Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 17, Roma (1997), 347-568

Présentation fischérienne de certaines extensions non scindées de groupes orthogonaux sur $\mathbb{F}_3$

M.-M. VIROTTE DUCHARME

RIASSUNTO: *In questo lavoro si costruiscono due gruppi, le estensioni nonsplit* $3^7.O_7(3).2$ *e* $3^8.O_8^-(3).2$ *rispettivamente, come sottogruppi del gruppi* Fi_{24} *e del B-mostro. Per queste due estensioni si presenta un'insieme di involuzioni generatrici e si danno delle rappresentazioni con gruppi di 3-trasposizioni.*

ABSTRACT: *In this paper we construct two groups, the nonsplit extensions* $3^7.O_7(3).2$ *and* $3^8.O_8^-(3).2$, *as subgroups of the group* Fi_{24} *and the Bimonster respectively. For these two extensions we exhibit a set of generating involutions and we give presentations as 3-transposition groups.*

– Introduction

Cet article fait suite à [13] et complète notre étude des présentations des groupes engendrés par une classe de Fischer qui sont obtenus comme une extension d'un groupe orthogonal par un 3-groupe normal. Typiquement la situation considérée dans [13] est la suivante: si G désigne l'un des groupes $2 \times O_n^\varepsilon(3)$, $2 \times O_n^\varepsilon(3).2$, $O_n^\varepsilon(3).2$ (pour n et ε convenables, notations de [1]), son action sur son module naturel fournit des extensions scindées $A \rtimes G$ engendrées par une classe de Fischer [3], [13].

KEY WORDS AND PHRASES: *Coxeter groups – Extension – Presentation – 3-Transposition groups*
A.M.S. CLASSIFICATION: 20F

Cependant pour $n = 7$ et $n = 8$ le groupe $G = O_n^-(3).2$ noté $G^-(n, 3)$ dans [11], [13] possède aussi une extension non scindée $A.G.$ où A est un 3-groupe abélien élémentaire d'ordre 3^n [1], [5]. Ces extensions ont été étudiées par R. A. WILSON dans deux articles [16], [17] où il démontre que $A.G$ est un sous-groupe 3-local du groupe de Fischer Fi_{24} si $n = 7$ et du Monstre si $n = 8$. Ces résultats utilisent essentiellement les propriétés du Monstre, la classification des classes de conjugaison des éléments d'ordre 3 dans $3^{12} \rtimes 2$ Suz et des techniques d'énumération par ordinateur.

L'objet retenu ici est de donner une construction élémentaire des extensions non scindées en question par générateurs et relations.

Rappelons que le groupe G admet une classe de Fischer D (ou classe de 3-transpositions) de cardinal 378 si $n = 7$ et 1107 si $n = 8$ et que l'on sait exhiber une partie X de D de cardinal n et un système de relations R tels que (X, R) soit une présentation de G [11]. Le système R se décompose naturellement en un système R' et une certaine relation $z = 1$; nous montrerons que (X, R') est une présentation de $A.G$.

Dans un article récent [7] J. HALL et L. SOICHER obtiennent aussi les mêmes présentations pour les groupes $A.G$, $n = 7$, $n = 8$. Leur démonstration utilise une énumération de classes par ordinateur ce qui leur permet de prouver plus rapidement que A est un 3-groupe abélien élémentaire. Par notre méthode nous décrivons ce sous-groupe A en exhibant un système générateur.

Conventions

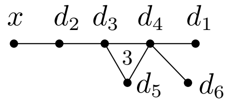
Les présentations (X, R) considérées ici sont déterminées à partir de la donnée d'un graphe de Coxeter sur X: les générateurs sont des involutions indexées par les élémets de X, si deux éléments distincts a et b sont liés (resp. non liés) dans le graphe alors $(ab)^3 = 1$ (resp. $(ab)^2 = 1$). Un sommet écrit entre parenthèses représente un élément n'appartenant pas à X, satisfaisant aux relations de graphe indiquées et dont l'expression sur les éléments de X est connue.

Le groupe H, défini comme le groupe des commutateurs de $SU_3(2)$, admet la présentation $\left(\begin{smallmatrix} a & & b \\ & \bigtriangledown & \\ & c & \end{smallmatrix}, (a^b c)^3 = 1\right)$ que l'on abrège ici par $\begin{smallmatrix} a & & b \\ & \overset{3}{\bigtriangledown} & \\ & c & \end{smallmatrix}$.
La classe de conjugaison de a dans H est de cardinal 9, c'est une classe de Fischer de H dont les éléments ne commutent pas entre eux, de plus

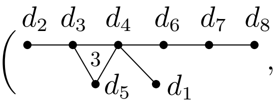
$(abc)^2$ est un élément d'ordre 3 qui engendre le centre de H [4], [10], [18].

Par convention on note le commutateur de deux éléments a et b d'un groupe G par $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$, l'ordre de leur produit par $|ab|$; enfin l'inverse de a est noté $\overline{a}$ au lieu de a^{-1}, et l'on pose $\overline{a}ba = b^a$.

Enoncé des résultats

Théorème 1. *Le groupe H dont* $\Bigg($ 

$, (d_1^s d_6)^2 = 1\Bigg)$ *est une présentation, avec $s = d_3d_4d_5d_3d_4d_5$, est isomorphe à l'extension non scindée de $O_7(3).2$ par un groupe abélien élémentaire d'ordre 3^7. La classe de conjugaison de x dans* H *est une classe de Fischer de* H *de cardinal* $2.3^4.7$.

Théorème 2. *Le groupe H dont* $\Bigg($ 

$, (d_1^s d_6)^2 = 1\Bigg)$ *est une présentation, avec $s = d_3d_4d_5d_3d_4d_5$, est isomorphe à l'extension non scindée de $O_8^-(3).2$ par un groupe abélien élémentaire d'ordre 3^8. La classe de conjugaison de d_2 dans H est une classe de Fischer de H de cardinal* $3^4.41$.

Principe de la démonstration

Dans chacune des situations étudiées on procède en deux étapes. La première consiste à exhiber des sous-groupes R de Fi_{24} et T du Bimonstre, chacun d'eux admettant un système générateur satisfaisant aux conditions décrites dans les théorèmes 1 et 2, et possédant la structure indiquée. Ces groupes R et T sont engendrés respectivement par deux et trois sous-groupes isomorphes à l'extension scindée $3^6 \rtimes (O_6^-(3) \cdot 2)$ et "placés" de manière convenable de telle sorte que les 3-groupes abéliens élémentaires d'ordre 3^6 engendrent un 3-groupe abélien élémentaire N d'ordre 3^7 (thm. 1) et K d'ordre 3^8 (thm. 2). Il reste alors à vérifier que les quotients R/N et T/K sont respectivement isomorphes à $O_7(3).2$ et $O_8^-(3).2$ et que les extensions $1 \to N \to R \to R/N \to 1$ et $1 \to K \to T \to T/K \to 1$ sont non scindées.

Pour la seconde étape on se donne un groupe H ayant la présentation indiquée dans le théorème 1 (resp. théorème 2); il existe donc un morphisme de H dans R (resp. de H dans T). On observe que le groupe H contient un élément, noté z, central dans le sous-groupe H' engendré par $\{x, d_j | 2 \le j \le 6\}$ (resp. $\{d_j | 1 \le j \le 7\}$). Cet élément est écrit en fonction des générateurs de H au début de la section 1-B (resp. 2-B); il satisfait à $z^3 = 1$. Si l'on adjoint $z = 1$ aux relations imposées (thm. 1 (resp. thm. 2)), on obtient une présentation du groupe $O_7(3).2$ (resp. $O_8^-(3).2$), voir les annexes **A.2** et **A.5** (resp. **A.6** et **A.7**). La méthode adoptée est alors la suivante. Soit E la fermeture normale de $d_1^z d_1$ (resp. $d_8^z d_8$) dans H. On prouve que E est un 3-groupe abélien élémentaire d'ordre 3^7 (resp. 3^8), puis que la classe de conjugaison de d_1 dans H est une classe de Fischer de H. Enfin on vérifie que H satisfait aux conditions du théorème 1 (resp. théorème 2).

Pour faciliter la lecture, les vérifications fastidieuses de la seconde étape n'ont pas été reproduites; celles-ci sont élémentaires. Des vérifications du même type sont totalement détaillées et décrites dans [13]. Enfin pour ne pas alourdir le texte, certains résultats utilisés: présentations fischériennes de certains groupes classiques, expression d'éléments particuliers,... sont reportés en annexe.

Je tiens à remercier Jonathan Hall de m'avoir signalé une erreur et indiqué certaines simplifications.

1 – Preuve du théorème 1

A. *Existence d'une extension non scindée* $3^7.(O_7(3).2)$

Dans le groupe de Fischer Fi_{24}, noté F, on considère deux sous-groupes $\langle e_3, e_3' \rangle$ et $\langle e_2, e_2' \rangle$ engendrés par des éléments de l'unique classe de Fischer D de F isomorphes au groupe symétrique S_3, se centralisant et pour lesquels l'ensemble des éléments de D commutant à e_2, e_2', e_3, e_3' n'est pas vide: $C_D(e_2, e_2', e_3, e_3') \neq \emptyset$. Désignons D_e l'ensemble des éléments de $D - \{e\}$, $e \in D$, commutant à e, et posons

$$F_3 = \langle D_{e_3} \cap D_{e_3'} \rangle \quad \text{et} \quad F_2 = \langle D_{e_2} \cap D_{e_2'} \rangle \ .$$

Ces sous-groupes sont isomorphes à $O_8^+(3) \rtimes S_3$, ils sont engendrés par une classe de Fischer formée d'éléments de D (on dit que ce sont des D-sous-groupes). Chacune de ces classes est la réunion de trois composantes connexes dans le graphe de Fischer associé, on rappelle que dans un tel graphe les sommets sont les éléments de D et les arêtes les paires d'éléments distincts qui commutent entre eux [4], [7], [10], [18]. La composante connexe de $D_{e_3} \cap D_{e'_3}$ (resp. $D_{e_2} \cap D_{e'_2}$) contenant e_2 et e'_2 (resp. e_3 et e'_3) engendre un sous-groupe H_3 de F_3 (resp. H_2 de F_2) isomorphe à $O_8^+(3).2$ et le normalisateur de $\langle e_3e'_3\rangle$ dans F (resp. de $\langle e_2e'_2\rangle$) est $N_F(\langle e_3e'_3\rangle) = \langle e_3, e'_3\rangle \times F_3$ (resp. $\langle e_2, e'_2\rangle \times F_2$), loc. cit.

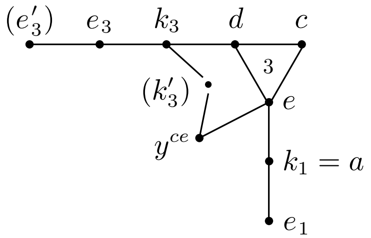
On pose $Q = N_{H_3}(\langle e_2e'_2\rangle)$ et $P = N_{H_2}(\langle e_3e'_3\rangle)$, on a alors:

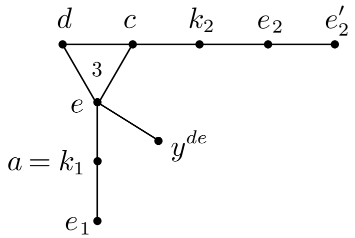
$$Q \subset H_3 \subset F_3 \subset N_F(\langle e_3e'_3\rangle) = \langle e_3, e'_3\rangle \times F_3 \text{ et}$$
$$P \subset H_2 \subset F_2 \subset N_F(\langle e_2e'_2\rangle) = \langle e_2, e'_2\rangle \times F_2$$

On se propose de prouver que le sous-groupe R de F engendré par P et Q admet un sous-groupe normal abélien élémentaire N d'ordre 3^7, que le quotient R/N est isomorphe à $O_7(3).2$ et que l'extension $1 \to N \to R \to R/N \to 1$ est non scindée.

1. *Description de P et Q.* (Notations **A.9**).

Les sous-groupes H_2 et H_3 sont engendrés respectivement par



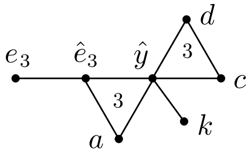


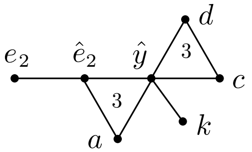
et l'on a:

$$(*) \quad (y^{ce}k_1^s)^2 = 1, \quad (y^{de}k_1^s)^2 = 1, \quad s\hat{e}_2e'_2e_2\hat{e}_2e'_2e_2 = 1 = s\hat{e}_3e'_3e_3\hat{e}_3e'_3e_3\,.$$

Pour simplifier on pose $k_1 = a$, $k'_3 = k$ et $y^c = \hat{y}$.

Le normalisateur de $\langle e_3e'_3\rangle$ dans H_2 (resp. de $\langle e_2e'_2\rangle$ dans H_3) est isomorphe au produit semi-direct $3^6 \rtimes (O_6^+(3).2)$ et il contient le sous-groupe P (resp. Q) engendré par les éléments



(resp. 

)

pour lesquels on a $(c^\sigma k)^2 = 1$, $(d^\sigma k)^2 = 1$ avec $\sigma = a\hat{e}_3\hat{y}a\hat{e}_3\hat{y}$ (Vérifications longues, mais sans difficulté). Il s'ensuit que P (resp. Q) est isomorphe à $3^6 \rtimes (O_6^+(3).2)$ (Annexes **A.3** et **A.4**).

Notons A (resp. B) le 3-sous-groupe normal de P (resp. Q); c'est un 3-groupe abélien élémentaire d'ordre 3^6 engendré par les éléments suivants:

$$\alpha = \alpha_c = dc\,,\ \beta = \alpha_{\hat{y}} = \alpha^{\hat{y}c}\,,\ y = \alpha_k = \beta^{k\hat{y}}\,,\ \alpha_a = \beta^{a\hat{y}}\,,\ \delta = \alpha_{\hat{e}_3} = \beta^{\hat{e}_3\hat{y}}\ ,$$
$$\varepsilon = \alpha_{e_3} = \delta^{e_3\hat{e}_3}$$

(resp. α, β, γ, α_a, $\theta = a_{\hat{e}_2} = \beta^{\hat{e}_2\hat{y}}$, $\xi = \alpha_{e_2} = \theta^{e_2\hat{e}_2}$).

Rappelons que si x et x' sont des éléments du système générateur de P (resp. Q) décrit ci-dessus et si ν et ν' sont les générateurs α_x et $\alpha_{x'}$ qui leur sont associés dans A (resp. B), on a les assertions suivantes:

$$\nu^x = \overline{\nu} \quad (\text{où } \overline{\nu} = \nu^{-1})\ ,$$
$$[x,x'] \neq 1 \Rightarrow \nu^{x'} = \nu\nu' = \nu'\nu = \nu'^x\ ,$$
$$[x,x'] = 1 \text{ et } xx' \neq 1 \Rightarrow \nu^{x'} = \nu \text{ et } \nu'\nu = \nu\nu'\ .$$

Les égalités $\beta = y^d y^c (= y^d\hat{y})$, $\alpha_a = a^\sigma a$, $\varepsilon = e_3 e'_3$ se démontrent à la main sans peine; de la relation $(*)$, il vient $s\hat{e}_2\overline{\xi}\hat{e}_2\overline{\xi} = 1 = s\hat{e}_3\overline{\varepsilon}\hat{e}_3\overline{\varepsilon}$ d'où $s\overline{\theta}\xi = 1 = s\overline{\delta}\varepsilon$.

2. *Etude de* $N = \langle A, B\rangle \subset R = \langle P, Q\rangle$.

(i) *N est engendré par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_a, \delta, \varepsilon, \xi$; N est abélien élémentaire d'ordre* 3^7.

La relation $\overline{\delta}\varepsilon = \overline{\theta}\xi$ établie ci-dessus prouve la première assertion. Sans difficulté on montre que ξ commute à δ et ε; N est donc abélien élémentaire et son ordre est au moins 3^6. Or A est strictement contenu dans N puisque e_2 centralise A (on a $A \subset P \subset H_2$) et inverse $\xi (e_2\xi e_2 = \overline{\xi})$, d'où $|N| = 3^7$.

(ii) *N est normal dans R.*

Tout élément g de P normalise A et centralise ξ donc normalise N; de même Q normalise N d'où l'assertion.

(iii) *Le centralisateur de R dans N est trivial.*

Un élément de N se met sous la forme $\eta = \alpha^h \beta^m \gamma^n \alpha_a^p \delta^q \varepsilon^r \xi^{r'}$ avec $0 \leq h, m, n, p, q, r, r' \leq 2$. Si η centralise R, il satisfait à $\eta^t = \eta$ pour tous les générateurs t de R ce qui conduit à un système d'équations dont l'unique solution est $\eta = 1$.

(iv) *L'action de R sur N est irréductible.*

Cela vient du fait que P (resp. Q) opère sur A (resp. B) comme sur son module naturel, de manière irréductible.

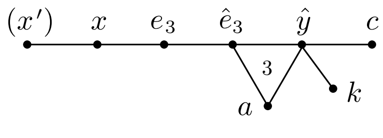
(v) *On a $C_R(N) = N$: N est son propre centralisateur dans R.*

Soit g un élément de R centralisant N; il centralise en particulier ε et ξ, c'est un élément de $\langle\varepsilon\rangle \times F_2 \cap \langle\xi\rangle \times F_3$. Quitte à modifier g, on peut supposer qu'il appartient à $F_2 \cap F_3$. Or $F_2 \cap F_3$ est un sous-groupe T de F engendré par des éléments de D, isomorphe au produit semi-direct $3^5 \rtimes O_5(3).2$ contenu dans $P \cap Q$. En décrivant $O_3(T)$, on vérifie que ce sous-groupe est abélien élémentaire et qu'il est contenu dans N; il est donc centralisé par g. Il s'ensuit que g est un élément de $O_3(T)$ donc de N.

3. *Le groupe quotient R/N est isomorphe à $O_7(3).2$ et l'extension $1 \to N \to R \to R/N \to 1$ est non scindée.*

On note ϕ l'application canonique $R \to R/N$ et on pose $x = a^{\hat{e}_2 \hat{e}_3 e_3}$.

(i) *Les relations suivantes sont satisfaites.*



(pour la définition de x' voir l'annexe **A.2**).

Les vérifications sont faciles sauf peut-être pour établir la relation $(x\hat{y})^2 = 1$. Pour celle-ci on fait opérer $g = x\hat{y}\,x\hat{y}$ sur chacun des générateurs de N et l'on constate que g opère trivialement; par 2.(v), c'est un élément de N. Comme $x\hat{y}$ est d'ordre au plus 3 (x et $\hat{y}$ sont dans D), on a $g = 1$. Par la même méthode on prouve que $x'e_2$ est un élément de N.

(ii) *R/N est isomorphe à $O_7(3).2$.*

On introduit les éléments suivants:

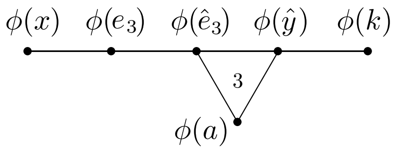
$$t = e_3^{\sigma k \hat{y} \hat{e}_3},\ t' = e_3^{\overline{\sigma} k \hat{y} a \hat{e}_3},\ x' = x^{e_3 t t' x},\ z_0 = \sigma(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3}(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3 x}(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3 x x'}\ .$$

En faisant opérer z_0 sur N, on constate que z_0 opère trivialement; z_0 est donc un élément de N.

Ainsi $\phi(z_0) = 1$ et par ailleurs $\phi(e_2) = \phi(x')$ (par (i)); il s'ensuit que $\phi(R)$ est engendré par les images des éléments x, e_3, $\hat{e}_3$, $\hat{y}$, a, c, k, images qui satisfont aux relations décrites dans (i). Le groupe quotient R/N est donc un quotient de $O_7(3).2$. Or R/N n'est ni trivial ni d'ordre 2, on a donc $R/N \simeq O_7(3).2$.

(iii) *L'extension* $(*)$ $1 \to N \to R \to R/N \to 1$ *est non scindée et z_0 est non trivial.*

a) Posons $u = x'tt'e_3ak$; u est le produit de six éléments de D commutant deux à deux; on a $u^2 = 1$. L'image de u dans R/N est une involution centrale du sous-groupe U de R/N engendré par



Le centralisateur $C_{\phi(R)}(\phi(u))$ de $\phi(u)$ dans $\phi(R)$ contient U, il est isomorphe à $2 \times O_6^-(3).2$; on a donc $C_{\phi(R)}(\phi(u)) = U$ et $\phi(u) = \phi(x')\phi(e_3)\phi(t)$ $\phi(t')\phi(a)\phi(k)$ est l'involution centrale de U [4], [10], [13].

b) On vérifie sans difficulté que u opère sur N en inversant β, γ, α_a, δ, ε, ξ et en transformant α en $\alpha\overline{\beta}\gamma\alpha_a (= u\alpha u)$. Posons $\eta = \alpha\beta\overline{\gamma\alpha}_a$; alors $C_N(u) = \langle\eta\rangle$ et η est d'ordre 3. On vérifie également que η centralise x, e_3, $\hat{e}_3$, a, $\hat{y}$ et k. Le noyau de la restriction de ϕ à $C_R(u)$ est donc $\langle\eta\rangle$ et l'on a

$$(*')\ \ 1 \to \langle\eta\rangle \to C_R(u) \xrightarrow{\phi} U \to 1 \text{ où } U \simeq 2 \times O_6^-(3).2 \text{ et } \langle\eta\rangle = Z(C_R(u)).$$

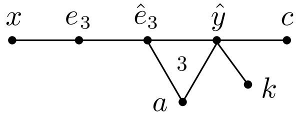
c) Structure du centralisateur dans F de l'involution u. Dans F il y a quatre classes d'involutions D, T_2, T_3 et T_4 (où T_i désigne l'ensemble des produits de i éléments distincts de D commutant deux à deux. On sait que cinq éléments distincts de D commutant deux à deux sont contenus dans une octade, il existe donc b, b', b'' dans D tels que $\{x', t, t', e_3, a, b, b', b''\}$ soit une octade O; on rappelle que D peut être munie d'une structure de système de Steiner $St(5, 8, 24)$ [1], [4], [10]. On a donc $x'tt'e_3a = bb'b''$ et k commute à b, b' et b''. L'involution u s'écrit aussi $u = kbb'b''$; si k est l'un des éléments b, b', b'' l'involution u est dans T_2; sinon elle est dans T_4.

Supposons que u soit dans T_2, on a alors $O = \{x', t, t', e_3, a, k, b, b'\}$; or tout élément f de D qui appartient à aucune des cliques L contenant O centralise au plus quatre éléments de O, $|D_f \cap O| \varepsilon \{0, 1, 2, 4\}$. Si l'on prend pour f l'un des conjugués de x' par N, f centralise e_3, t, t', a et k; cette situation est donc exclue.

Ainsi u est un élément de T_4. Le centralisateur de u dans F est d'ordre $2^{22}.3^7.5.7$ et $C_F(u) = V \rtimes S$, S étant isomorphe à S_2 et V étant le sous-groupe engendré par $C_D(u)$; on a $V \cap S = \{1\}$. De plus $V = O_2(V).M$ où $O_2(F)$ est un sous-groupe extra-spécial d'ordre 2^{13} et de type $+$, et où M est isomorphe à l'extension centrale non scindée $1 \to 3 \to 3.(O_6^-(3).2) \to O_6^-(3).2 \to 1$, [6], [19].

d) L'involution u est un élément de T_4, la structure du centralisateur de u dans F impose que l'extension $(*')$ soit non scindée. En outre $\langle \eta \rangle = \langle z_0 \rangle$ d'où l'assertion.

4. *Le groupe R admet un système générateur satisfaisant aux conditions suivantes*:



$$(c^\sigma k)^2 = 1 \ , \ \sigma = a\hat{e}_3\hat{y}a\hat{e}_3\hat{y}$$
$$c^{z_0} \in \{d, d^c\} \, ,$$
$$x = a^{\hat{e}_3\hat{e}_2e_3} \, .$$

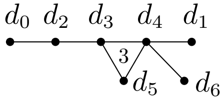
Cela résulte de ce qui précède.

5. *Le groupe R est un sous-groupe 3-local de F.*

Par construction R normalise le 3-groupe N. Soit g un élément de F qui normalise N. Quitte à modifier g par ε ou ξ, on peut supposer que g fixe ε et ξ; alors g est un élément de $H_2 \cap H_3$ et par suite R est le normalisateur de N dans F.

B. *Etude d'un groupe H satisfaisant aux hypothèses du théorème 1*

Soit H un groupe ayant la présentation



$$(d_1^s d_6)^2 = 1\ ,\quad s = d_3d_4d_5d_3d_4d_5\,.$$

Il existe un morphisme ψ de H sur le sous-groupe R de F décrit dans la section A (A.4) qui conserve le diagramme ci-dessus. En particulier l'image z_0 de l'élément $z = d_4d_5(d_4d_5)^{d_3}(d_4d_5)^{d_3d_2}(d_4d_5)^{d_3d_2d_0}(d_4d_5)^{d_3d_2d_0d_0'}$ où $d_0' = d_0^{pd_0}$ avec $p = d_2d_5d_6tt'$, $t = d_3^{d_4d_2d_5d_6d_4d_3d_4}$, $t' = d_3^{td_2d_5d_3}$, est non triviale. Cela impose que $d_1^z d_1$ ne soit pas trivial, sinon z serait central dans H il serait donc trivial [11].

On pose $\alpha = d_1^z d_1$ et l'on note E la fermeture normale de α dans H; E contient alors les éléments suivants:

$$\alpha = \alpha_1\,,\quad \alpha_4 = \alpha^{d_4d_1}\,,\quad \alpha_6 = \alpha_4^{d_6d_4}\,,\quad \alpha_3 = \alpha_4^{d_3d_4}\,,$$
$$\alpha_2 = \alpha_3^{d_2d_3}\,,\quad \alpha_0 = \alpha_2^{d_0d_2}\,,\quad \alpha_5 = \alpha_4^{d_5d_4},$$

$$\beta = \beta_1 = \alpha_1^{d_4d_1sd_1d_4}\ ,\quad \beta_5 = \beta_4^{d_5d_4}\ ,\quad \beta_3 = \beta_4^{d_3d_4}\ ,\quad \beta_2 = \beta_3^{d_2d_3}\ ,$$
$$\beta_1 = \beta_2^{d_1d_2}\ ,\quad \beta_0 = \beta_1^{d_0d_1}\ ,\quad \beta_4 = \alpha_4^s$$

1. *Les éléments α_j et $\beta_j (0 \leq j \leq 6)$ engendrent E.*

Cela résulte des assertions suivantes dont la preuve est laissée au lecteur

(i) $d_j\alpha_jd_j = \overline{\alpha}_j$, $d_j\beta_jd_j = \overline{\beta}_j$ $(0 \leq j \leq 6)$;

(ii) $[d_j, d_h] = 1$ et $d_j \neq d_h \Rightarrow d_j\alpha_hd_j = \alpha_h$, $d_j\beta_hd_j = \beta_h$, $[\alpha_h, \alpha_j] = [\beta_h, \beta_j] = 1$;

(iii) $[d_j, d_h] \neq 1 \Rightarrow d_j\alpha_hd_j = \alpha_h\alpha_j = \alpha_j\alpha_h = d_h\alpha_jd_h$, $d_j\beta_hd_j = \beta_h\beta_j = \beta_j\beta_h = d_h\beta_jd_h$;

(iv) $d_3\alpha_5d_3 = \overline{\alpha}_3\alpha_5\overline{\beta}_3$, $d_5\alpha_3d_5 = \overline{\alpha}_3\beta_5\alpha_3^2$, $d_3\beta_5d_3 = \overline{\alpha}_3\beta_5\alpha_3^2$, $d_5\beta_3d_5 = \overline{\beta}_5\beta_3\overline{\alpha}_5$.

2. *On pose $v = [\alpha_3, \alpha_5]$; v engendre le groupe des commutateurs $[E, E]$, et $v \in Z(H)$.*

Pour cela on établit sans difficulté les assertions suivantes:

(i) v est dans $Z(H)$ et $v = [\alpha_1^{d_4 d_3}, \alpha_1^{d_4 d_5}]$;

(ii) $v = [\beta_3, \beta_5]$;

(iii) $v = \alpha_4 \alpha_4^s \alpha_4^{\overline{s}} = [\alpha_1, \alpha_1^s] = [\alpha_1^s, \alpha_1^{\overline{s}}] = [\alpha_1^{\overline{s}}, \alpha_1]$;

(iv) $v^2 = [\alpha_5, \beta_5] = [\alpha_h, \beta_h]$ $(0 \leq h \leq 6)$;

(v) $[d_j, d_h] = 1$ et $d_j \neq d_h \Rightarrow [\beta_j, \alpha_h] = v$;

(vi) $[d_j, d_h] \neq 1$ et $\{j, h\} \neq \{3, 5\} \Rightarrow [\beta_j, \alpha_h] = v$;

(vii) $[\beta_3, \alpha_5] = \overline{v}$, $[\beta_5, \alpha_3] = 1$.

3. *Le sous-groupe E est abélien élémentaire d'ordre 3^7.*

On prouve d'abord que v est trivial, ensuite que $\alpha_j = \beta_j$ $(0 \leq j \leq 6)$, enfin que $\alpha_1^3 = 1$. Comme $\alpha = \alpha_1$ est un élément non trivial de E, les assertions 1. et 2. donnent le résultat.

4. *Soit $\pi : H \to H/E$; alors H/E est isomorphe à $O_7(3).2$ et z est dans E.*

En effet $\pi(H)$ est engendré par les images des générateurs de H; comme $\alpha = d_1^z d_1$ est dans E, le commutateur de $\pi(d_1)$ et de $\pi(z)$ est trivial, $\pi(z)$ est donc central dans $\pi(H)$. C'est donc un élément trivial; ainsi z est dans E et $\pi(H)$ est isomorphe à $O_7(3).2$ (annexe **A.5**).

5. *La classe de conjugaison de d_0 dans H est une classe de Fischer de H; l'extension $(*)$ $1 \to E \to H \to H/E \to 1$ est non scindée; ψ est un isomorphisme de H sur R.*

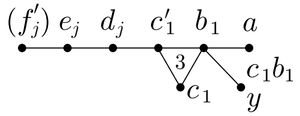
Soit u' l'involution $d_0' d_2 d_5 d_6 t t'$ (notations ci-dessus); c'est un produit de six éléments de d_0^H commutant deux à deux, $u' \in [H, H]$. Le centralisateur de u' dans H, $C_H(u')$, contient d_0, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 et son image par π est isomorphe à $2 \times O_6^-(3).2$. On vérifie que $\langle z \rangle = C_H(u') \cap E$ on a ainsi $C_H(u')/\langle z \rangle \simeq 2 \times O_6^-(3).2$ et l'assertion 5. résulte de la section A.

2 – Preuve du théorème 2

A. *Existence d'une extension non scindée* $3^8.O_8^-(3).2$

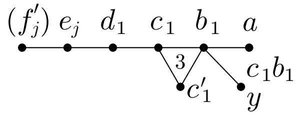
On désigne par C le groupe présenté par $(Y_{555}, S = 1)$, voir l'annexe **A.10**, et l'on note C_j le sous-groupe de C engendré par les éléments

$j \in \{2, 3\}$



,

$j = 1$



;

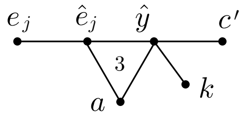
on a $(a^\sigma y^{c_1 b_1})^2 = 1$ où σ désigne $c'_1 c_1 b_1 c'_1 c_1 b_1$ (notations **A.9**).

Le sous-groupe C_j $(1 \leq j \leq 3)$ est isomorphe à un quotient du groupe $O_7(3).2$ (**A.5**) dont le seul sous-groupe normal est $O_7(3)$ qui est simple d'indice 2. Comme C_j contient des éléments d'ordre 3, ab_1 par exemple, C_j est isomorphe à $O_7(3).2$. Rappelons que la relation $S = 1$ impose $f_h = f'_h$ et $\sigma \hat{e}_h e_h f_h \hat{e}_h e_h f_h = 1$ avec $\hat{e}_h = e_h^{d_h d_h^\sigma}$ (annexes **A.5** et **A.2**). On désigne par $(*h)$ la relation $\sigma \hat{e}_h (e_h f_h) \hat{e}_h (e_h f_h) = 1$.

Pour simplifier les notations on pose $y^{c_1} = \hat{y}$, $c_1 = c$, $c'_1 = c'$, $c_3 = k$, $\rho = \hat{y} a \hat{e}_3 \hat{y} a \hat{e}_3$.

1. *Soit* $U_j = \langle e_j, \hat{e}_j, \hat{y}, a, c', k \rangle$*,* U_j *est isomorphe à* $O_6^+(3).2$*,* $j \in \{1, 2, 3\}$.

En effet, on a les relations

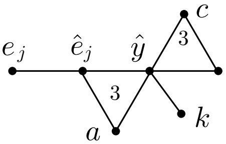


et $(c'^{\hat{y} a e_j \hat{y} a e_j} k)^2 = 1$; U_j est donc un quotient de $O_6^+(3).2$ contenant des éléments d'ordre 3. Comme l'unique sous-groupe normal de $O_6^+(3).2$ est d'indice 2 ([1], [4]), l'assertion est établie.

Remarques complémentaires. On pose $t = k^{\overline{\rho} e_3 \hat{e}_3 \hat{y}}$ et $t' = k^{\rho e_3 \hat{e}_3 a \hat{y}}$, ces éléments t et t' appartiennent au sous-groupe de U_3 engendré par e_3, $\hat{e}_3$, a, $\hat{y}$, k, sous-groupe isomorphe à $2 \times U_4(2)$ dont $p = e_3 t t' a k$ est l'involution centrale ([1], [4], [10], annexe **A.1**). Par construction U_j centralise e_i, e_h, f_i et f_h, $\{1, 2, 3\} = \{h, i, j\}$.

2. *Soit* $V_j = \langle U_j, c\rangle$, V_j *est isomorphe à l'extension scindée* $3^6 \rtimes O_6^+(3).2$, $j \in \{1,2,3\}$.

On a les relations $(\hat{y}c)^3 = (\hat{y}c')^3 = (\hat{y}c^{c'})^3 = 1$, de plus c' commute avec $k^{\hat{y}a\hat{e}_j\hat{y}a\hat{e}_j}$, d'où



. La fermeture normale A_j de $\alpha = cc'$ dans V_j est engendrée par les éléments

$$\alpha = cc' \ , \qquad \beta = \alpha_{\hat{y}} = \alpha^{\hat{y}c'} \ , \qquad \gamma = \alpha_k = \beta^{k\hat{y}} \ ,$$

$$\alpha_a = \beta^{a\hat{y}} \ , \quad \delta_j = \alpha_{\hat{e}_j} = \beta^{\hat{e}_j\hat{y}} \ , \quad \varepsilon_j = \alpha_{e_j} = \delta_j^{e_j\hat{e}_j} \ .$$

On rappelle (annexe **A.5**, [13]) que A_j est un 3-groupe abélien élémentaire non trivial sur lequel V_j opère de la manière suivante: si d et d' sont des générateurs distincts de V_j et si ν et ν' sont les générateurs de A_j qui leur sont associés, alors $\nu^d = \overline{\nu}$, $[d,d'] = 1 \Rightarrow \nu^{d'} = \nu$, $[d,d'] \neq 1 \Rightarrow \nu^{d'} = \nu\nu' = \nu'\nu = \nu'^d$ (loc. cit.). Ainsi V_j est un quotient de l'extension $3^6 \rtimes O_6^+(3).2$; or l'opération de $O_6^+(3).2$ sur le 3-groupe d'ordre 3^6 est irréductible, l'assertion 2. en découle sans difficulté.

Résultats complémentaires. Des calculs élémentaires conduisent aux égalités suivantes:

$$\beta = \hat{y}^\sigma \hat{y} \ , \alpha_a = a^\sigma a \ , \delta_j = \hat{e}_j^{a^\sigma a} \hat{e}_j \ , \varepsilon_j = (e_j f_j e_j) e_j \ ;$$

en particulier les relations $({}^*h)$ du début du paragraphe, donnent $\sigma\hat{\varepsilon}_h\varepsilon_h\hat{e}_h\varepsilon_h = 1$ d'où $\sigma\delta_h\overline{\varepsilon}_h = 1$ ou encore $\delta_3\overline{\varepsilon}_3 = \delta_2\overline{\varepsilon}_2 = \delta_1\overline{\varepsilon}_1$ $(**)$.

3. *Étude de* $R_h = \langle V_i, V_j\rangle$ *et* $N_h = \langle A_i, A_j\rangle$, $\{h,i,j\} = \{1,2,3\}$.

On établit les assertions pour $h = 1$, les autres cas sont semblables.

(i) *Le sous-groupe* N_1 *est abélien élémentaire d'ordre* 3^7.

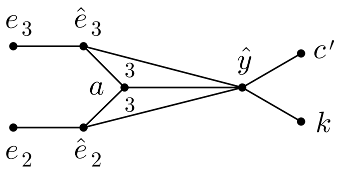
En effet, N_1 est engendré par A_2 et A_3 dont les générateurs sont respectivement α, β, γ, α_a, δ_2, ε_2 et α, β, γ, α_a, δ_3, ε_3; on a donc $N = \langle \alpha, \beta, \gamma, \alpha_a, \delta_3, \varepsilon_3, \varepsilon_2\rangle$ car $\delta_2 = \delta_3\overline{\varepsilon}_3\varepsilon_2$, relation $(**)$.

Des vérifications simples montrent que ε_2 commute à ε_3 et à δ_3; l'ordre de N_1 est donc un multiple de celui de A_3. Or ε_2 n'est pas dans A_3 car A_3 est centralisé par e_2 et l'on a $e_2\varepsilon_2 e_2 = \overline{\varepsilon}_2$. On a donc $|N_1| = 3^7$.

(ii) N_1 *est normal dans* R_1.

Soit g dans R_1; si g est dans V_2, il normalise A_2 et il est centralisé par e_2 et f_2 qui sont dans le centralisateur de V_2 dans C. Ainsi g centralise $e_2 f_2 = \varepsilon_2$, g normalise N_1, on en déduit l'assertion.

(iii) *Les relations suivantes sont satisfaites*:



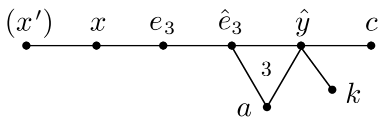
$$, \quad (\hat{e}_2\hat{e}_3)^2 = (\hat{e}_3 e_2)^2 = (e_3\hat{e}_2)^2 = (c'^{\rho} k)^2 = 1 \ .$$

(iv) *Le sous-groupe* R_1 *est isomorphe à* $3^7.O_7(3).2$ (*extension non scindée*).

Avec les notations du théorème 1, il y a un morphisme θ de R sur R_1 qui applique le système générateur de $R = \langle P, Q\rangle$ sur celui de $R_1 = \langle V_2, V_3\rangle$: R_1 est donc un quotient de R. De manière simple θ induit un isomorphisme de N sur N_1, on a donc $N \cap \ker\theta = \{1\}$ et $N.\ker\theta/N$ est un sous-groupe normal de R/N. Le seul sous-groupe normal propre de R/N est $[R/N, R/N]$ qui est d'indice 2; pour des raisons d'ordre, cela impose que $N.\ker\theta = N$, θ est donc un isomorphisme.

(v) *Conséquences pour* R_1.

L'opération de R_1 sur N_1 est irréductible et l'on a $C_{R_1}(N_1) = N_1$ (voir section 1 - A.2). En outre l'élément x ci-dessous satisfait aux relations



$$, \qquad x = a^{\hat{e}_3\hat{e}_2 e_3} \, ;$$

de plus x' (voir annexe **A.5**) est tel que $x'e_2 \in N_1$. Soient $\phi : R_1 \to R_1/N_1$ et

$z_1 = \hat{y}a(\hat{y}a)^{\hat{e}_3}(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3}(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3 x}(\hat{y}a)^{\hat{e}_3 e_3 x x'}$ on a $\phi(z_1) = 1$ et $z_1 \neq 1$ (loc. cit.).

4. *Etude de* $X = \langle V_1, V_2, V_3\rangle$ *et de* $K = \langle A_1, A_2, A_3\rangle$.

(i) *Le sous-groupe* K *est engendré par* α, β, γ, α_a, δ_3, ε_3, ε_2, ε_1; K *est abélien élémentaire d'ordre* 3^8.

Rappelons que $\delta_2 = \delta_3\overline{\varepsilon}_3\varepsilon_2$ et $\delta_1 = \delta_3\overline{\varepsilon}_3\varepsilon_1$ (relation $(**)$), K admet donc les huit générateurs ci-dessus. Comme K contient A_1, son ordre est un multiple de 3^7; ε_2 centralise α, β, γ, α_a, ε_3, ε_1 (d'après 3 (i)), il s'ensuit que K est abélien élémentaire d'ordre voulu.

(ii) *L'opération des générateurs de* X *(i.e. ceux de* V_1, V_2, V_2*) sur ceux de* K *est décrite dans 2.*

On connait l'action des générateurs de V_1, V_2, V_3 sur α, β, γ, α_a qui sont des éléments de $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Puisque e_1 et e_2 centralisent V_3, ils centralisent δ_3 et ε_3; par ailleurs e_2 inverse ε_2. On connait l'action de e_1, e_2, e_3 sur K d'après 2.

Dans 3 (iii) on a vu que $\hat{e}_2$ et $\hat{e}_3$ se centralisent, or on connait l'action de $\hat{e}_2$ sur $\langle A_1, A_2\rangle$ et sur $\langle A_1, A_3\rangle$, on connait donc celles de $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ sur K. Avec les conventions de 2:

$$\begin{cases} \nu^d = \overline{\nu} & \text{si } \nu \text{ est associé à } d \ , \\ \nu^{d'} = \nu & \text{si } \nu \text{ est associé à } d \text{ et si } dd' = d'd \neq 1 \ , \\ \nu^{d'} = \nu\nu' = \nu'\nu = \nu'^{d} & \text{si } \nu \text{ est associé à } d, \nu' \text{ à } d' \text{ et si } dd' \neq d'd \ . \end{cases}$$

(iii) *Le sous-groupe* K *est normal dans* X.

Soit g un élément de X, s'il appartient à R_1, il normalise $\langle A_2, A_3\rangle = N_1$ (voir 3). Mais g étant dans R_1 est centralisé par e_1 et f_1 (voir 1 (iii)), on a donc $\varepsilon_1^g = \varepsilon_1$ et par suite g normalise N_1 et ε_1: il normalise K.

(iv) *Le centralisateur de* X *dans* K *est trivial.*

Soit η un élément de K qui commute à tous les générateurs de X. Cet élément se met sous la forme $\eta = \alpha^n\beta^m\gamma^{n'}\alpha_a^{m'}\delta^q\varepsilon_3^{q'}\varepsilon_2^r\varepsilon_1^{r'}$, on écrit $d\eta d = \eta$, pour chaque générateur de X, on obtient alors un système dont l'unique solution est $n = m = n' = m' = q = q' = r = r' = 0$, d'où le résultat.

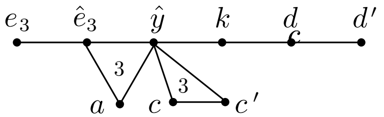
(v) *On a* $C_X(N_j) \cap R_j = N_j$ (voir 3.).

(vi) *Nouveau système générateur de* X : $X = \langle e_3, \hat{e}_3, a, \hat{y}, c', c, k, d, d'\rangle$.

On introduit les éléments suivants:

$$d = \hat{y}^{a\hat{e}_1\hat{e}_2c'k\hat{y}a\hat{e}_2\hat{e}_3e_3c'tt'k} \text{ et } d' = \hat{y}^{c'a\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{y}a\hat{e}_3e_3\hat{y}\hat{e}_3a\hat{y}kd}$$

On observe que d commute à e_3, $\hat{e}_3$, $\hat{y}$, a, c', c et que $(dk)^3 = 1$; puis que d' commute à e_3, $\hat{e}_3$, $\hat{y}$, a, c', c, k et enfin que $(dd')^3 = 1$, $dd' \neq 1$ (Ces vérifications sont longues mais faciles).
Posons $X_1 = \langle e_3, \hat{e}_3, a, \hat{y}, c', c, k, d, d'\rangle$, X_1 est un sous-groupe de X pour lequel les relations suivantes sont satisfaites:

(Δ) 

$, \quad (c'^{\rho} k)^2 = 1 \quad .$

Les éléments $\hat{e}_2$ et $\hat{e}_1$ sont dans X_1. En effet, posons $k' = \hat{y}^{c'a\hat{e}_1\hat{e}_2}$, k' est dans X_1 et l'on a

$$d' = k'^{\hat{y}a\hat{e}_3e_3\hat{y}\hat{e}_3a\hat{y}kd} \text{ et } d = (k'^{k\hat{y}a})^{\hat{e}_2(\hat{e}_3e_3c'tt'k)} \ .$$

Ainsi $\hat{e}_2$ est dans X_1; il en est de même pour $\hat{e}_1$.
Les éléments e_1 et e_2 sont dans X_1. Considérons le sous-groupe de X_1 engendré par e_3, $\hat{e}_3$, $\hat{y}$, c', c, k, $\hat{e}_2$, c'est R_1; il contient e_2 car x' est dans R_1 et $x'e_2$ est dans N_1 (d'après 3 (v)); de manière semblable e_1 est dans X_1. Ainsi $X_1 = X$.

5. *Le groupe quotient X/K est isomorphe à $O_8^-(3).2$ et l'extension $1 \to K \to X \to X/K \to 1$ est non scindée.*

On note ψ l'application canonique $X \to X/K$, on pose $d_0 = d^{ktt'd}$ et $z' = a\hat{e}_3(a\hat{e}_3)^{\hat{y}}(a\hat{e}_3)^{\hat{y}k}(a\hat{e}_3)^{\hat{y}kd}(a\hat{e}_3)^{\hat{y}kdd_0}$.
(i) *Le groupe X/K est isomorphe à $O_8^-(3).2$, z' est dans K.*

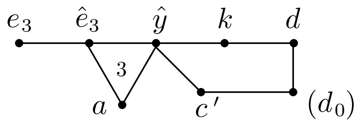
Observons que X/K est engendré par les images des générateurs de X_1 et que celles-ci satisfont aux relations (Δ), en outre $\psi(c') = \psi(c)$.

Pour prouver que z' est dans K, on considère le produit $\zeta = d'^{z'}d'$. Après une suite de réductions, on montre que ζ est conjugué dans X à un élément ζ' appartenant au sous-groupe R_2 de X. En décrivant l'action de ζ' sur N_2 on constate que ζ' y opère trivialement: ζ' est donc dans N_2 (4 (v)) et par suite ζ est dans K. En conséquence $\psi(z')$ est central dans X/K. Or X/K est un quotient de $O_8^-(3).2$ (annexe **A.7**), $\psi(z')$ est trivial et donc z' est dans K.

Enfin, X/K n'est ni trivial ni d'ordre 2, l'assertion (i) est établie.

(ii) *L'extension* $(*)$ $1 \to K \to X \to X/K \to 1$ *est non scindée.*

a) Notons X' le sous-groupe de X engendré par



,

on a $(c'^{\rho}k)^2 = 1$ et X' est un quotient de l'extension centrale non scindée $3.(2 \times O_7(3))$, celle-ci admet une involution centrale qui est l'image de $u' = e_3tt'akd_0d''$, $d'' = d_0^{c'\hat{y}ka\hat{y}c'}$ (annexe **A.6**). On observe que u' est non trivial (car $\psi(u')$ est non trivial dans $\psi(X)$). L'image de X' dans X/K est isomorphe à $2 \times O_7(3)$ et $\langle\psi(u')\rangle$ est le centre de $\psi(X')$, en outre $\psi(X')$ est le centralisateur de $\psi(u')$ dans $\psi(X)$.

b) Détermination du centralisateur de u' dans X. Pour cela on décrit l'action de d'' sur les générateurs de K puis on vérifie que $\eta \in K$ est centralisé par u' si et seulement si il est dans $\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle$. On a alors $C_X(u') \cap K = \langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle$ et par suite $C_X(u')/\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle \simeq \psi(X')$ et $|C_X(u')| = 2^{10}3^{10}5.7.13$.

c) Une remarque. Soit V le module naturel de $\psi(X)$; V est un espace vectoriel de dimension 8 sur $\mathbb{F}_3$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B telle que V admette une base orthogonale $v_1, v_2, \ldots, v_7$, v' où $B(v_i, v_i) = 1$ et $B(v', v') = -1$; les images par ψ de e_3, t, t', a, k, d_0, d'' correspondent aux réflexions t_{v_i} $(1 \le i \le 7)$. Dans cette situation, $\psi(X)$ est le sous-groupe d'indice 2 de $GO(8, \mathbb{F}_3, B)$ engendré par les t_v, $B(v,v) = 1$, et u' est l'involution $jt_{v'}(j = -id_v)$.

d) Faisons l'hypothèse que $(*)$ soit une extension scindée. Comme toutes les extensions $1 \to 3^8 \to X \to O_8^-(3).2 \to 1$ (scindées) sont isomorphes, puisque $\mathbb{H}^1(O_8^-(3), 3^8) = 1$, [8], on peut réaliser l'extension $(*)$ en plongeant X dans un groupe $\hat{X}$ isomorphe à $2.O_{10}^-(3).2$ dont on note $\hat{V}$ le module associé. Alors $\hat{V}$ est un $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel de dimension 10, muni d'une forme bilinéaire symétrique $\hat{B}$ non dégénérée et prolongeant $B(\hat{B}_{/V} = B)$; on a $\hat{V} = V \perp P$ où P est un plan hyperbolique. Le groupe $\hat{X}$ est engendré par les réflexions t_v, $\hat{B}(v,v) = 1$, et admet un élément central d'ordre 2. Soit w un vecteur isotrope non nul de P, alors X est le centralisateur de w dans $\hat{X}$. L'involution u' est une $(7,3)$-involution de $\hat{X}$ au sens suivant: si l'on pose $W_1(u') = \{v - \hat{u}'(v) | v \in \hat{V}\}$ et $W_2(u') = \{v \in \hat{V} | u'(v) = v\}$, on a $\dim W_1(u') = 7$, $\dim W_2(u') = 3$ et le centralisateur de u' dans $\hat{X}$ est un groupe isomorphe au produit direct $\langle g \rangle \times X_1 \times X_2$ où g désigne une involution et X_i le sous-groupe des transformations orthogonales sur $W_i(u')$. On a $|X_1| = 2^{10}3^9 5.7.13$ et $|X_2| = 2^3 3$; on a donc $|C_X(u')| = 2^{14}3^{10}5.7.13$ [15].

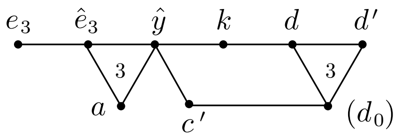
Observons que $C_X(u')$ est exactement formé des éléments de $\hat{X}$ qui centralisent u' en fixant w : X_1 et g fixent w, les seuls éléments de X_2 qui fixent w sont les deux éléments d'ordre 3; $|C_X(u')|$ est donc un multiple de $2.3.|X_1| = 2^{11}3^{10}5.7.13$.

e) Il résulte des conclusions b) que l'hypothèse faite en d) n'est pas remplie; l'extension $(*)$ est non scindée.

(iii) *L'élément z' n'est pas trivial, $z' \in \langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle$.*

En effet, si z' est trivial, X admet un sous-groupe isomorphe à $\psi(X)$, l'extension $(*)$ ci-dessus serait scindée (annexe **A.7**), d'où le résultat.

6. *Le groupe X admet un système générateur satisfaisant aux conditions suivantes*:

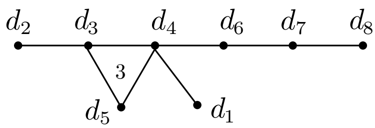


$(c'^{\rho} k)^2 = 1$,

on a alors $[d', z'] \neq 1$. Cela résulte de ce qui précède.

B. *Etude d'un groupe H satisfaisant aux hypothèses du théorème 2.*

Soit H un groupe ayant la présentation



$(d_1^s d_6)^2 = 1$,

où $s = d_3 d_4 d_5 d_3 d_4 d_5$ et $d_7' = d_7^{d_6 t t' d_7}$ avec $t = d_2^{s d_6 d_4 d_3}$ et $t' = d_2^{\bar{s} d_6 d_4 d_5 d_3}$. Il existe un morphisme θ de H sur le groupe X, défini dans la section 2-A qui conserve les relations décrites ci-dessus dans A.6. En particulier l'élément z défini par

$$z = (d_5d_3)(d_5d_3)^{d_4}(d_5d_3)^{d_4d_6}(d_5d_3)^{d_4d_6d_7}(d_5d_3)^{d_4d_6d_7d_7'}$$

a pour image l'élément z' (voir A.5)) lequel est non trivial. En conséquence z n'est pas trivial, on a donc $d_8^z \neq d_8$ sinon z serait un élément central de H et par suite il serait trivial.

On pose $\alpha = d_8^z d_8$ et l'on désigne par E la fermeture normale de α dans H; H contient alors les éléments suivants:

$$\begin{array}{llll}
\alpha = \alpha_8 \ , & \alpha_7 = \alpha^{d_7d_8} \ , & \alpha_6 = \alpha_7^{d_6d_7} \ , & \alpha_4 = \alpha_6^{d_4d_6} \ , \\
\alpha_3 = \alpha_4^{d_3d_4} \ , & \alpha_2 = \alpha_3^{d_2d_3} \ , & \alpha_1 = \alpha_4^{d_1d_4} \ , & \alpha_5 = \alpha_4^{d_5d_4} \ , \\
\beta = \beta_7^{d_8d_7} \ , & \beta_7 = \beta_6^{d_7d_6} \ , & \beta_6 = \beta_4^{d_6d_4} \ , & \beta_4 = \alpha_4^s \ , \\
\beta_3 = \beta_4^{d_3d_4} \ , & \beta_2 = \beta_3^{d_2d_3} \ , & \beta_1 = \beta_4^{d_1d_4} \ , & \beta_5 = \beta_4^{d_5d_4} \ .
\end{array}$$

1. *Les éléments α_i et $\beta_i (1 \leq i \leq 8)$ engendrent E.*

Cela résulte des assertions suivantes:

(i) Pour $1 \leq j \leq 8$, $d_j\alpha_jd_j = \overline{\alpha}_j$ et $d_j\beta_jd_j = \overline{\beta}_j$;

(ii) Pour $(d_jd_h \neq 1$, $[d_j, d_h] = 1$, $1 \leq j, h \leq 8)$, $d_j\alpha_hd_j = \alpha_h$, $[\alpha_j, \alpha_h] = [\beta_j, \beta_h] = 1$, $d_j\beta_hd_j = \beta_h$;

(iii) Pour $(\{j, h\} \neq \{3, 5\}$, $[d_j, d_h] \neq 1)$ $d_j\alpha_hd_j = \alpha_h\alpha_j = \alpha_j\alpha_h = d_h\alpha_jd_h$ et $d_j\beta_hd_j = \beta_h\beta_j = \beta_j\beta_h = d_h\beta_jd_h$;

(iv) $d_3\alpha_5d_3 = \overline{\alpha}_3\alpha_5\overline{\beta}_3$, $d_3\beta_5d_3 = \alpha_3\beta_5\overline{\alpha}_3^2$, $d_5\alpha_3d_5 = \overline{\alpha}_3\beta_5\alpha_3^2$, $d_5\beta_3d_5 = \overline{\beta}_5\beta_3\overline{\alpha}_5$.

2. *On pose $v = [\alpha_3, \alpha_5]$; v engendre le groupe des commutateurs $[E, E]$ et $v \in Z(H)$.*

La preuve est similaire à celle de l'assertion 1-B.2.

3. *Le sous-groupe E est abélien élémentaire d'ordre 3^8.*

Les générateurs de E sont conjugués entre eux, on prouve que v et α^3 sont triviaux; comme z ne centralise pas d_8, α est d'ordre 3 d'où le résultat.

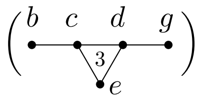
4. *Soit* $\pi : H \to H/E$*; alors* H/E *est isomorphe à* $O_8^-(3).2$ *et* $z \in E$*.*

L'image de α est triviale, on a donc $\pi(z) = 1$ (annexe **A.7**). Par suite $\pi(H)$ est un quotient de $O_8^-(3).2$, comme $\pi(H)$ contient des éléments d'ordre 3, $\pi(H)$ est isomorphe à $O_8^-(3).2$.

5. *La classe de conjugaison de* d_1 *dans* H *est une classe de Fischer de* H*; l'extension* $(*)$ $1 \to E \to H \to H/E \to 1$ *est non scindée:* θ *est un isomorphisme de* H *sur* X*.*

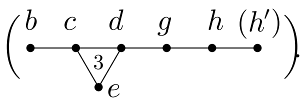
La première assertion ne présente pas de difficulté. Posons $u = d_2tt'd_5d_6d'_7d''$ où $d'' = {d'}_7^{d_1d_4d_6d_5d_4d_1}$; u est une involution centralisée par les éléments d_j $(1 \leq j \leq 7)$; le centralisateur de $\pi(u)$ dans H/E est isomorphe à $2 \times O_7(3)$ (annexe **A.6**) et $\langle z \rangle = C_H(u) \cap E$. L'assertion résulte alors de la partie A.

– Annexes

A.1. $G = 2 \times U_4(2)$ $(\simeq 2 \times O_5(3).2)$ (réf. [1], [4], [10], [11], [18]).
Ordre: $2^7.3^4.5$;
Présentation fischérienne: 

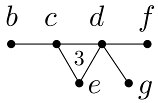
.

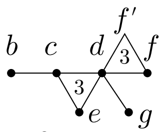
On pose $s = (cde)^2$, $t = b^{sgdc}$, $t' = b^{\bar{s}gdec}$, alors:
(i) s est un élément d'ordre 3 central dans $\langle c, d, e \rangle$,
(ii) $p = btt'eg$ est un produit de cinq involutions commutant deux à deux, p est l'involution centrale de G.
Classe de Fischer: b^G d'ordre 45.

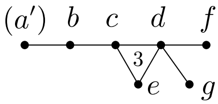
A.2. $G = 3.(2 \times O_6^-(3).2)$ (réf. [1], [10], [11], notations **A.1**).
Ordre: $2^9.3^7.5.7$.
Présentation fischérienne: 

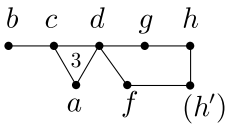
On pose $h' = h^{gtt'h}$:
(i) h' satisfait aux relations ci-dessus,
(ii) $m = btt'egh'$ est l'involution centrale de G,
(iii) $z' = (ec)(ec)^d(ec)^{dg}(ec)^{dgh}(ec)^{dghh'}$ est un élément d'ordre 3 du centre de G, si on pose $\hat{h} = h^{gg^s}$ on a aussi $z' = s\hat{h}h'h\hat{h}h'h$.
Classe de Fischer: b^G d'ordre $2.3^3.7$.

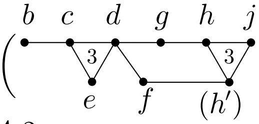
L'extension $1 \to \langle z' \rangle \to G \to 2 \times O_6^-(3).2 - 1$ est non scindée.
Si l'on adjoint la relation $z' = 1$, on obtient une présentation de $2 \times O_6^-(3).2$.

A.3. $G = O_6^+(3).2$ (réf. [11], notations **A.1**).
Ordre: $2^8.3^6.5.13$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($  , $(f^s g)^2 = 1 \Bigg)$.
Classe de Fischer: b^G d'ordre 117.

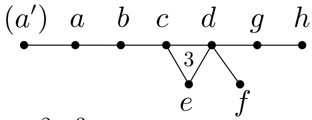
A.4. $G = 3^6 \rtimes O_6^+(3).2$ (réf. [13], notations **A.1**).
Ordre: $2^8.3^{12}.5.13$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($  , $(f^s g)^2 = 1 = (f'^s g)^2 \Bigg)$.
Classe de Fischer: b^G d'ordre $3^3.13$.
Le sous-groupe $O_3(G)$ est abélien élémentaire d'ordre 3^6.

A.5. $G = O_7(3).2$ (réf. [1], [11] , notations **A.1**).
Ordre: $2^{10}.3^9.5.7.13$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($  , $(f^s g)^2 = 1\,, \quad f^z f = 1 \Bigg)$
où $a' = a^{btt'a}$ et $z = (ed)(ed)^c(ed)^{cb}(ed)^{cba}(ed)^{cbaa'}$ (notations **A.1**).
L'élément a' satisfait aux relations ci-dessus, z est trivial.
Classe de Fischer: b^G d'ordre 378.

A.6. $G = 2 \times O_7(3)$ (réf. [1], [11], notations **A.1**).
Ordre: $2^{10}3^9 5.7.13$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($  , $(f^s g)^2 = 1\,, \quad z' = 1 \Bigg)$
(pour h' et z' voir $A.2$).
Classe de Fischer: b^G d'ordre 351.
Le centre de G est d'ordre 2, l'involution centrale est le produit de sept éléments distincts appartenant à b^G commutant deux à deux: $btt'egh'h''$ où $h'' = h'^{fdgedf}$. Si on omet la relation $z' = 1$, on obtient une présentation de l'extension centrale non scindée $3.(2 \times O_7(3))$.

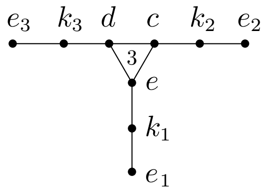
A.7. $G = O_8^-(3).2$ (réf. [1], [11], notations **A.1** et **A.2**).
Ordre: $2^{11}.3^{12}.5.7.13.41$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($ 

$, \ (f^s g)^2 = 1\,,\ j^{z'} j = 1\Bigg)$,
où h' et z' sont définis en $A.2$.
L'élément h' satisfait aux relations ci-dessus et z' est trivial.
Classe de Fischer: b^G d'ordre $3^3.41$.

A.8. $G = 2.O_8^+(3).2$ (réf. [1], [11], notations **A.1** et **A.5**).
Ordre: $2^{13}.3^{12}.5^2.7.13$.
Présentation fischérienne: $\Bigg($ 

$, \ (f^s g)^2 = 1\,,\ z = 1\Bigg)$.
Classe de Fischer: b^G d'ordre $2^2.3^3.5$.
Le centre de G est engendré par une involution qui s'écrit comme un produit de huit éléments distincts commutant deux à deux appartenant à la classe b^G.

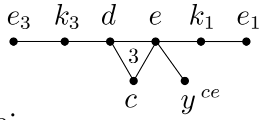
A.9. $G = Fi_{24}$ (réf. [4], [12]).
Ordre: $2^{22}.3^{16}.5^2.7^3.13.17.23.29$.
Le groupe G admet un système générateur formé d'éléments de la classe de Fischer D satisfaisant aux relations suivantes:

$(*)\ \Big\{$ 

$$\left(k_1^s k_3^{dc}\right)^2 = 1$$
$$\left({k'_1}^{k_1 e} {k'_2}^{k_2 c}\right)^2 = 1$$
$$(k'_1 e_2)^2 = (k'_2 e_3)^2 = (k'_3 e_1)^2 = 1$$
$$z_3 = 1$$

où $k'_j = k_j^{p_j k_j}$, $e'_j = e_j^{p_h e_j}$ $(= e_j^{p_i e_j})$, p_j désignant l'involution centrale du sous-groupe $\langle c, d, e, k_h, k_i\rangle$ pour $\{h, i, j\} = \{1, 2, 3\}$ (voir **A.1**) et où $z_3 = (ec)(ec)^d (ec)^{dk_3} (ec)^{dk_3 e_3} (ec)^{dk_3 e_3 e'_3}$.
L'ensemble $(*)$ et d'autres relations fournissent une présentation fischérienne de G.
Posons $y = k_1^{k'_1 e_1 e k_1}$ et $\hat{e}_j = e_j^{k_j k_j^s}$, définissons de manière similaire les éléments z_1 et z_2 et enfin appelons H_2 le sous-groupe de G engendré par e_j, k_j, d, c, e, y^{ce} pour $j = 1, 2$. On a les assertions suivantes:

(i) z_j s'écrit $z_j = s\hat{e}_j e'_j e_j \hat{e}_j e'_j e_j$, on a $z_j = 1$;

(ii) les relations 

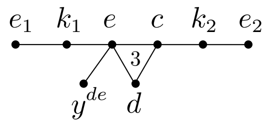
sont satisfaites;

(iii) e'_3 est dans H_2;

(iv) on a $(y^{ces}k_1)^2 = 1$;

(v) H_2 est isomorphe à $O_8^+(3).2$.

De manière semblable on note H_3 le sous-groupe engendré par

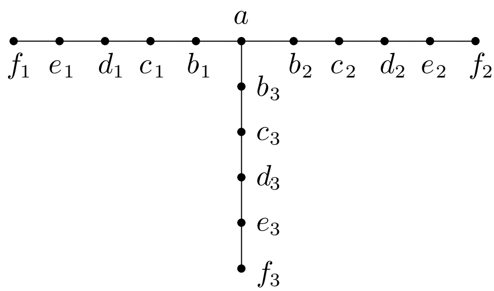


H_3 est isomorphe à H_2 et l'on vérifie que H_2 (resp. H_3) centralise e_3 et e'_3 (resp. e_2 et e'_2).

A.10. $G = Mwr2$ (réf. [1], [2], [9], [14]).

On désigne par C le groupe présenté par la donnée du graphe de Coxeter

Y_{555}

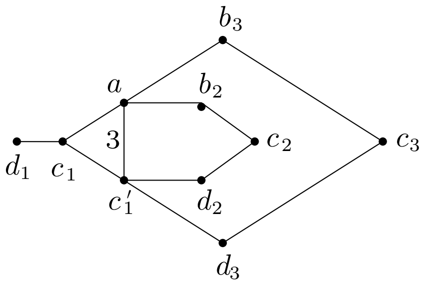


et de la relation $S = 1$ avec $S = (ab_1c_1ab_2c_2ab_3c_3)^{10}$.

On sait qu'il existe un isomorphisme de C sur le Bimonstre $Mwr2$. Introduisons les éléments suivants où $\{h, i, j\} = \{1, 2, 3\}$

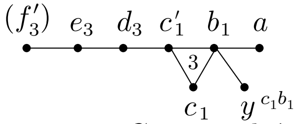
$$y = a^{b_1b_2b_3a}\ , \qquad m_j = (b_hc_hab_hb_iac_ib_i)^{b_jac_jd_j}\ ,$$
$$Y = y^{c_1c_2c_3b_1b_2b_3}\ , \quad f_{ij} = (ab_1b_2b_3c_ic_jd_i)^9\ ,$$
$$c'_j = Y^{b_jc_jab_j}$$

Alors:

(i) Les relations 

sont satisfaites;

(ii) La relation $S = 1$ impose: $(Ya)^3 = 1$, $Y^{m_j} Y = 1$, $f_{12} = f_{13}$, $f_{23} = f_{21}$, $f_{32} = f_{31}$;

(iii) On a les relations 

et $(a^\sigma y^{c_1 b_1})^2 = 1$ avec $\sigma = c_1' c_1 b_1 c_1' c_1 b_1$, le sous-groupe C_3 engendré par les éléments ci-dessus est isomorphe à $O_7(3).2$; l'élément supplémentaire f_3' est égal à f_3 et l'élément $z = \sigma e_3 \hat{e}_3 f_3 e_3 \hat{e}_3 f_3$ est trivial (**A.5**).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.H. Conway – R.T. Curtis – S.P. Norton – P.A. Parker – R.A. Wilson: *An ATLAS of finite groups*, London and New York Clarendon Press Oxford, 1985.

[2] J.H. Conway – S.P. Norton – L.H. Soicher: *The Bimonster, the group Y_{555} and the projective plane of order 3*, in "Computers in Algebra" Dekker New York, 1988.

[3] H. Cuypers – J.I. Hall: *3-Transposition groups of orthogonal type*, J. Algebra **152** (1992), 342-373.

[4] B. Fischer: *Finite groups generated by 3-transpositions*, University of Warwick, Lectures, 1969.

[5] R.L. Griess: *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982), 1-102.

[6] J.I. Hall: *3-Transposition groups with non central normal 2-subgroups*, J. Algebra **146** (1992), 49-76.

[7] J.I. Hall – L.H. Soicher: *Presentation of some 3-transposition groups*, Com. in Algebra, **23** (7) (1995), 2517-2559.

[8] R.A. Liebler – W. Kantor: *The rank 3 permutation representations of finite classical groups*, Trans., A.M.S. **271** vol. 1 (1982), 1-69.

[9] S.P. Norton: *Constructing the Monster*, Proceedings of groups and Combinatorix M. Liebeck and J. Saxl eds. L.M.S. Lecture Notes, 1992.

[10] M.M. Virotte-Ducharme: *Couples fischériens presque simples*, (thèse), 1985 Paris 7.

[11] M.M. Virotte-Ducharme: *Présentation de certains couples fischériens de type classique*, Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 227-270. Réctificatif au même article. Bull. Soc. Math. France **122** (1994), 147-148.

[12] M.M. Virotte-Ducharme: *Présentation des groupes de Fischer II*, Geom. Dedicata **45** (1993), 121-162.

[13] M.M. Virotte-Ducharme: *Présentations de couples fischériens de type orthogonal admettant un 3-groupe normal non central: cas scindé*, Boll. U.M.I. **9B** (7) (1995), 105-151. Errata au même article Boll. U.M.I. **9B** (7) (1995), 1043.

[14] M.M. Virotte-Ducharme: *Some Y-groups*, Geom. Dedicata, **65** (1997), 1-30.

[15] M.M. Virotte-Ducharme – F. Zara: *Les involutions dans les couples fischériens de type classique*, Notes non publiées, 1985.

[16] R.A. Wilson: *The local subgroups of Fischer groups*, J. London. Math. Soc. (2) **36** (1987), 77-94.

[17] R.A. Wilson: *The odd local subgroups of the Monster*, J. Aust. Math. Soc. série A, **44** (1988), 1-16.

[18] F. Zara: *Classifications des couples fischériens*, (thèse) 1985 Amiens.

[19] F. Zara: *Les involutions du groupe de Fischer Fi_{24}*, Notes non publiées, 1985.

Lavoro pervenuto alla redazione il 18 marzo 1996
ed accettato per la pubblicazione il 21 settembre 1996.
Bozze licenziate il 7 maggio 1997

Indirizzo dell'Autore:

M-M. Virotte Ducharme – Équipe des Groupes Finis U.F.R. de Mathématiques - Université Paris 7 DENIS DIDEROT - 2 Place Jussieu - 75251 PARIS Cedex 05