Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 14, Roma (1994), 523-531

Olonomia dei moduli semplici su certe algebre di operatori differenziali

G. BRATTI

RIASSUNTO: *Sia* $A = C[\![x_1, \dots, x_n]\!]\langle\delta\rangle$, $\delta = d/dx_1$, *e sia* M *un* A-mod. *finitamente generato. Si prova che: se* M *è semplice* M *è olonomo; e nel caso che sia* $n = 2$ *si prova anche che ogni* A-mod N *finitamente generato soddisfa l'equazione dimensionale* $d(N) = \mathrm{Kr}\,.\,\dim(N) + 1$ *dove* d = *dimensione di Bernstein* e $\mathrm{Kr}\cdot\dim$ = *dimensione di Krull.*

ABSTRACT: *Let* A *be the ring* $C[\![x_1, \dots, x_n]\!]\langle\delta\rangle$, $\delta = d/dx_1$, *and* M *an* A-mod. *finitely generated. We show that: if* M *is simple than* M *is holonomic; in the case* $n = 2$, *we also show that every finitely generated* A-mod N *satisfies the dimensional equation* $d(N) = \mathrm{Kr}\,.\,\dim(N) + 1$ *where* d = *Bernstein's dimension and* $\mathrm{Kr}\cdot\dim$ = *Krull's dimension.*

1 – Introduzione

Simboli e notazioni sono quelli del libro di J-E. BJÖRK [2].

In [2] pag. 31, è proposto questo problema:

È vero che ogni $A_n(C)$*-mod.* M *finitamente generato soddisfa l'equazione dimensionale*[(1)]

(1) $$d(M) = \mathrm{Kr}\,.\,\dim(M) + n\,?$$

KEY WORDS AND PHRASES: *Holonomic modules – Bernstein's dimension – Krull's dimension*
A.M.S. CLASSIFICATION: 35A05

(1) $A_n(C)$ è l'algebra di Weyl sul campo complesso C; $d(M)$ = dimensione di Bernstein di M, [2], Cap. 1; $\mathrm{Kr}\,.\,\dim(M)$ = dimensione di Krull di M, secondo [6].

Il problema ha due risposte: la (1) è vera se $n = 1$; se $n \geq 2$, la (1) è falsa, come dimostra J.T. Stafford [5]:

Sia(2):

$$\alpha = x_1 + \delta_1\left(\sum_2^n {}_i\lambda_i x_i \delta_i\right) + \sum_2^n {}_i(x_i - \delta_i)\,;$$

l'ideale destro $\alpha A_n(C)$ *è massimale in* $A_n(C)$*, così che l'*$A_n(C)$*-mod. destro* $A_n(C)/\alpha A_n(C)$ *è semplice e si ha*

$$d\big(A_n(C)/\alpha A_n(C)\big) = 2n - 1 \quad \text{e} \quad \mathrm{Kr\,.\,dim}\,\big(A_n(C)/\alpha A_n(C)\big) = 0\,.$$

Il problema (1) è ancora aperto per i $\mathcal{D}_n$-mod., o $\widehat{\mathcal{D}}_n$-mod., finitamente generati(3).

Un caso particolare di quest'ultimo problema è il seguente:

sia $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1} = C[\![x_1, \ldots, x_n]\!]\langle\delta\rangle$, con $\delta = \delta/\delta x_1$; filtrato $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$ al solito modo, [2], pag. 125, risulta(4)

$$\omega = \mathrm{gl\,.\,dim\,gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}) = n + 1 \geq \mu = w.\,\mathrm{gl\,.\,dim}(\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}) = n$$

e

$$\mathrm{Kr\,.\,dim}(\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}) = n\,;$$

ebbene, in questo caso si può dimostrare il

Teorema 1. *Ogni* $\widehat{\mathcal{D}}_{2,1}$*-mod. semplice è olonomo*(5)*, o, equivalentemente: ogni* $\widehat{\mathcal{D}}_{2,1}$*-mod. finitamente generato soddisfa l'equazione dimensionale*

$$d(M) = \mathrm{Kr\,.\,dim}(M) + (\omega - \mu)\,. \tag{1'}$$

Per induzione si ha poi il

Teorema 2. *Ogni* $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$*-mod. semplice è olonomo.*

(2) I λ_i sono $n - 1$ numeri complessi linearmente indipendenti sul campo razionale.

(3) $\mathcal{D}_n(\widehat{\mathcal{D}}_n)$ è l'algebra degli operatori differenziali a coefficienti olomorfi (serie formali).

(4) $\mathrm{gl\,.\,dim}()$ = dimensione globale di () e $w.\,\mathrm{gl\,.\,dim}()$ = dimensione globale debole, o piatta, di (). Scriverò in appendice come si calcolano queste dimensioni.

(5) L'olonomia si intende secondo la Def. 7.2 di [2], pag. 76; in questo caso $d(M) = (\omega - \mu) = 1$.

Osservazione. Non so se la $(1')$ sussista anche nel caso del Teorema 2.

L'equivalenza affermata nel Teorema 1 si dimostra subito: intanto si può supporre che sia $M = \widehat{\mathcal{D}}_{r,1}/J$; poi:

se vale la $(1')$ ed M è semplice si ha $\mathrm{Kr\,.\,dim}(M)=0$ e quindi $d(M)=1$

se ogni semplice è olonomo, si ha: se $d(M) = 3$, $J = 0$ e quindi vale la $(1')$; se $d(M) = 2$, $\mathrm{Kr\,.\,dim}(M) = 1$, altrimenti sarebbe $\mathrm{Kr\,.\,dim}(M) = 0$, che implica che M sia di lunghezza finita: ma allora $d(M) = 1$; infine se $d(M) = 1$, M è olonomo e quindi ha lunghezza finita, [2], pag. 76, che dà $\mathrm{Kr\,.\,dim}(M) = 0$.

2 – Dimostrazione dei teoremi 1 e 2

Mi riferirò d'ora in poi solo a moduli ed ideali sinistri. Sia J un ideale di $\widehat{\mathcal{D}}_{2,1}$; se $M = \widehat{\mathcal{D}}_{2,1}/J$ è semplice e non olonomo, si ha $d(M) = 2$, cioè: M è sub-olonomo e puro(6).

In generale: sia (A, Γ) un dominio di integrità filtrato, con unità, tale che che $\mathrm{gr}_\Gamma(A)$ sia commutativo, noetheriano, regolare, puro di dimensione globale $\omega \geq \mu = w.\mathrm{gl\,.\,dim}(A) \geq 2$; se J è un ideale di A, gli A-mod. A/J che sono sub-olonomi e puri si caratterizzano così:

Lemma 1. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $\mathrm{Ext}^j_A\,(A/J, A) = 0,\ 0 \leq j \leq \mu - 2$ *e la dimensione proiettiva di* J *è* $dp(J) = \mu - 2$*;*

b) A/J *è un* A*-mod. sub-olonomo e puro, cioè:* $d(A/J) = (\omega - \mu) + 1$ *ed ogni suo sottomodulo diverso da zero ha la stessa dimensione.*

Dim. a) implica b): poiché $\mathrm{Ext}^{\mu-1}_A(A/J, A) \simeq \mathrm{Ext}^{\mu-2}_A(J, A) \neq 0$, la prima parte di a) dà subito

$$d(A/J) = (\omega - \mu) + 1\,,$$

in base al Th. 7.1 di [2], pag. 73.

Meno ovvio è dimostrare che A/J è puro. Si fa così: in base alla $\mathcal{F}$-filtrazione, [2], pag. 74, si ha successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{F}_{\omega-\mu}(A/J) \to \mathrm{Ext}^\mu_A\left(\mathrm{Ext}^\mu_A(A/J, A), A\right) \to W_0 \to 0 \qquad (2)$$

(6) Si veda l'enunciato b) del Lemma 1.

dove $\mathcal{F}_{\omega-\mu}(A/J)$ è il più grande sottomodulo olonomo di A/J; poiché $dp(A/J) \leq \mu - 1$ si ha $\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A) = 0$, e dunque A/J è puro.

b) implica a): $d(A/J) = (\omega - \mu) + 1$ dà la prima parte della a). Naturalmente non può esser $dp(J) \leq \mu - 3$ né $dp(J) = \mu$; dimostro che se $dp(J) = \mu - 1$ si ha una contraddizione.

L'ipotesi supposta dà $dp(A/J) = \mu$, [3], pag. 135; e dunque l'A-mod. destro

$$\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A)$$

è olonomo; la successione esatta corta (2) e l'ipotesi di purezza di A/J dà

$$\operatorname{Ext}^{\mu}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A), A\big) \cong W_0\,,$$

dove, [2], pag. 62, W_0 è un sottomodulo d'un quoziente della somma diretta "of the double Ext-groups"

$$\operatorname{Ext}^{\mu+2}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu+1}_A(A/J, A), A\big) \oplus \operatorname{Ext}^{\mu+1}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A), A\big) \oplus \\ \oplus \operatorname{Ext}^{\mu}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu-1}_A(A/J, A), A\big)\,;$$

ora:

a) $\operatorname{Ext}^{\mu+1}_A(A/J, A) = 0$, poiché $dp(A/J) = \mu$;

b) $\operatorname{Ext}^{\mu+1}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A), A\big) = 0$, poiché $\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A) = 0$ è olonomo; e

c) $\operatorname{Ext}^{\mu}_A\big(\operatorname{Ext}^{\mu-1}_A(A/J, A), A\big) = 0$, in virtù del Lemma 7.11, pag. 75:

a), b) e c) danno $\operatorname{Ext}^{\mu}_A(A/J, A) \cong \operatorname{Ext}^{\mu-1}_A(J, A) = 0$. □

Osservazione. Nel caso che sia $A = \widehat{\mathcal{D}}_{2,1}$ il lemma che precede dice che gli eventuali A-mod. semplici e non olonomi esistono se e solo se A ha ideali massimali e proiettivi.

Si noti inoltre che in A l'ideale Ax_2 è massimale come proiettivo, cioè non esiste un ideale proiettivo J di A tale che $Ax_2 \subset J$: si prova così: sia $\varphi : A \to \widehat{\mathcal{D}}_1$ definita da $\varphi\big(p(x_1, x_2, \delta)\big) = p(x_1, 0, \delta)$; allora si avrebbe

$$d_A(A/J) = d_{\widehat{\mathcal{D}}_1}\big(\widehat{\mathcal{D}}_1/\varphi(J)\big)\,,$$

che è assurdo.

Per il seguito è anche utile questo

Lemma 2. *Se J è un ideale massimale di $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$, J non può essere principale.*

Dim. Si supponga che $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}(\alpha)$ sia massimale, $\alpha = \sum_k \alpha_k \delta^k$; α deve avere grado positivo in δ, altrimenti si avrebbe

$$\lambda\alpha_0 + \mu x_2 = 1\,,$$

con λ e μ in $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$, che implica α invertibile.

Ora, sia β un elemento di $\sum_{i\geq 2} C[\![x_2,\dots,x_n]\!]x_i$ che non sia un fattore del coefficiente direttivo α_n di α; poiché β non sta in $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}(\alpha)$, si deve avere

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1\,; \tag{3}$$

posto $\lambda = \sum_0^m {}_k\lambda_k\delta^k$ e $\mu = \sum_0^{n+m} \mu_k\delta^k$, la (3) dà questo sistema

$$\begin{cases} \lambda_0\alpha_0 + \lambda_1\alpha_0' + \ldots + \lambda_m\alpha_0^m + \mu_0\beta = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_m\alpha_n + \mu_{n+m}\beta = 0 \end{cases}$$

che non può avere soluzioni visto che sarebbe $\lambda_i = \gamma_i\beta$, $0 \leq i \leq n$, contro la prima equazione del sistema. □

Dim. del teorema 1. Per semplicità porrò $A=\widehat{\mathcal{D}}_{2,1}$ e $B=C[[x,y]]$.
Sia J un ideale massimale di A tale che $d(A/J) = 2$.

a) $J \cap C[[y]] = 0$, in base all'osservazione a seguito del Lemma 1.

b) J non contiene δ: sarebbe $J = A\delta + A(J\cap B)$, con $J\cap B \neq 0$, in base al Lemma 2. Ora, se s sta in $J\cap B$ e se $s = y^\beta u$, anche u sta in J; di qui J conterrebbe elementi del tipo

$$u(x,y) = x^\alpha + v(x,y)y\,, \quad \text{con} \quad \alpha \geq 1\,;$$

applicando ad u il δ α-volte si avrebbe: $\alpha! + v^\alpha(x,y)y \in J$, cioè $J = A$.

c) Nemmeno δ^n sta in J, $n \geq 2$. Infatti, se $\delta^n \in J$ anche δ^{n-1} sta in J, altrimenti: esiste $\lambda = \sum_0^m \lambda_k\delta^k$ tale che

$$(\lambda_0 y\delta^{n-1} - 1) + \lambda_1 y\delta^n + \ldots + \lambda_m y\delta^{n+m-1} \quad \text{sta in} \quad J$$

($y\delta^{n-1} \notin J$), cioè ($\lambda_0 y\delta^{n-1}-1$) sta in J; di qui, applicando il δ $(n-1)$-volte a $(\lambda_0 y\delta^{n-1}-1)$ si avrebbe che

$$\left(\lambda_0^{(n-1)} y - 1\right) \delta^{n-1} \in J\,,$$

con, evidentemente, $\left(\lambda_0^{(n-1)} y - 1\right)$ invertibile in B.

d) In base a [2], A.2.10., pag. 126, si ha: se $\sum = \left(\sum_n\right)$ è la filtrazione canonica di A, posto

$$\Gamma_n = \sum_n (1+J)$$

e $S(n) = \Gamma_n/\Gamma_{n-1}$, il polinomio $H(j,n)$ che misura la lunghezza su B del B-mod. $S(n)/I^{j+1}(S(n))$, dove I è l'ideale massimale di B, non può aver grado maggiore di 1 in j, altrimenti sarebbe $d(A/J) = 3$. E dunque, poiché gli elementi

$$x^\alpha y^\beta \delta^n + J\,, \quad \alpha+\beta = k \quad \text{e} \quad \alpha \geq 1$$

sono diversi da zero in $I^k S(n)/I^{k+1}S(n)$, esiste una loro combinazione lineare, a coefficienti in C, la

$$s_n(x,y)\delta^n = \sum c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \delta^n$$

che sta in J, con $s'_n = \delta/\delta x_1(s_n) \neq 0$. Ciò dimostra che gli insiemi

$$J(n) = [s \quad \text{in} \quad B: \quad s\delta^n \quad \text{sta in} \quad J]$$

sono ideali di B. In base al Teorema di Preparazione di Weierstrass gli ideali $J(n)$ sono principali. Infatti, se s sta in $J(n)$ e $s = y^\beta u$, dove y^β è la massima potenza di y che divide s, anche u sta in $J(n)$, sicché $J(n)$ contiene elementi del tipo

$$x^\alpha + p(x,y)y\,, \quad \text{con} \quad \alpha \geq 1\ :$$

quello, tra questi, che ha minimo α genera $J(n)$.

Sia $R(J(n))$ il radicale di $J(n)$; si vede subito che

$$R(J(n)) \subset R(J(n+1))\,,$$

e quindi $R(J(\bar{n})) = R(J(\bar{n}+k))$, per ogni $k \geq 0$. Di qui, se $J(\bar{n}) = Bs$ e $J(\bar{n}+1) = Bu$, si ha $s = u$; ora, visto che

$$\delta(s\delta^n) = s'\delta^n + s\delta^{n+1}$$

s' dovrebbe stare in $J(n)$, che è assurdo. ∎

Dim. del Teorema 2. L'ipotesi induttiva sul numero delle trascendenti x_i dice subito che se A/J è semplice e non olonomo nessuna delle x_i, $i \geq 2$, sta in J.

Per il resto, la dimostrazione procede come nel caso precedente, tenendo presente, per il punto d), che gli elementi di $I^k S(n)/I^{k+1}S(n)$ che son diversi da zero e devono essere linearmente dipendenti su C, sono quelli del tipo

$$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \delta^n + J\,,$$

con $\sum_i \alpha_i = k$ e $\alpha_1 \geq 1$. In questo caso si osservi che: per poter applicare il Teorema di Preparazione di Weierstrass, per dimostrare che $iJ(n)$ sono principali, si deve dimostrare che: se

$$x_1^{\alpha_1} s(x_1, \dots, x_n)\delta^k \quad \text{sta in} \quad J$$

anche $s(x_1, \dots, x_n)\delta^k$ vi sta. Si fa così: se non fosse vero, esisterebbe λ in $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$ tale che

$$\lambda s \delta^k - 1 \quad \text{sta in} \quad J\,;$$

posto $\lambda x_1 = x_1\lambda - c$, e si ha $\deg_\delta(c) < \deg_\delta(\lambda)$, anche $cs\delta^k - x$ sta in J; così di seguito si avrebbe che J deve contenere x_1^p, per qualche p. Ma allora sarebbe $J \cap C[\![x_1, \dots, x_n]\!] = C[\![x_1, \dots, x_n]\!](s)$, con $s' \neq 0$; ora, se $\alpha = \sum_0^n \alpha_k \delta^k$ sta in J, anche

$$c_1 = \alpha s - s\alpha\,, \quad c_2 = c_1 s - s c_1, \dots, c_n = \alpha_n (s')^n = us$$

stanno in J, ovvero $\alpha_n = \beta_n s$. Di qui, risulta che α è divisibile per δs, con resto in J; così procedendo, s'avrebbe $J = \widehat{\mathcal{D}}_{n,1}(s)$, contro il Lemma 2. ∎

3 – Appendice

Per il calcolo delle dimensioni "globale debole" e "di Krull", di $\widehat{\mathcal{D}}_{n,1}$ si può procedere così: posto, per semplificare le scritture,

$$A = \widehat{\mathcal{D}}_{n,1}\,, \quad A_k = \widehat{\mathcal{D}}_{n,k} \quad \text{e} \quad B = \widehat{\mathcal{D}}_n$$

si dimostra che:

a) ${}_AB$ è fedelmente piatto a destra su A;

b) $\mathrm{Kr.dim}\, A \geq n$.

Infatti

$$w.\dim_{A_{n-1}}(B) \leq w.\dim_{gr(A_{n-1})}(\mathrm{gr}\, B) = 0\,,$$

che dimostra che B è piatto su A_{n-1}. Inoltre, se J è un ideale destro di A_{n-1} non può essere

$$JA_n = A_n$$

poiché sarebbe

$$\sum_1^N j_k(x,\bar\delta)\Big(\sum_0^M {}_rP_{k,r}(x,\bar\delta)\delta_n^r = 1$$

$(\bar\delta = \delta_1, \dots, \delta_{n-1})$, che dà

$$\sum_1^M {}_kj_k(x,\bar\delta)P_{k,0}(x,\bar\delta) = 1$$

e quindi $J = B$. Ciò dimostra che B è fedelmente piatto a destra su A_{n-1}; così di seguito risulta che B è fedelmente piatto a destra su A_1.

In virtù del Th. 2.6 di [4] si ha

$$w.\mathrm{gl.dim}(A) \leq r.\mathrm{gl.dim}(A) \leq r.\mathrm{gl.dim}(B) = n\,.$$

Sia $J = \delta_1 A_1 + \sum_2^k {}_jx_jA$ e sia

$$x_{k+1}\beta \in \delta_1 A + \in \sum_2^k {}_jx_jA = J_k\,;$$

sviluppando gli elementi di A_1 in serie di potenze in x_{k+1} si ha:

$$x_{k+1}\beta = \delta_1\bar{p}_1 + x_{k+1}\delta_1 p_1 + x_2\bar{p}_2 + x_{k+1}\bar{p}_2 x_2 + \ldots + x_k\bar{p}_k + x_{k+1}p_k x_k$$

con i $\bar{p}_k$ indipendenti da x_{k+1}: di qui si può vedere che β sta in J_k.

In virtù della Pr. 5.9 di [4] si ha

$$\mathrm{Kr}\,.\,\dim(A) \geq \mathrm{Kr}\,.\,\dim(A/J) + n\,;$$

in virtù di [1], pag. 78, si ha:

$$\mathrm{Kr}\,.\,\dim(A) = w.\,\mathrm{gl}\,.\,\dim(A) = n\,,$$

per ogni n naturale.

BIBLIOGRAFIA

[1] J-E. Björk: *The global homological dimension of some algebras of differential operators*, Inv. Math., **17**, (1972).

[2] J-E. Björk: *Rings of differential operators*, North-Holland, (1979).

[3] N. Bourbaki: *Algèbre Ch. 10*, Masson, (1980).

[4] J.C. McConnett – J.C. Robson: *Noncommutative noetherian rings*, J. Wiley & Sons, (1987).

[5] J.T. Stafford: *Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras*, Inv. Math., **79** (1985), 619-638.

[6] R. Rentscheler – P. Gabriel: *Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnées*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, (1967).

Lavoro pervenuto alla redazione il 9 dicembre 1993
ed accettato per la pubblicazione il 2 marzo 1994

Indirizzo dell'Autore:

G. Bratti – Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata – Via Belzoni, 7 – I35131 – Padova, Italia