:

$$D(x,t) = \varepsilon\, E(x,t) \tag{4}$$

$$B(x,t) = \mu\, H(x,t) \tag{5}$$

dove ε, μ sono tensori costanti del secondo ordine, chiamati *costante dielettrica* e *permeabilità magnetica*, che supporremo simmetrici, come richiesto dai principi della termodinamica [3]. Infine osserviamo che il vettore corrente elettrica J in generale risulta dalla composizione di due termini

$$J(x,t) = J_c(x,t) + J_i(x,t)$$

cioè di un termine costitutivo J_c dovuto alla conducibilità del mezzo, che supporremo nullo trattandosi di un dielettrico, e di un termine J_i dovuto a correnti impresse dall'esterno e quindi noto nell'insieme $Q = \Omega \times]0, T[$. Supporremo infine che sia $\rho = 0$ da cui si trae, in base alle equazioni (2), $\nabla \cdot J = 0$.

Il contorno del dominio Ω, che supporremo regolare e semplicemente connesso, è costituito da un buon conduttore(2) per cui seguendo [1] supporremo che su $\partial\Omega$ sia verificata la relazione

$$E_\tau(x,t) = \lambda_0(x) H_\tau(x,t) \times n(x) + \int_0^{+\infty} \lambda(x,s) H_\tau(x,t-s) \times n(x)\, ds \tag{6}$$

(2)Per *buon conduttore* intendiamo un mezzo che presenta una conducibilità elettrica elevata ma non infinita.

dove $\lambda(x,\cdot):[0,+\infty[\to \mathbf{R}$ è una funzione continua e sommabile su $[0,+\infty[$ ed inoltre λ_0 e λ sono supposte continue rispetto alla x in $\overline{\Omega}$ e tali che:

$$\lambda_0(x) = -\int_0^{+\infty} \lambda(x,s)ds\,. \tag{7}$$

Si noti che allorché si scelgano campi armonici di frequenza ω l'equazione costitutiva (6) si riduce alla relazione

$$E_\tau(x,t) = \lambda_1(x,i\omega)H_\tau(x,\omega)\times n(x) \tag{8}$$

dove

$$\lambda_1(x,i\omega) = \lambda_0(x) + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-i\omega s}\lambda(x,s)\,ds\,. \tag{8'}$$

Pertanto il problema in esame viene descritto dal sistema di equazioni

$$\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} = \nabla\times H - J_i \tag{9}$$

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla\times E \tag{10}$$

insieme con le condizioni iniziali ed al contorno:

$$E(x,0) = E_0(x)\,,\quad H(x,0) = H_0(x)\,,\quad x\in\Omega \tag{11}$$

$$\begin{aligned} E_\tau(x,t) &= \lambda_0(x)H_\tau(x,t)\times n(x) + \\ &+ \int_0^t \lambda(x,s)H_\tau(x,t-s)\times n(x)ds + f(x,t)\,,\quad x\in\partial\Omega \end{aligned} \tag{12}$$

dove $f:\partial\Omega\times[0,+\infty[\to\mathbf{R}^3$ è una funzione nota e tale che $f\in L^2(0,+\infty;$ $L^2(\partial\Omega))$.

Confrontando (7) e (12) si può provare che f è legata alla storia relativa all'istante $t = 0$ del campo H sulla frontiera $\partial\Omega$ dalla relazione:

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &:= \int_t^{+\infty} \lambda(x,s) H_\tau(x,t-s) \times n(x) ds = \\
&= \int_{-\infty}^0 \lambda(x,t-r) H_\tau(x,r) \times n(x) dr \,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Inoltre supporremo $\lambda \in L^1\big(0,+\infty; L^\infty(\Omega)\big)$; pertanto esistono le trasformate di Fourier coseno e seno di λ definite da

$$
\begin{aligned}
\lambda_c(x,\omega) &= \int_0^{+\infty} \lambda(x,s) \cos(\omega s) ds \\
\lambda_s(x,\omega) &= \int_0^{+\infty} \lambda(x,s) \sin(\omega s) ds \,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Supporremo quindi che la frontiera $\partial\Omega$ sia dissipativa; in altre parole la frontiera è tale che le onde elettromagnetiche vengono in parte assorbite e in parte riflesse. Ciò comporta che i coefficienti λ_0 e λ verificano la disuguaglianza (Cfr. [1]):

$$
\lambda_0(x) + \lambda_c(x,\omega) > 0 \,, \quad \omega > 0 \,, \quad x \in \partial\Omega \,. \tag{15}
$$

Infine i coefficienti $\varepsilon, \mu, \lambda_0$ sono supposti limitati, simmetrici e strettamente positivi; esistono cioè delle costanti positive δ_1, δ_2, δ_3 tali che per tutti gli $h \in \mathbf{R}^3$ si ha

$$
\langle \varepsilon(x)h, h \rangle \geq \delta_1 h^2 \,, \quad \langle \mu(x)h, h \rangle \geq \delta_2 h^2 \,, \quad \lambda_0(x) \geq \delta_3 \quad \forall x \in \overline{\Omega} \,. \tag{16}
$$

2 – Esistenza ed unicità

Per una corretta formulazione del problema da noi studiato definiamo preliminarmente gli spazi funzionali

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\Omega) = \left\{ E \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3); \quad \int_\Omega E \cdot \nabla\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R}) \right\}, \\
&\mathcal{R}(\Omega) = \{E, H \in \mathcal{D}(\Omega); \quad \nabla \times E \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \nabla \times H \in \mathcal{D}(\Omega)\} \\
&\mathcal{H}_f(Q) = \Big\{ E, H \in L^2(0, T; \mathcal{R}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \, ; \\
&\qquad E_\tau(t) = \lambda_0 H_\tau(t) \times n + \int_0^t \lambda(s) H_\tau^1(s) \times n ds + f(t) \quad \text{su} \quad \partial\Omega \, , \\
&\qquad \text{dove} \quad f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega; \mathbb{R}^3)) \Big\} \\
&\mathcal{H}_0(Q) = \{(E, H) \in \mathcal{H}_f(Q), \quad \text{con} \quad f = 0\} \, .
\end{aligned}
$$

Seguendo Wilcox [4] formuliamo la seguente:

Definizione 1. *Una coppia $E, H \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\Omega))$, dove $T \in]0, \infty[$, è detta soluzione debole del problema (9)-(12) con sorgenti $J_i \in L^2(0, T; \mathcal{D}(\Omega))$, $f \in L^2(0, T; H^{1/2}(\partial\Omega))$ e dati iniziali E_0, H_0 tali che E_0, $H_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, se verifica la relazione:*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \{E \cdot \nabla \times h - \mu H \cdot h + H \cdot \nabla \times e + \varepsilon E \cdot \dot{e} - J_i \cdot e\} dx \, dt + \\
&\quad + \int_\Omega (\varepsilon E_0 \cdot e - \mu H_0 \cdot h_0) dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} h \times f \cdot n d\sigma \, dt = 0
\end{aligned} \tag{17}
$$

per ogni coppia $(e, h) \in \mathcal{H}_0(Q)$, tale che $e(T) = h(T) = 0$.

Consideriamo ora il problema differenziale che si ottiene da (9), (10), (11), (12) operando la trasformata di Laplace rispetto al tempo[(3)]:

$$(18)_1 \qquad \varepsilon\big(p\widehat{E}(x,p) - E_0(x)\big) = \nabla \times \widehat{E}(x,p) - \widehat{J}(x,p)\,,\ x \in \Omega$$

$$(18)_2 \qquad \mu\big(p\widehat{E}(x,p) - H_0(x)\big) = -\nabla \times \widehat{E}(x,p)\,, \quad x \in \Omega$$

$$(18)_3 \qquad \widehat{E}_\tau(x,p) = \lambda_1(x,p)\widehat{E}_\tau(x,p) \times n(x) + \hat{f}(x,p)\,,\ x \in \partial\Omega\,.$$

Accanto agli spazi definiti in precedenza consideriamo gli insiemi $\mathcal{D}^*(\Omega)$, $\mathcal{R}^*(\Omega)$ costituiti da funzioni a valori complessi le cui parti reale ed immaginaria appartengono rispettivamente a $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{R}(\Omega)$, quindi introduciamo i nuovi spazi funzionali:

$$\widehat{\mathcal{R}}_{\hat{f}}(\Omega) = \big\{(\widehat{E},\widehat{H}) \in \mathcal{R}^*(\Omega); \quad \widehat{E}_\tau = \lambda_1\widehat{H}_\tau \times n + \hat{f}, \quad \hat{f} \in H^{1/2}(\partial\Omega; C^3)\big\},$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_0(\Omega) = \big\{(\widehat{E},\widehat{H}) \in \mathcal{R}^*(\Omega); \quad \widehat{E}_\tau = \lambda_1\widehat{H}_\tau \times n\big\}\,.$$

È opportuno osservare che lo spazio $\widehat{R}_0(\Omega)$ risulta di Hilbert rispetto alla norma $\|.\|$ definita, se $\hat{u} = (\widehat{E},\widehat{H})$, da:

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (\varepsilon|\widehat{E}|^2 + \mu|\widehat{H}|^2 + |\nabla\times\widehat{E}|^2 + |\nabla\times\widehat{H}|^2)dx + \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega} \lambda_1^{-1}|\widehat{E}_\tau|^2 d\sigma\right).$$

Il sistema (18) si esprime in forma debole nel modo seguente:

Definizione 2. *Una funzione* $\hat{u} = (\widehat{E},\widehat{H}) \in \mathcal{D}^*(\Omega) \times \mathcal{D}^*(\Omega)$ *è detta una soluzione debole del problema differenziale e al contorno* (18)

[(3)]Ricordiamo che la trasformata di Laplace di una funzione $g : [0,+\infty[\to \mathbf{R}^n$ è definita da

$$\hat{g}(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} g(t)dt\,, \quad p = u + iv \in \mathbf{C}$$

a patto che esista l'integrale a secondo membro.

con dati $\widehat{J}_i \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $\hat{f} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ *se verifica la relazione integrale, per ogni* $(\hat{e}, \hat{h}) \in \widehat{\mathcal{R}}_0(\Omega)$*:*

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \{\widehat{E} \cdot \nabla \times \hat{h} + p\mu\widehat{H} \cdot \hat{h} + \widehat{H} \cdot \nabla \times \hat{e} - p\varepsilon\widehat{E} \cdot \hat{e} + \\
&- (\widehat{J}_i - \varepsilon E_0) \cdot \hat{e} - \mu H_0 \cdot \hat{h}\} dx = \int_{\partial\Omega} \hat{f}(p) \times \hat{h} \cdot n \, d\sigma \, .
\end{aligned}
\tag{19}
$$

PROPOSIZIONE 1. *Segue dalla Definizione 2 che ogni soluzione debole* $(\widehat{E}, \widehat{H}) \in \mathcal{D}^*(\Omega) \times \mathcal{D}^*(\Omega)$ *risulta anche tale che* $(\widehat{E}, \widehat{H}) \in \mathcal{R}^*(\Omega) \times \mathcal{R}^*(\Omega)$*.*

DIM. Supponiamo che in (19) sia $\hat{h} = 0$, allora:

$$
\int_\Omega \widehat{H} \cdot \nabla \times \hat{e} \, dx = -\int_\Omega (p\varepsilon\widehat{E} + \widehat{J}_i - \varepsilon E_0) \cdot \hat{e} \, dx
$$

da cui risulta che $\nabla \times \widehat{H}$ esiste ed appartiene a $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Un analogo discorso vale per $\widehat{E}$.

Pertanto in seguito supporremo che ogni soluzione debole $(\widehat{E}, \widehat{H})$ appartenga all'insieme $\mathcal{R}^*(\Omega) \times \mathcal{R}^*(\Omega)$, per cui una tale soluzione verificherà il sistema (18) quasi dappertutto.

È ora possibile stabilire il seguente:

TEOREMA 1. *Per ogni* $p \in \mathbf{C}$ *con* $\mathrm{Re}(p) > 0$, *fissate* $\widehat{J}_i(p) \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $\hat{f}(p) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ *il problema* (18), *sotto le ipotesi* (15, (16), *ammette una ed una sola soluzione debole* $(\widehat{E}(p), \widehat{H}(p)) \in \mathcal{D}^*(\Omega) \times \mathcal{D}^*(\Omega)$ *secondo la Definizione 2. Vale inoltre la disuguaglianza:*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(p) \int_\Omega (\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p) \cdot \widehat{E}^*(x,p) + \mu(x)\widehat{H}(x,p) \cdot \widehat{H}^*(x,p)) dx + \\
&+ \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega} \lambda_1(x,p) \big|\widehat{H}_\tau(x,p) \times n(x)\big|^2 d\sigma \right) \leq \\
&\leq C(p) \Big(\big\|\widetilde{J}(p)\big\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{K}\|^2_{L^2(\Omega)} + \big\|\hat{f}(p)\big\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \Big)^{(4)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

(4) Nel seguito useremo le notazioni abbreviate $\big\|\widetilde{J}(p)\big\|$, $\|\widetilde{K}\|$, $\big\|\hat{f}(p)\big\|_{\partial\Omega}$ per indicare rispettivamente le norme: $\big\|\widetilde{J}(p)\big\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\widetilde{K}\|_{L^2(\Omega)}$, $\big\|\hat{f}(p)\big\|_{L^2(\partial\Omega)}$.

dove $\widehat{E}^*$, $\widehat{H}^*$ *indicano i complessi coniugati di* $\widehat{E}$, $\widehat{H}$, *la costante* $C(p)$ *è definita da*

$$C(p) = \sup\Big\{\big(\operatorname{Re}(p)\big)^{-1}\delta_1^{-1}, \quad \big(\operatorname{Re}(p)\big)^{-1}\delta_2^{-1}, \quad \sup_{x\in\Omega}\big(\lambda_1^{-1}(x,p)\big)\Big\}$$

e si è posto $\widetilde{J} := \widehat{J}_i - \varepsilon E_0$, $\widetilde{K} := \mu H_0$.

DIM. Supponiamo che sia $\hat{f}(\cdot,p) = 0$. Se $\operatorname{Re}(p) > 0$ allora, nell'ipotesi (16), il sistema ellittico (18) risulta coercivo in quanto l'operatore $A(p)$ definito su $\widehat{\mathcal{H}}_0(\Omega)$ come:

$$A(p)(u) = A(p)(\widehat{E},\widehat{H}) = (-\nabla\times\widehat{H} + p\varepsilon\widehat{E}, \quad \nabla\times\widehat{E} + p\mu\widehat{H})$$

è tale che

$$\langle A(p)u,u\rangle \geq \operatorname{Re}\left(\int_\Omega \Big(\varepsilon(x)p\big|\widehat{E}(x,p)\big|^2 + \mu(x)p\big|\widehat{H}(x,p)\big|^2\Big)dx\right) +$$

$$+\operatorname{Re}\left(\int_{\partial\Omega}\lambda_1^{-1}(x,p)\big|\widehat{E}_\tau(x,p)\big|^2 d\sigma\right).$$

Tenuto conto che il sistema (18) per $\hat{f} = 0$ equivale a

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\widehat{H} - p\varepsilon\widehat{E} = \widehat{J}_i - \varepsilon E_0\\
&\nabla\times\widehat{E} + p\mu\widehat{H} = \mu H_0\\
&\widehat{E}_\tau = \lambda_1\widehat{H}_\tau\times n\,, \quad x\in\partial\Omega
\end{aligned}\tag{21}$$

ne segue, se $\operatorname{Re}(p) > 0$, il sistema (21) ammette una ed una sola soluzione $(\widehat{E},\widehat{H}) \in \widehat{\mathcal{H}}_0(\Omega)$. Si estende immediatamente la stessa conclusione al caso $\hat{f}(\cdot,p) \neq 0$, dove ora $(\widehat{E},\widehat{H}) \in \widehat{\mathcal{H}}_{\hat{f}}(\Omega)$, con $\hat{f}(\cdot,p) \in H^{1/2}(\Omega)$.

Per provare la seconda affermazione del teorema, posto $\widetilde{J} = \widehat{J}_i - \varepsilon E_0$, $\widetilde{K} = \mu H_0$, consideriamo la forma bilineare

$$\begin{aligned}
I(\widehat{E},\widehat{H})(p) = &\int_\Omega \big(-\widetilde{J}^*(x,p)\cdot\widehat{E}(x,p) + \widetilde{K}(x)\cdot\widehat{H}^*(x,p)\big)dx +\\
&-\int_{\partial\Omega}\widehat{H}^*_\tau(x,p)\times\hat{f}(x,p)\cdot n(x)d\sigma\,.
\end{aligned}\tag{22}$$

Utilizzando le equazioni (21) si ha

$$\begin{aligned}
I(\widehat{E},\widehat{H})(p) = &\int_{\Omega} \Big\{ -\widehat{E}(x,p)\cdot\big[\nabla\times\widehat{H}(x,p) - p\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\big]^{*} + \\
&+\widehat{H}(x,p)\cdot\big[\nabla\times\widehat{E}(x,p) + \\
&+p\mu(x)\widehat{H}(x,p)\big]\Big\}dx - \int_{\partial\Omega}\widehat{H}^{*}_{\tau}(x,p)\times\hat{f}(x,p)\cdot n(x)d\sigma = \\
= &\int_{\Omega}\big(p^{*}\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^{*}(x,p) + p\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^{*}(x,p)\big)dx + \\
&+\int_{\partial\Omega}\widehat{H}^{*}_{\tau}(x,p)\times\big(\widehat{E}_{\tau}(x,p)-\hat{f}(x,p)\big)\cdot n(x)d\sigma = \\
= &\int_{\Omega}\big(p^{*}\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^{*}(x,p) + p\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^{*}(x,p)\big)dx + \\
&+\int_{\partial\Omega}\lambda_1(x,p)\big|\widehat{H}_{\tau}(x,p)\times n(x)\big|^{2}d\sigma\,.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\big|I(\widehat{E},\widehat{H})(p)\big| \geq \mathrm{Re}(p)&\int_{\Omega}\big(\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^{*}(x,p) + \\
&+\mu(x)\widehat{H}(x,p)\widehat{H}^{*}(x,p)\big)dx + \mathrm{Re}\Bigg(\int_{\partial\Omega}\lambda_1(x,p)\big|\widehat{H}_{\tau}(x,p)\times n(x)\big|^{2}d\sigma\Bigg).
\end{aligned}\tag{23}$$

Inoltre da (22) si trae

$$\begin{aligned}
\big|I(\widehat{E},\widehat{H})(p)\big| \leq \|\widetilde{J}(p)\|&\Bigg(\delta_1^{-1}\int_{\Omega}\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^{*}(x,p)dx\Bigg)^{1/2} + \\
&+\|\widetilde{K}\|\Bigg(\delta_2^{-1}\int_{\Omega}\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^{*}(x,p)dx\Bigg)^{1/2} + \\
+\|\hat{f}(p)\|&\Bigg(\sup_{x\in\Omega}\mathrm{Re}\left(\lambda_1^{-1}(x,p)\right)\int_{\partial\Omega}\mathrm{Re}\left(\lambda_1(x,p)\right)\big|\widehat{H}_{\tau}(x,p)\times n(x)\big|^{2}d\sigma\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}\tag{24}$$

Confrontando (23) e (24) otteniamo

$$\mathrm{Re}(p)\int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^*(x,p)+\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^*(x,p)\right)dx+$$

$$+\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\lambda_1(x,p)\big|\widehat{H_\tau}(x,p)\times n(x)\big|^2 d\sigma\right)\le$$

$$\le\|\widetilde{J}(p)\|\left(\delta_1^{-1}\int\limits_{\Omega}\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^*(x,p)dx\right)^{1/2}+ \tag{25}$$

$$+\,\|\widetilde{K}\|\left(\delta_2^{-1}\int\limits_{\Omega}\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^*(x,p)dx\right)^{1/2}+$$

$$+\,\|\hat{f}(p)\|\left(\sup_{x\in\Omega}\mathrm{Re}\big(\lambda_1^{-1}(x,p)\big)\int\limits_{\partial\Omega}\mathrm{Re}\big(\lambda_1(x,p)\big)\big|\widehat{H_\tau}(x,p)\times n(x)\big|^2 d\sigma\right)^{1/2}$$

e di qui infine abbiamo la disuguaglianza

$$\mathrm{Re}(p)\int\limits_{\Omega}\left(\varepsilon(x)\widehat{E}(x,p)\cdot\widehat{E}^*(x,p)+\mu(x)\widehat{H}(x,p)\cdot\widehat{H}^*(x,p)\right)dx+$$

$$+\,\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\lambda_1(x,p)\big|\widehat{H_\tau}(x,p)\times n(x)\big|^2 d\sigma\right)\le$$

$$\le\big(\mathrm{Re}(p)\big)^{-1}\Big(\delta_1^{-1}\|\widetilde{J}(p)\|^2+\delta_2^{-1}\|\widetilde{K}\|^2\Big)+\sup_{x\in\Omega}\mathrm{Re}\left(\lambda_1^{-1}(x,p)\right)\|\hat{f}(p)\|^2_{\partial\Omega}$$

equivalente a (20). Il teorema è così completamente provato.

La disuguaglianza (20) assicura, allorquando è $\mathrm{Re}(p)>0$, l'esistenza della antitrasformata di Laplace (rispetto alla variabile p) delle funzioni $\widehat{E}(x,p)$ ed $\widehat{H}(x,p)$, infatti i termini a secondo membro di (20) sono per ipotesi antitrasformabili, per cui lo sono anche i singoli termini a primo membro essendo tutti positivi. Quindi dal sistema (18), (19) otteniamo una soluzione debole $\big(E(x,t),H(x,t)\big)$ del sistema (9)-(12) con $(E,H)\in\mathcal{H}_f(Q)$, ove T è un qualunque numero positivo.

Vale pertanto il seguente:

Teorema 2. *Il problema differenziale* (9)-(12), *con* $J_i \in L^2(0,T;\mathcal{D}(\Omega))$, $f \in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))$, *ammette quale che sia* $T \in \mathbf{R}^+$, *sotto le sole ipotesi* (16), *un'unica soluzione debole secondo la Definizione 1.*

3 – Stabilità asintotica

Il Teorema 2 assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema (9)-(12) nel caso di un dominio limitato nella variabile temporale t. Lo studio del comportamento asintotico della soluzione richiede pertanto un teorema di esistenza ed unicità sull'intervallo temporale $]0,+\infty[$ relativamente ad una classe di soluzioni che decadano opportunamente per $t \to +\infty$.

La Definizione 1 relativa al dominio $Q = \Omega\times]0,\infty[$ comporta che una coppia di funzioni (E,H) è una soluzione se le due funzioni appartengono allo spazio $L^2(0,\infty;\mathcal{D}(\Omega))$ e verificano la relazione integrale:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_\Omega \{E\cdot\nabla - \mu H\cdot h + H\cdot\nabla\times e + \varepsilon E\cdot\dot e - J_i\cdot e\}dx\,dt+ \\
&+\int_\Omega(\varepsilon E_0\cdot e_0 - \mu H_0\cdot h_0)dx + \int_0^\infty\int_{\partial\Omega} h\times f\cdot n\,d\sigma\,dt = 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

per tutte le coppie $(e,h) \in \mathcal{H}_0(Q)$. Il teorema di Parseval sulla trasformata di Fourier consente di scrivere la (26) anche nella forma:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_\Omega \{\widehat{E}\cdot\nabla\times\hat f - \mu\widehat{H}\cdot(i\omega\hat h - h_0) + \widehat{H}\cdot\nabla\times\hat e+ \\
&+\varepsilon\widehat{E}\cdot(i\omega\hat e - e_0) - \widehat{J}_i\cdot\hat e\}dx\,d\omega+ \\
&+\int_\Omega(\varepsilon E_0\cdot e_0 - \mu H_0\cdot h_0)dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\partial\Omega}\hat h\times\hat f\cdot\hat n\,d\sigma\,d\omega = 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

dove ora il simbolo $\hat{}$ individua la trasformata L^2-Fourier delle funzioni casuali in oggetto, che coincide con la trasformata di Laplace per $p = \ i\,\omega$. Pertanto le due funzioni $\widehat{E}$ ed $\widehat{H}$ appartengono allo spazio

$L^2(-\infty,\infty;\mathcal{D}^*(\Omega))$. Inoltre indichiamo con $\widehat{H}_0$ l'insieme costituito dalle trasformate di Fourier delle funzioni (e,h) appartenenti a $\mathcal{H}_0(Q)$, cioè:

$$\begin{aligned}&\widehat{H}_0 = \Big\{\hat{e},\hat{h} \in L^2(-\infty,\infty;\mathcal{R}^*(Q))\,;\\ &i\omega\hat{e} - e_0,\ i\omega\hat{h} - h_0 \in L^2(-\infty,\infty;L^2(\Omega;C^3))\\ &\hat{e}_\tau(\omega) = (\lambda_0+\hat{\lambda})h_\tau \times n \quad \text{su} \quad \partial\Omega\Big\}\,.\end{aligned}$$

Il già citato teorema di Parseval consente di stabilire il seguente:

TEOREMA 3. *Una coppia di funzioni* $E,H \in L^2(0,\infty;\mathcal{D}(\Omega))$ *è una soluzione debole del problema* (9)-(12) *nel dominio* $Q=\Omega\times[0,\infty[$ *secondo la Definizione 1 se le corrispondenti trasformate di Fourier* $\widehat{E},\widehat{H}$ $\in L^2(-\infty,\infty;\mathcal{D}^*(\Omega))$ *verificano la relazione* (27) *per ogni* $(\hat{e},\hat{h})\in\widehat{H}_0$.

Osservazione. È facile provare che il sistema che si ottiene da (18) nel caso in cui $\mathrm{Re}(p)=0$, e quindi $p=i\omega\neq 0$, cioè il problema:

$$\tag{28}\begin{aligned}&\nabla\times\widehat{H}(x,\omega) - \varepsilon i\omega\widehat{E}(x,\omega) = \widetilde{J}(x,\omega)\\ &\nabla\times\widehat{E}(x,\omega) + \mu i\omega\widehat{H}(x,\omega) = \widetilde{K}(x)\\ &\widetilde{E}_\tau(x,\omega) = \lambda_1(x,i\omega)\widehat{H}_\tau(x,\omega)\times n(x) + \hat{f}(x,\omega) \quad \text{su} \quad \partial\Omega\end{aligned}$$

è tale che le sue soluzioni sono anche soluzione di (27).

LEMMA 1. *Per ogni fissato* ω, *il problema differenziale rappresentato dal sistema* (28) *ammette per ogni* $(\widetilde{J},\widetilde{K})\in\mathcal{D}^*(\Omega)\times\mathcal{D}^*(\Omega)$ *una unica soluzione* $(\widehat{E},\widehat{H})\in\mathcal{R}^*(\Omega)$. *Inoltre al variare di* ω *le soluzioni* $(\widehat{E}(\cdot,\omega),\widehat{H}(\cdot,\omega))$ *dipendono con continuità da* ω.

DIM. Consideriamo prima il caso in cui $\omega\neq 0$. L'unicità segue dall'osservazione che, quando consideriamo il problema omogeneo associato al sistema (28), cioè il sistema:

$$\tag{29}\begin{aligned}&\nabla\times\widehat{H}(x,\omega) - i\omega\varepsilon\widehat{E}(x,\omega) = 0\\ &\nabla\times\widehat{E}(x,\omega) + i\omega\mu\widehat{H}(x,\omega) = 0\\ &\widehat{E}_\tau(x,\omega) = \lambda_1(x,i\omega)\widehat{H}_\tau(x,\omega)\times n(x)\,, \quad \text{su} \quad \partial\Omega\end{aligned}$$

allora il relativo Teorema di Poynting complesso si scrive nel nostro caso:

$$\int_{\partial\Omega} \lambda_1 \widehat{H}_\tau \times n \cdot \widehat{H}^*_\tau \times n \, d\sigma = \int_{\Omega} i\omega(-\mu \widehat{H} \cdot \widehat{H}^* + \varepsilon \widehat{E} \cdot \widehat{E}^*) dx \tag{30}$$

da cui considerando solo la parte reale di (30), necessariamente abbiamo:

$$\int_{\partial\Omega} (\lambda_0 + \lambda_c) |\widehat{H}_\tau \times n|^2 d\sigma = 0 \,. \tag{31}$$

La condizione di dissipatività della frontiera assicura che la somma $(\lambda_0 + \lambda_c)$ è positiva, per cui $\widehat{H}_\tau \times n$ deve risultare nulla su tutta la frontiera $\partial\Omega$. Quindi $(29)_3$ comporta anche l'annullamento di $\widehat{E}_\tau$ su $\partial\Omega$, questo assicura l'unicità della soluzione nulla per il problema (29).

Per la dimostrazione dell'esistenza, sempre nel caso in cui $\omega \neq 0$, sfruttiamo l'unicità della soluzione del problema (29), ciò garantisce che il problema non ha autovalori. Tale proprietà insieme con la condizione di ellitticità del sistema assicura, per il teorema 3.18 Ch. 3 di [6], l'esistenza della soluzione per il sistema (29).

Consideriamo ora a parte il caso $\omega = 0$. Il sistema (29) si riduce:

$$\begin{aligned} &\nabla \times \widehat{H}(x,0) = \widetilde{J}(x,0) \\ &\nabla \times \widehat{E}(x,0) = \widetilde{K}(x,0) \\ &\widehat{E}_\tau(x,0) = \hat{f}(x,0) \,, \quad \text{su} \quad \partial\Omega \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Inoltre le equazioni (2), (3) associate a (4), (5) comportano

$$\nabla \cdot \widehat{E} = 0 \,, \qquad \nabla \cdot \widehat{H} = 0 \,. \tag{33}$$

È noto che il problema (32), (33), nell'ipotesi che il dominio Ω sia semplicemente connesso, ammette un'unica soluzione.

Concludiamo formulando il successivo teorema di esistenza, unicità e stabilità limitandoci, solo per semplicità nel calcolo, al caso $f = 0$.

TEOREMA 4. *Il problema differenziale* (9)-(12) *relativo al dominio* $Q = \Omega \times [0, \infty[$, *dove* $J_i \in L^2(0, \infty; \mathcal{D}(\Omega))$ *e* $f = 0$, *nelle ipotesi* (15), (16) *ammette una unica soluzione debole secondo la Definizione 1 in cui* $T = \infty$.

DIM. Segue dalle proprietà del Lemma 1 che l'operatore differenziale L_ω: $\mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$, che si deduce dal sistema (28), è suriettivo. Ciò comporta l'esistenza delle funzioni di Green $\Pi_1(x,x',\omega)$, $\Pi_2(x,x',\omega)$ che verificano in forma debole il sistema:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \Pi_2(x,x',\omega) + i\omega\varepsilon\Pi_1(x,x',\omega) = \delta(x,x')I \\
&\nabla \times \Pi_1(x,x',\omega) - i\omega\mu\Pi_2(x,x',\omega) = 0 \qquad (34)\\
&\Pi_1(x,x',\omega) = \lambda_1(x,i\omega)\Pi_2(x,x',\omega) \times n(x)\,, \quad \text{su} \quad \partial\Omega
\end{aligned}
$$

dove I indica il tensore di identità.

È noto che combinando opportunamente le equazioni (28) con $\hat{f} = 0$ e (34) otteniamo per tutti $(\hat{e},\hat{h}) \in \widehat{H_0}$:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \widehat{E}(x,\omega) \cdot \big(i\omega\hat{e}(x,\omega) - e_0(x)\big)dx = \\
&= \int_\Omega\int_\Omega \Big[\widetilde{K}(x')\Pi_2(x,x',\omega) - \widehat{J}(x')\Pi_1(x,x',\omega)\Big]\big(i\omega\hat{e}(x,\omega) - e_0\big)dx\,dx'. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

Analogamente si può provare una formula analoga a (35) per il campo magnetico H. Consideriamo infatti le nuove funzioni di Green $\Pi_1'(x,x',\omega)$, $\Pi_2'(x,x',\omega)$ soluzioni del problema:

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \Pi_2'(x,x',\omega) + i\omega\varepsilon\Pi_1'(x,x',\omega) = 0 \\
&\nabla \times \Pi_1'(x,x',\omega) - i\omega\mu\Pi_2'(x,x',\omega) = \delta(x - x')I \qquad (36)\\
&\Pi_1'(x,x',\omega) = \lambda_1(x,i\omega)\Pi_2'(x,x',\omega) \times n(x), \quad \text{su} \quad \partial\Omega\,.
\end{aligned}
$$

Da (28) e (36) abbiamo:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \widehat{H}(x,\omega) \cdot \big(\omega\hat{h}(x,\omega) - h_0(x)\big)dx = \\
&= \int_\Omega\int_\Omega \Big[\widetilde{K}(x')\Pi_1'(x,x',\omega) - \widehat{J}(x')\Pi_2'(x,x',\omega)\Big]\big(\omega\hat{h}(x,\omega) - h_0\big)dx\,dx'. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

Per la dimostrazione del Teorema 4 è necessario premettere il successivo:

LEMMA 2. *Le funzioni di Green* $\prod_1(x,x',\omega)$, $\prod_2(x,x',\omega)$ *presentano il seguente comportamento asintotico:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{\omega\to\pm\infty} i\omega\Bigg[\int_\Omega\int_\Omega \varepsilon(x)\hat{f}_1(x,\omega)\cdot\Pi_1(x,x',\omega)\varphi(x',\omega)dx\,dx'+\\
&+\int_\Omega\int_\Omega \mu(x)\hat{f}_2(x,\omega)\Pi_2(x,x',\omega)\cdot\varphi(x',\omega)dx\,dx'\Bigg]=\\
&=\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_\Omega \hat{f}_1(x,\omega)\cdot\varphi(x,\omega)dx
\end{aligned}\tag{38}$$

per tutti i vettori $(\hat{f}_1,\hat{f}_2)\in\mathcal{K}:=L^2(0,\infty;\mathcal{R}^*(\Omega))\cup L^\infty(0,\infty;\mathcal{R}^*(\Omega))$, $\varphi\in\widehat{H}_0$.

DIM. Dal sistema (34) abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_\Omega\Big(\Pi_1\nabla\times\hat{f}_2\cdot\varphi-\Pi_2\nabla\times\hat{f}_1\cdot\varphi+i\omega\varepsilon\Pi_1\hat{f}_1\cdot\varphi+\\
&\qquad+i\omega\mu\Pi_2\hat{f}_2\cdot\varphi\Big)dx\,dx'=\int_\Omega\hat{f}_1\cdot\varphi\,dx\,.
\end{aligned}\tag{39}$$

Da cui:

$$\int_\Omega\int_\Omega\Big(\Pi_1(\nabla\times\hat{f}_2+i\omega\varepsilon\hat{f}_1)\cdot\varphi-\Pi_2(\nabla\times\hat{f}_1-i\omega\mu\hat{f}_2)\cdot\varphi dx\,dx'=\int_\Omega\hat{f}_1\cdot\varphi dx\,.$$

Poiché $\hat{f}_1,\hat{f}_2$ e $\nabla\times\hat{f}_1$, $\nabla\times\hat{f}_2$ hanno lo stesso comportamento per $\omega\to\infty$, si ha necessariamente la tesi.

Naturalmente possiamo provare per $\prod_1'$, $\prod_2'$ una proprietà completamente simile a (38), cioè:

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} i\omega\Bigg[\int_\Omega\int_\Omega \varepsilon(x)\hat{f}_1(x,\omega)\Pi_1'(x,x',\omega)\cdot\varphi(x',\omega)dx\,dx'+$$

$$(40)\qquad +\int_\Omega\int_\Omega \mu(x)\hat{f}_2(x,\omega)\Pi_2'(x,x',\omega)\cdot\varphi(x',\omega)dx\,dx'\Bigg] =$$

$$= \lim_{\omega\to\pm\infty}\int_\Omega \hat{f}_2(x,\omega)\cdot\varphi(x,\omega)dx\,.$$

Per le proprietà di continuità in ω delle funzioni $\widehat{E}(x,\omega)$, $\widehat{H}(x,\omega)$ e per il comportamento per $\omega\to\infty$ che discende da (35), (38) e (36), (40) abbiamo l'integrabilità in ω nell'intervallo $(-\infty,\infty)$ delle funzioni:

$$(41)\qquad \begin{aligned}&\int_\Omega \widehat{E}(x,\omega)\cdot\big(i\omega\hat{e}(x,\omega)-e_0(x)\big)dx\,,\\ &\int_\Omega \widehat{H}(x,\omega)\cdot\big(i\omega\hat{h}(x,\omega)-h_0(x)\big)dx\,.\end{aligned}$$

Pertanto da (27) discende che, per tutte le coppie $(\hat{e},\hat{h})\in\widehat{H_0}$, risulta

$$\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega \widehat{E}\cdot\nabla\times\hat{h}\,dx\,d\omega\Big|<\infty\,,\qquad \Big|\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega \widehat{H}\cdot\nabla\times\hat{e}\,dx\,d\omega\Big|<\infty$$

da cui discende per l'arbitrarietà di $\nabla\times\hat{e}$, $\nabla\times\hat{h}\in\mathcal{D}^*(\Omega)$, che $\widehat{E},\widehat{H}\in L^2\big(0,\infty;\mathcal{R}^*(\Omega)\big)$ e verifica il sistema (28) nella forma debole (27), da cui abbiamo che $E,H\in L^2\big(0,\infty;\mathcal{D}(\Omega)\big)$ e soddisfa la definizione di soluzione debole (26).

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Graffi: *Sulle condizioni al contorno approssimate nell'elettromagnetismo*, Atti Acc. Sc. Istituto Bologna, S. XI, Tomo V, (1958), 88-94.

[2] M. Fabrizio: *Un problema al contorno dissipativo e con memoria in elettromagnetismo*, in corso di pubblicazione.

[3] B.D. Coleman – E.H. Dill: *Thermodynamic restrictions on the constitutive equations of electromagnetic theory*, ZAMP, **22** (1971), 691-702.

[4] C.H. Wilcox: *The mathematical foundations of diffraction theory*, Electromagnetic Waves ed. R.E. Langer, The University of Wisconsin Press, Madison, (1962).

[5] B. Lazzari: *Decay of solution of the Maxwell's equations in bounded domains with dissipative boundary conditions*, in corso di stampa.

[6] S. Mizohata: *The theory of partial differential equations*, Cambridge University Press, (1973).

Lavoro pervenuto alla redazione il 1 settembre 1993
ed accettato per la pubblicazione il 2 marzo 1994

Indirizzo degli Autori:

Mauro Fabrizio – Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna – Piazza Porta S. Donato, 5 – 40126 Bologna, Italia

Ettore Santi – Dipartimento di Matematica dell'Università di Ferrara – Via Machiavelli, 35 – 44100 Ferrara, Italia