Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 18, Roma (1998), 1-63

Quelques applications de la théorie des représentations en géométrie spectrale

H. PESCE

Hubert Pesce passed away on August 7, 1997. He wrote this text on the occasion of his "Habilitation à diriger des recherches" (Grenoble February 20, 1997); this is his last publication.

This survey places Hubert's results in their context, the so-called isospectral problem. Due to Hubert's natural shyness it is written with much modesty; the reader will however easily perceive that Hubert's contribution to the subject has been important.

Gérard Besson

Presentazione: *Un problema centrale in geometria riemanniana è quello di classificare le varietà riemanniane a partire da uno o più invarianti di carattere globale. Sono considerati in particolare tre invarianti: lo spettro delle lunghezze delle geodetiche periodiche, lo spettro del laplaciano, la rappresentazione quasi-regolare.*
Dopo la costruzione (*Milnor 1964*) *di esempi di varietà riemanniane non isometriche aventi però lo stesso spettro del laplaciano, nel 1985 Sunada, utilizzando metodi di teoria delle rappresentazioni, trovò una condizione algebrica sufficiente per l'isospettralità di due quozienti di una varietà riemanniana rispetto a due sottogruppi discreti di un gruppo di isometrie della varietà. Data una varietà riemanniana* $(X, \mathbf{m})$ *(che ammetta un quoziente compatto) e fissato un gruppo* G *di isometrie di* $(X, \mathbf{m})$, *i problemi principali trattati in questo articolo sono:*

1) *sotto quali condizioni due varietà del tipo* $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m})$ *e* $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m})$, *essendo* Γ_1 *e* Γ_2 *due sottogruppi discreti di* G, *sono isospettrali?*

2) *fissato un sottogruppo discreto* Γ_0 *di* G, *quali sono le principali proprietà dell'insieme di tutti i sottogruppi* Γ *di* G *tali che le varietà* $(\Gamma_0 \backslash X, \mathbf{m})$ *e* $(\Gamma \backslash X, \mathbf{m})$ *siano isospettrali?*

3) *È possibile ottenere un inverso "generico" del teorema di Sunada?*

A.M.S. Classification: 58G25 – 58G28 – 43A85 – 22E27 – 22E40

Sommaire:

– Introduction

Un des buts de la géométrie riemannienne est d'arriver à classifier les variétés riemanniennes à partir d'un, ou plusieurs invariants, que l'on s'est donné (un nombre, un groupe, un tenseur...). Un premier invariant qui l'on peut considérer est la courbure. Elle contient beaucoup d'informations locales et il existe de profondes relations entre la courbure et la topologie d'une variété (théorèmes de Meyers et Hadamard-Cartan, théorème de la sphère de Berger...). Cependant, la courbure ne permet pas de déterminer complètement une variété. Par exemple, deux tores plats ne sont pas forcément isométriques ou, de manière plus générale, deux variétés localement isométriques ne sont pas forcément isométriques. On est donc amené à considérer des invariants qui prennent en compte la globalité de la variété. Parmi ceux-ci, on peut citer le volume, le diamètre et l'entropie. Ces objets ont été étudiés de manière intense et des résultats spectaculaires ont été obtenus, permettant d'identifier certaines structures géométriques (variétés localement symétriques) comme des points critiques de fonctionnelles judicieusement choisies. Les invariants qui vont nous intéresser sont eux aussi de nature globale. Bien qu'étant tous les trois définis à partir de la métrique, ils peuvent paraître, à première vue, de nature assez différente. Alors que le *spectre des longueurs* est un objet purement géométrique, le *spectre du laplacien* se définit à travers un objet analytique (un opérateur différentiel) naturellement associé à la métrique. Finalement, le dernier objet que nous allons considérer est de nature algébrique puisque c'est une *représentation d'un groupe d'isométries*. Le but de ce texte est d'essayer d'expliquer les relations qui existent entre ces trois invariants et de savoir dans quelle mesure ils déterminent la variété.

1 – Quels invariants?

On considère une variété X munie d'une métrique $\mathbf{m}$. On peut définir à l'aide de cette métrique les géodésiques: ce sont les courbes qui, localement, réalisent la distance entre deux points (on considèrera toujours des géodésiques paramétrées par la longueur d'arc). Cette notion de géodésique permet de définir les deux premiers objets que l'on étudiera par la suite.

Le spectre des longueurs. On le définit comme l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de $(X, \mathbf{m})$. Un nombre $l \geq 0$ est donc dans le spectre des longueurs s'il existe une géodésique c de $(X, \mathbf{m})$ telle que pour tout nombre réel t, on ait $c(t+l) = c(t)$. Le problème est de définir la multiplicité d'une longueur l. On peut la définir comme étant égale au nombre de géodésiques périodiques de longueur l. On peut aussi définir la multiplicité de l comme étant égale au nombre de classes d'homotopie libre dont la plus petite géodésique périodique est de longueur l. Notons que toutes ces notions coincident en courbure négative. Nous préciserons suivant le cas la définition utilisée.

Le spectre du laplacien. On peut définir le laplacien sur une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ de la même manière que dans $\mathbb{R}^n$ [6]. Si x est dans X et si $\{c_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une famille de $n = \dim(X)$ géodésiques telles que $c_i(0) = x$ et $\{\dot{c}_i(0)\}_{1\leq i\leq n}$ soit une base orthonormée de T_xX, on définit le laplacien d'une fonction u au point x par la formule $\Delta u(x) = -\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} u \circ c_i(t)|_{t=0}$. L'opérateur ainsi défini est un opérateur elliptique et auto-adjoint par rapport à la mesure riemannienne. On vérifie facilement que $\Delta = d^*d$ où d est la différentielle extérieure et d^* son adjoint formel pour les produits scalaires induits par $\mathbf{m}$. Le laplacien est donc un opérateur positif. Si la variété X est compacte, son spectre est discret, les valeurs propres ont toutes une multiplicité finie et elles tendent vers $+\infty$. On notera $\mathrm{Spec}(X, \mathbf{m}) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots\}$ le spectre de $(X, \mathbf{m})$.

La représentation quasi-régulière. Les représentations qui nous intéresseront par la suite sont les représentations induites. Nous en rappellerons les principales propriétés dans la première partie. Nous allons juste rappeler ici la définition d'une représentation quasi-régulière. On considère un groupe de Lie G et Γ un sous-groupe de G, supposé dicret et co-compact. Dans ce cas, il existe une unique mesure sur $\Gamma\backslash G$ invariante par G (à constante multiplicative près) et on peut considérer l'espace $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$. Cet espace est l'espace de la représentation π_Γ^G qui nous intéresse; elle est définie par $\pi_\Gamma^G(g)\varphi(x) = \varphi(xg)$, pour g dans G, x dans $\Gamma\backslash G$ et φ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$. Cette représentation s'appelle la représentation quasi-régulière.

Maintenant que nous avons défini de maniére précise les objets qui nous intéressent, nous allons expliquer comment les méthodes de représentation ont été introduites dans l'étude des relations entre le spectre d'une variété et sa géométrie.

2 – Quelques étapes importantes

Le problème de savoir si deux variétés fermées ayant même spectre du laplacien sont forcément isométriques est un des problèmes classiques de la géométrie riemannienne. Ce problème a été rendu populaire par Mark Kac qui, à travers la question “Peut-on entendre la forme d'un tambour?”, demandait si deux domaines planaires ayant même spectre du laplacien (avec la condition de Dirichlet) sont forcément isométriques. Il est à noter que l'article de Kac date de 1966 et que deux ans auparavant, Milnor avait construit deux tores plats de dimension 16 isospectraux et non isométriques (voir [4] pour les références bibliographiques). L'idée de Milnor était d'interpréter dans un contexte géométrique les exemples, construits par Witt en 1941, de réseaux de $\mathbb{R}^{16}$ non isométriques et ayant même fonction théta. La méthode utilisée pour montrer l'égalité des fonctions théta des deux réseaux est difficilement transposable dans un cadre général puisqu'elle est basée sur un argument de formes modulaires. Ceci est caractéristique des exemples de variétés isospectrales et non isométriques construits par la suite (tores plats de dimension inférieure par Kneser et Kitaoka, espaces lenticulaires par Ikeda). En effet, ces exemples ont été trouvés par des méthodes de théorie des nombres, spécifiques à chacun d'eux. Un premier changement apparut en 1979 avec la construction, par Vignéras, de variétés hyperboliques de dimension 2 et 3, isospectrales et non isométriques [55]. Ces exemples furent importants pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ce furent les premiers exemples en dimension 2; par ailleurs les exemples de dimension 3 étaient les premiers exemples de variétés isospectrales et non homéomorphes. La deuxième raison est que, pour la première fois, l'isospectralité des variétés $\Gamma_1\backslash H^n$ et $\Gamma_2\backslash H^n$ était obtenue comme conséquence de l'équivalence de deux représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ avec $G = \mathrm{PSL}(2,k)$ et $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Il semble cependant que le caractère général de ce phénomène n'ait pas été remarqué à l'époque et il a fallu attendre 1985 pour voir apparaître le résultat fondamental suivant:

PROPOSITION 1. *Soit G un groupe d'isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ soient des variétés compactes. Si l'on munit ces deux variétés de la métrique induite par $\mathbf{m}$ et si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes, alors:*

a) *Les variétés $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ ont même spectre du laplacien,*
b) *L'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de ces deux variétés est le même. Si, de plus, G est compact, il existe une bijection entre l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_1\backslash X$ et l'ensemble des géodésiques périodiques de $\Gamma_2\backslash X$, bijection qui préserve les longueurs.*

Ce résultat est dû à SUNADA [53]. Notons que dans son article, Sunada ne considère que des groupes finis. Le cas général s'obtient en combinant des résultats de DETURCK-GORDON et BÉRARD ([15], [3]). Dans la quatrième partie, nous ferons le point sur les preuves de ce résultat connues à ce jour. Avant d'aller plus loin, il faut remarquer que cette proposition est la transposition dans un cadre géométrique d'un résultat classique de théorie des nombres. En effet, on peut trouver dans le livre "Algebraic number therory" de Cassels et Frohlich, sous la forme d'un exercice, le résultat suivant (p. 363, Exercice 6.4):

Soit L une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}$ et $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Soient K_1 et K_2 deux sous-corps de L correspondants aux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 de G. Montrer que K_1 et K_2 ont même fonction zéta si et seulement si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes.

Avant d'aller plus loin, nous allons expliciter les analogies utilisées dans [53]. Tout d'abord, rappelons que la fonction zéta d'un corps de nombre K est définie pour $s > 1$ par $\zeta_K(s) = \sum N(\mathfrak{a})^{-s}$, la somme portant sur les idéaux non nuls de l'anneau des entiers de K. Le résultat concernant le spectre des longueurs est, d'après Sunada, une tautologie si l'on a en tête la correspondance entre les idéaux premiers et les géodésiques primitives. Le résultat qui concerne le spectre du laplacien est, me semble-t-il, plus formel et repose sur des considérations abstraites d'invariance que l'on applique aux fonctions propres d'un revêtement. Notons que l'on peut renforcer l'esthétique de l'analogie entre les deux résultats en définissant la fonction zéta d'une variété compacte $(X, \mathbf{m})$ par la formule $\zeta_{(X,\mathbf{m})}(s) = \mathrm{trace}(\Delta^{-s})$ pour $s > \dim(X)/2$ et en remarquant que deux variétés sont isospectrales si et seulement si elles ont même fonction zéta. Il y a cependant une différence fondamentale entre ces deux résultats: alors que dans le contexte de la théorie des nombres, l'égalité des fonctions zéta est équivalente à l'équivalence des représentations, dans le contexte géométrique, l'égalité des fonctions zéta est une conséquence de l'équivalence des représentations mais il existe des nombreux exemples où la réciproque n'est pas vraie. Ce problème sera abordé dans les deux dernières parties de ce texte.

Le résultat de Sunada est à la source de nombreux exemples de variétés isospectrales et non isométriques. Nous ferons le point dans la première partie sur les exemples de groupes G possédant des sous-groupes donnant lieu à des représentations équivalentes et non conjugués dans G. Cependant, on peut déja dire que ces exemples sont de deux sortes. De nombreux exemples où le groupe G est fini viennent de la théorie des nombres (le premier date de 1926). C'est en utilisant ces exemples de groupes finis que Gordon, Webb et Wolpert ont construit les premiers exemples de domaines plans isospectraux et non isométriques, répondant ainsi par la négative à la question de Mark Kac [23]. La deuxième catégorie d'exemples a été introduite par GORDON et WILSON dans le cadre des groupes de Lie résolubles [24]. Leur idée est de trouver un condition simple pour qu'un automorphisme φ de G ait la propriété que si Γ est un sous-groupe discret et co-compact de G, alors le couple constitué de Γ et $\varphi(\Gamma)$ vérifie les hypothèses du théorème de Sunada. La description du dual d'un tel groupe (méthode de Kirillov) les amène à introduire un groupe d'automorphismes qu'ils appellent le groupe des automorphismes presque intérieurs par rapport à Γ et qu'ils notent $\mathrm{AIA}(G, \Gamma)$, groupe dont les éléments ont la propriété désirée. On peut alors considérer un groupe à un paramètre $\{\varphi_t\}$ d'éléments de $\mathrm{AIA}(G, \Gamma)$ et on obtient une famille continue de sous-groupes $\Gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ tels que les représentations

$\pi^G_{\Gamma_t}$ sont toutes équivalentes et qui, dans certains cas, ne sont pas deux à deux conjugués. Si l'on prend pour variété le groupe G muni d'une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$ et si l'on remarque que $(\varphi_t(\Gamma)\backslash G, \mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash G, \varphi_t^*\mathbf{m})$ sont isométriques, on obtient les premiers exemples de déformations isospectrales non triviales. Les seuls résultats concernant les déformations isospectrales connus en 1984 étaient des résultats de non-existence (Guillemin-Kazhdan) et il semble que l'existence de telles déformations fut une surprise. Il est à noter que les déformations de Gordon et Wilson sont antérieures au théorème de Sunada et il semble que, comme pour les exemples de Vignéras, le caractère général de la condition portant sur l'équivalence des représentations ait été masqué par la spécifité du contexte géométrique.

A l'exception d'un exemple construit par Gordon [22], tous les couples de variétés isospectrales et non isométriques connus à ce jour sont localement isométriques, c'est-à-dire qu'ils ont un revêtement riemannien commun. On connait actuellement peu de résultats généraux reliant le spectre d'une variété et sa géométrie (ou sa topologie); il est donc raisonnable de se limiter, dans un premier temps au cadre des variétés localement isométriques. Nous verrons que cette limitation ne suffit malheureusement pas à répondre à toutes les questions qui se posent naturellement. Par la suite, on considérera une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et on supposera qu'elle admet un quotient compact, c'est-à-dire qu'il existe un sous-groupe discret Γ du groupe des isométries de $(X, \mathbf{m})$ tel que $\Gamma\backslash X$ soit une variété compacte. Ce quotient sera toujours muni de la métrique induite par $\mathbf{m}$, métrique que l'on notera encore $\mathbf{m}$. Avec ces notations, on peut formuler le problème qui nous intéresse de la manière suivante:

> A quelle condition deux variétés du type $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont-elles isospectrales?

Pour étudier ce problème, nous allons fixer un groupe G d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ et un sous-groupe discret Γ_0 de G. Le choix le plus canonique est de prendre pour G le groupe de toutes les isométries mais, dans certaines situations, d'autres choix sont aussi naturels: ainsi, si $(X, \mathbf{m})$ est un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche, on peut choisir comme groupe G le groupe des translations. On considère maintenant l'ensemble des sous-groupes Γ de G qui sont tels que les variétés

$(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectrales. Nous noterons $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ cet ensemble. Nous allons maintenant formuler les questions qui vont nous intéresser:

1) Que peut-on dire, en général, de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$?
2) Quelle propriété algébrique de G permet d'obtenir des informations supplémentaires ?
3) Peut-on, dans certains cas, expliciter l'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$?

Le but de ce texte est de donner quelques débuts de réponses à ces questions. La première partie est consacrée aux outils que l'on utilisera par la suite: notions de bases sur les représentations induites, historique du problème de Gelfand concernant les sous-groupes induisant des représentations équivalentes, formule des traces de Selberg, noyau de la chaleur et formules de traces géométriques. Le deuxième chapitre est consacrée à l'étude des propriétés générales de l'ensemble des réseaux isospectraux. Il existe une topologie naturelle sur l'ensemble des sous-groupes d'un groupe de Lie et on montre que $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ est compact pour cette topologie. Sous une hypothèse supplémentaire portant sur l'espace des représentations des réseaux de G, vérifiée par tous les groupes que l'on considère usuellement, on montre que $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ est muni d'une structure d'ensemble analytique et n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs. L'influence des propriétés algébriques du groupe G est étudiée dans le troisième chapitre. Guidés par le théorème de décomposition de Lévi, on commence par étudier deux cas particuliers. On étudie tout d'abord le cas où G est semi-simple. L'existence de théorèmes de rigidité nous mène à montrer des résultats de finitude (*i.e.* $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ est une réunion finie de classes de conjugaison). Dans le cas où G est résoluble, l'existence des déformations de Gordon et Wilson ne permet pas d'espérer montrer un tel résultat et on en est réduit à tenter de décrire les composantes connexes par arcs de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, c'est-à-dire les déformations isospectrales de réseaux. On est donc amené à étudier la géométrie spectrale des nilvariétés de rang deux et on montre que, dans ce cas, les seules déformations isospectrales sont celles de Gordon et Wilson. On regarde ensuite en détail le cas du groupe de Heisenberg, l'outil principal étant une formule de Poisson. Dans la quatrième partie, on commence à s'attaquer au problème de la description de l'ensemble des réseaux isospectraux. On sait déja que $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ contient tous les réseaux Γ tels que les représentations $\pi^G_{\Gamma_0}$ et π^G_{Γ} soient équivalentes. Les exemples d'espaces lenticulaires isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions, mais pas pour le laplacien opérant sur les formes différentielles, montrent que tous les exemples de variétés isospectrales ne sont pas construits à l'aide du théorème de Sunada; il était donc naturel d'essayer d'affaiblir les hypothèses du théorème de Sunada. On est ainsi amené à injecter un peu de géométrie dans ce théorème , plus précisément un résultat portant sur la structure des actions propres, et on montre qu'il suffit d'imposer l'équivalence d'une sous-représentation de π^G_{Γ}. La condition ainsi obtenue est, *à priori*, plus faible et permet dans certains cas de décrire, en terme d'équivalence de représentations, l'ensemble des réseaux isospectraux. On continue dans le dernier paragraphe à essayer de caractériser, en terme d'équivalence de représentations, les exemples de variétés isospectrales. Comme il semble difficile d'obtenir un résultat d'ordre général, on est obligé de changer de point de vue. Une première idée consiste à imposer aux variétés d'être non seulement isospectrales pour le laplacien opérant sur les fonctions, mais aussi pour tout opérateur différentiel naturel (*i.e.* qui commute avec les isométries). On dit alors que les variétés sont fortement isospectrales. Le résultat obtenu est que deux variétés hyperboliques (resp. elliptiques) fortement isospectrales sont forcément construites à l'aide du théorème de Sunada. Le deuxième point de vue adopté est d'obtenir un réciproque générique au théorème de Sunada. Pour cela on fixe une variété compacte X et un groupe fini G opérant sur X et on considère l'ensemble $\mathcal{M}^G$ des métriques invariantes par G, c'est-à-dire l'ensemble des métriques pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Sunada. On montre alors que pour un ouvert dense de $\mathcal{M}^G$, la condition du théorème de Sunada est une condition nécessaire et suffisante. On obtient aussi des résultats partiels lorsque G est compact.

1 – Quelques outils

1.1 – Une question de notations

Dans cette courte partie, on va fixer quelques notations qui apparaîtront tout au long de ce texte. Rappelons tout d'abord que si G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et si μ_G est une mesure de Haar invariante à gauche sur G, alors ([15], p. 1070) il existe une unique mesure $\mu_{G\backslash X}$ sur $G\backslash X$ telle que pour toute fonction φ qui est C^∞ et à support compact on ait: $\int_X \varphi(x)d(x) = \int_{G\backslash X}(\int_G \varphi(g^{-1}\cdot x)d\mu_G(g))d\mu_{G\backslash X}(x)$. Notons que ce résultat s'applique en particulier quand $(X, \mathbf{m})$ est un groupe de Lie muni d'une métrique invariante à gauche et G un sous-groupe discret que l'on note alors Γ. On prend alors comme mesure μ_Γ la mesure de dénombrement. D'autre part, si H est un sous-groupe fermé de G et si ces deux groupes sont unimodulaires, alors la mesure obtenue sur $H\backslash G$ est $G-$invariante.

1.2 – Un problème de représentations induites

Dans cette partie, on va rappeler la notion de représentation induite et quelques résultats qui nous serons utiles par la suite. Toutes les représentations que nous considèrerons seront unitaires et continues. Le problème est d'essayer de comprendre les relations existant entre les représentations d'un groupe G et celles d'un sous-groupe H. Partant d'une représentation σ de G, on obtient facilement une représentation de H en considérant la restriction de σ à H, que l'on notera $\mathrm{Res}_H^G(\sigma)$. L'idée du procédé d'induction est d'avoir une méthode qui permette de construire une représentation de G à partir d'une représentation de H et qui soit, dans un certain sens, duale à l'opération de restriction.

On considère un groupe de Lie G et un sous-groupe fermé H. Bien que cela ne soit pas nécessaire, on supposera pour simplifier H et G unimodulaires, hypothèse qui sera toujours vérifiée dans les cas que l'on considèrera par la suite. L'unimodularité de H et G implique l'existence d'une mesure G-invariante $\mu_{H\backslash G}$ sur $H\backslash G$. Si σ est une représentation de H dans un espace de Hilbert V dont le produit hermitien est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, on introduit l'ensemble W_0 des fonctions φ continues sur G et à valeurs dans V, qui sont telles que pour tout g dans G et h dans H, on ait $\varphi(hg) = \sigma(h)\varphi(g)$ et telles que l'intégrale

$$(\varphi \mid \varphi) = \int_{H\backslash G} \langle \varphi(g), \varphi(g)\rangle d\mu(g)$$

soit finie. L'espace W obtenu en complétant W_0 à l'aide du produit hermitien $(\cdot \mid \cdot)$ est l'espace de la représentation π de G définie comme suit: $(\pi(g)(\varphi))(x) = \varphi(xg)$ si φ est dans W et si x, g sont dans G. La représentation que l'on vient de définir s'appelle la représentation induite par σ et on la notera $\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$.

La dualité entre les opérations de restriction et d'induction s'observe de manière remarquable dans le cas des groupes compacts, à travers le théorème de réciprocité de Frobenius. Par la suite, si τ est une représentation irréductible et si ρ est une représentation complètement réductible d'un même groupe, on notera $[\tau : \rho]$ la multiplicité de τ dans ρ. On peut maintenant énoncer le théorème de réciprocité de Frobenius.

THÉORÈME 1. *Soient G un groupe compact et H un sous-groupe fermé de G. Si τ est une représentation irréductible de G et ρ une représentation irréductible de H, alors:*

$$[\rho : \mathrm{Res}_H^G(\tau)] = [\tau : \mathrm{Ind}_H^G(\rho)].$$

Dans les applications géométriques, on considèrera souvent le cas où G est un groupe de Lie admettant un sous-groupe discret et cocompact Γ. L'hypothèse d'unimodularité est alors automatiquement vérifiée et on notera par la suite $\pi_\Gamma^G = \mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma)$ la représentation de G induite par 1_Γ, la représentation triviale de Γ. Cette représentation s'appelle la représentation quasi-régulière et son espace s'identifie naturellemnt à $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma\backslash G)$. Un problème fondamental pour la suite est d'obtenir des informations sur Γ à partir de la représentation π_Γ^G. Il est clair d'après les définitions que la classse d'isomorphisme de π_Γ^G ne dépend que de classe de conjugaison de Γ dans G et une question naturelle est de savoir si l'affirmation réciproque est vraie:

La représentation π_Γ^G détermine-t-elle Γ à conjugaison près dans G?

Ce problème a été considéré par GELFAND [21] dans les années 60 et celui-ci a conjecturé, dans le cas où $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, que la réponse était positive. Le premier réflexe pour attaquer ce problème est de calculer le caractère des représentations considérées. Le but de la formule des traces de Selberg est justement de calculer le caractère de telles représentations.

La difficulté que l'on rencontre, sauf dans le cas où Γ est d'indice fini dans G, est que l'espace de la représentation π_Γ^G est de dimension infinie et qu'il n'existe pas dans ce cadre de notion de trace pour les opérateurs unitaires. On est donc obligé d'utiliser un chemin détourné. On fixe une fois pour toutes une mesure de Haar μ_G bi-invariante et pour chaque fonction φ dans $C_0^\infty(G)$, l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact, on introduit l'opérateur $\pi_\Gamma^G(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi_\Gamma^G(g)d\mu_G(g)$. Cet opérateur est à trace et l'application $\varphi \mapsto \mathrm{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi))$ est une distribution qui s'étend en une mesure sur G que l'on va noter χ_Γ^G. C'est cette mesure que l'on appelle le caractère de la représentation. Le problème est d'obtenir une expression de cette mesure qui redonne les formules de caractères connues lorsque les groupes considérés sont finis.

Nous allons tout d'abord introduire quelques notations. Si g (resp. γ) est dans G (resp. Γ), on note $[g]_G$ (resp. $[\gamma]_\Gamma$) sa classe de conjugaison dans G (resp. Γ) et G_g (resp. Γ_γ) son centralisateur dans G (resp. Γ). Il est facile de vérifier que si $\Gamma\backslash G$ est compact, alors $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ l'est aussi. Si g est conjugué à un élément de Γ, on normalise la mesure de Haar sur G_g comme suit: on fixe dans $[g]_G$ un élément g_0 et une mesure de Haar $\mu_{G_{g_0}}$ sur G_{g_0} et on choisit comme mesure de Haar sur $G_{xg_0x^{-1}}$ la mesure $\mu_{G_{xg_0x^{-1}}}$ qui est l'image directe de $\mu_{G_{g_0}}$ par l'automorphisme intérieur I_x défini par $I_x(g) = xgx^{-1}$ pour $g \in G$. On peut maintenant définir une fonction centrale r_Γ sur G en posant $r_\Gamma(g) = \sum_{[\gamma]_\Gamma \subset [g]_G} \mu_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$, si $[g]_G$ rencontre Γ et $r_\Gamma(g) = 0$ sinon. La formule des traces de Selberg peut alors s'énoncer [56]:

Proposition 2. *Soient G un groupe de Lie et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G. Le caractère de la représentation π_Γ^G est la mesure χ_Γ^G telle que, pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)$, on ait l'égalité:*

$$\chi_\Gamma^G(\varphi) = \mathrm{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi)) = \sum_{[g]_G} r_\Gamma(g) \int_{G_g\backslash G} \varphi(u^{-1}gu)d\mu_{G_g\backslash G}(u).$$

On utilise maintenant le fait que deux représentations à trace sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractère et on déduit [3]:

Corollaire 3. a) *Soient G un groupe de Lie, Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes de G discrets et co-compacts, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes si et seulement si les fonctions centrales r_{Γ_1} et r_{Γ_2} définies précédemment sont égales.*

b) *Dans le cas où le groupe G est compact, cette condition est vérifiée si et seulement si pour toute classe de conjugaison $[g]_G$, on a: $\sharp([g]_G \bigcap \Gamma_1) = \sharp([g]_G \bigcap \Gamma_2)$.*

La formule des traces de Selberg et ses corollaires ont été des outils constamment utilisés dans l'étude du problème de Gelfand. On sait, depuis les exemples construits par Vignéras dans les années 80, que même dans le cas particulier de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, la réponse au problème de Gelfand est négative et il est intéressant de faire le point sur les méthodes que l'on connait pour construire des exemple de sous-groupes non-conjugués qui induisent des représentations équivalentes.

1. Les groupes finis. Ces exemples ont été construits initialement dans le but d'obtenir des corps de nombres non isomorphes ayant même fonction ζ. Dans tous les cas, la preuve de l'équivalence des représentations se fait en utilisant la condition b) du corollaire précédent. Il semble que le premier exemple ait été construit par Gassmann dès 1926 [20]. Nous allons donner deux exemples:

Exemple 1. On considère un nombre premier p et on pose $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ avec $n \geq 3$. On introduit maintenant le sous-groupe Γ_1 constitué des matrices qui admettent le premier vecteur de la base canonique de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ comme vecteur propre et on désigne par Γ_2 le sous-groupe constitué des matrices transposées de Γ_1. On vérifie alors que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes, mais que ces deux sous-groupes ne sont pas conjugués dans G.

Exemple 2. On considère un nombre premier p, on pose $X = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ et on désigne par G le groupe des permutations de X. Il existe sur X deux structures de groupe différentes: la première est la structure additive usuelle et la deuxième est la loi du groupe de Heisenberg obtenue en réalisant X comme le groupe des matrices triangulaires supérieures, à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Comme tout groupe s'injecte dans son groupe des permutations à travers les translations à gauche, ces deux structures de groupe différentes donnent lieu à deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 de G. On vérifie que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes mais que ces deux sous-groupes ne sont pas conjugués dans G. Il se trouve que ces deux groupes ne sont pas isomorphes car l'un est commutatif alors que l'autre ne l'est pas.

2. Le groupe orthogonal. Des exemples ont été construits par Ikeda [27]. Les groupes considérés sont ceux qui apparaissent dans la classification de Vincent des sous-groupes finis des groupes orthogo-

naux sous le nom de groupe de type 1 (c'est-à-dire dont tous les sous-groupes de Sylow sont cycliques). Dans son article, Ikeda ne parle pas de représentations mais se place du point de vue des fonctions génératrices. Cependant la condition qu'il obtient pour assurer l'égalité des fonctions génératrices est équivalente à l'égalité des caractères des représentations induites. Nous allons donner un exemple de sous-groupes finis Γ_1 et Γ_2 de $G = O(10)$ tels que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ soient équivalentes et qui ne sont pas conjugués dans $O(10)$. Pour cela, on considère le groupe abstrait engendré par deux éléments A et B ayant pour seules relations $A^{11} = B^{25} = 1$ et $BAB^{-1} = A^4$. Le groupe Γ ainsi obtenu est d'ordre 275. On va construire deux représentations fidèles et orthogonales σ_1 et σ_2 de Γ dans $O(\mathbb{R}^{10})$ telles que, si on pose $\Gamma_i = \sigma_i(\Gamma)$ pour $i = 1, 2$, alors les groupes obtenus soient des exemples non triviaux. Pour cela on identifie $\mathbb{R}^{10}$ avec $\mathbb{C}^5$ et on considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{10}$ tel que, si $\{e_1, \ldots, e_5\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^5$, alors $\{e_1, ie_1, \ldots, e_5, ie_5\}$ est une base orthonormale pour ce produit scalaire. Posons $\xi = \exp(\frac{2\pi i}{11})$, $\eta = \exp(\frac{2\pi i}{5})$ et définissons $\sigma_i(A)$ et $\sigma_i(B)$ comme étant les endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^5$ tels que:

- $\sigma_i(A)e_j = \xi^{4^{j-1}} e_j$ pour $j = 1 \ldots 5$ et $i = 1, 2$.
- $\sigma_i(B)e_1 = \eta^i e_1$ et $\sigma_i(B)e_j = e_{j-1}$ pour $j = 2 \ldots 5$ et $i = 1, 2$.

On peut montrer que σ_1 et σ_2 s'étendent en des représentations orthogonales, irréductibles et injectives de Γ. Si l'on pose $\Gamma_i = \sigma_i(\Gamma)$, alors les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes mais Γ_1 et Γ_2 ne sont pas conjugués dans $O(10)$.

3. Les groupes semi-simples. Il existe deux méthodes pour construire des exemples dans le cas où le groupe G est semi-simple et sans facteur compact.

Exemples arithmétiques. Ces exemples ont été construits en 1980 par Vignéras [55]. Les exemples sont construits à l'aide d'algèbres de quaternions définies sur un corps de nombres convenablement choisi. Ces exemples donnent lieu à des sous-groupes discrets et co-compacts de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})^r \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})^s$, non conjugués, et induisant des représentations équivalentes. La preuve repose sur un corollaire de la formule des traces de Selberg et l'interprétation arithmétique de l'égalité des fonctions r_{Γ_1} et r_{Γ_2}.

Utilisation des groupes finis. L'idée est d'utiliser les exemples connus de groupes finis qui ont été donnés précédemment. Pour cela, on considère deux sous-groupes H_1 et H_2 d'un groupe fini H tels que les représentations $\pi^H_{H_1}$ et $\pi^H_{H_2}$ soient équivalentes. Si Γ est sous-groupe discret et co-compact d'un groupe de Lie G tel qu'il existe un homomorphisme surjectif α de Γ vers H, on pose $\Gamma_i = \alpha^{-1}(H_i)$ pour $i = 1, 2$. On utilise le fait que $\mathrm{Ind}^G_\Gamma(1_{\Gamma_i}) = \mathrm{Ind}^G_\Gamma(\mathrm{Ind}^\Gamma_{\Gamma_i}(1_{\Gamma_i}))$ et on montre que l'équivalence des représentations $\pi^H_{H_1}$ et $\pi^H_{H_2}$ est équivalente à celle des représentations $\pi^\Gamma_{\Gamma 1}$ et $\pi^\Gamma_{\Gamma_2}$. On en déduit que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes. Le problème de savoir si ces groupes sont conjugués est en général plus délicat. Cette méthode générale a principalement été utilisée dans le cas des groupes semi-simples. Le premier cas traité a été celui de $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (Brooks-Tse [9], Buser [10], Sunada [53]), puis $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (Reid [49]) et enfin une classe importante de groupes simples (voir Spatzier pour un énoncé précis [52]). Dans ce dernier cas, il est même montré que n'importe quel sous-groupe discret et co-compact de G contient deux sous-groupes d'indice fini non conjugués et donnant lieu à des représentations équivalentes.

1.3 – Les groupes résolubles

Contrairement aux groupes semi-simples, les groupes résolubles ont la propriété d'avoir des gros groupes d'automorphismes qui permetttent de déformer les repésentations. L'idée, introduite par Gordon et Wilson en 1984 [24], est la suivante: on considère un groupe de Lie G et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G. On peut considérer maintenant l'ensemble $\mathcal{R}_\Gamma$ des automorphismes φ de G qui sont tels que les représentations π^G_Γ et $\pi^G_{\varphi(\Gamma)}$ sont équivalentes. En utilisant le fait que, si φ est dans $\mathrm{Aut}(G)$, le groupe des automorphismes de G, alors les représentations $\pi_{\varphi(\Gamma)}$ et $\pi_\Gamma \circ \varphi^{-1}$ sont équivalentes, on vérifie facilement que $\mathcal{R}_\Gamma$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}(G)$. C'est donc un groupe de Lie qui contient $\mathrm{Int}(G)$, le groupe des automorphismes intérieurs. Le problème est d'obtenir, si possible, des exemples pour lesquels $\mathcal{R}_\Gamma$ et $\mathrm{Int}(G)$ ont des dimensions différentes, ceci dans le but de construire des familles continues de sous-groupes donnant lieu à des représentations équivalentes. Gordon et Wilson ont construit de tels exemples dans le cas où G est simplement connexe, résoluble et ne possède que des racines réelles. Notons que la deuxième condition est automatiquement vérifiée lorsque G est nilpotent. Ils introduisent le groupe $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ des automorphismes presque intérieurs par rapport à Γ, qu'ils définissent comme étant les automorphismes φ de G qui sont tels que $\varphi(\gamma)$ et γ sont conjugués dans G, et ce pour tout γ dans Γ. Lorsque G vérifie l'hypothèse citée précédemment, les représentations irréductibles de G sont classifiées par les orbites co-adjointes (méthode des orbites de Kirillov) et c'est en utilisant cette classification que Gordon et Wilson montrent que $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ est contenu dans $\mathcal{R}_\Gamma$ (on peut montrer en fait que $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ est la composante neutre de $\mathcal{R}_\Gamma$ [50]). L'utilisation de la théorie de Kirillov n'est cependant pas nécessaire et on peut vérifier directement l'équivalence des représentations considérées en utilisant la formule des traces de Selberg. Par exemple, dans le cas où le groupe est nilpotent, l'égalité des fonctions r_{Γ_1} et r_{Γ_2} est une conséquence directe du fait que les éléments de $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ sont des transformations unipotentes. Si on est dans la situation où $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)) > \dim(\mathrm{Int}(G))$, on peut choisir un groupe à un paramètre $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ transverse à $\mathrm{Int}(G)$ et les groupes $\Gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ donnent lieu à des représentations équivalentes et, si $t-s$ est assez petit, Γ_t et Γ_s ne sont pas conjugués dans G. Il y a de nombreux exemples de groupes tels que $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)) > \dim(\mathrm{Int}(G))$. Nous allons juste donner une classe d'exemples, connue sous le nom de groupes non singuliers. On considère un groupe de Lie G simplement connexe dont le groupe dérivé est égal au centre Z (G est alors nilpotent de rang 2). Un tel groupe est dit non singulier si pour tout $x \in G - Z$ et pour tout $z \in Z$, il existe $y \in G$ tel que $xyx^{-1}y^{-1} = z$. Si G est un tel groupe, $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ est indépendant de Γ et $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)/\mathrm{Int}(G)) = \dim(G/Z) \times (\dim(Z) - 1)$ [37]. Le cas où $\dim(Z) = 1$ correspond au cas du groupe de Heisenberg et ne donne pas d'exemple mais tous les groupes dits de type Heisenberg autres que le groupe de Heisenberg vérifient la condition $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)/\mathrm{Int}(G)) > 0$.

C'est le cas, par exemple, du groupe nilpotent $H_n^{\mathbb{H}}$ qui apparait dans la décomposition d'Iwasawa de $\mathrm{Sp}(n,1)$. Dans ce cas précis, on a $\dim(\mathrm{AIA}(H_n^{\mathbb{H}};\Gamma)/\mathrm{Int}(H_n^{\mathbb{H}})) = 2(4n-3)$. Ce groupe est parfois appelé groupe de Heisenberg quaternionien.

1.4 – Formules de trace géométriques et géodésiques périodiques

Dans cette partie, on va rappeler les résultats que nous utiliserons par la suite et qui sont reliés à l'équation de la chaleur. Le but est d'essayer de lire des informations topologiques ou géométriques dans le spectre d'une variété compacte $(X, \mathbf{m})$. La compacité de la variété entrainant que son spectre est discret: $\mathrm{Spec}(X, \mathbf{m}) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \cdots\}$, la première idée est de trouver un équivalent de la suite de valeurs propres. Cet équivalent est donné par l'asymptotique de Weyl: lorsque $k \to \infty$, on a $\lambda_k \sim c_n (k/\mathrm{vol}(X, \mathbf{m}))^{2/n}$ où $n = \dim(X)$ et où c_n est une constante qui ne dépend que de la dimension. Malheureusement, il est difficile d'obtenir des renseignements plus précis sur le comportement asymptotique des valeurs propres et on est obligé d'avoir recours à d'autres méthodes pour obtenir des renseignements supplémentaires. La méthode que nous allons rapidement exposer est celle de l'équation de la chaleur. Il est à noter que l'on obtient des résultats similaires par l'équation des ondes ([11], [18]).

L'idée est d'associer à la variété $(X, \mathbf{m})$ une fonction, appelée fonction de partition, en posant pour tout $t > 0$:

$$Z_{(X, \mathbf{m})}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-t\lambda_k}.$$

On montre que cette série est convergente et que deux variétés ont même spectre si et seulement elles ont même fonction de partition. L'espoir est de pouvoir étudier le comportement asymptotique de cette fonction au voisinage de 0 et d'en tirer des conséquences géométriques. Formellement, on a l'égalité $Z_{(X, \mathbf{m})}(t) = \mathrm{trace}(\exp(-t\Delta_{\mathbf{m}}))$. Pour dépasser le stade formel, on montre que l'opérateur $\exp(-t\Delta_{\mathbf{m}})$ est non seulement borné mais qu'il a la propriété d'être un opérateur à noyau régulier, ce qui implique que $\exp(-t\Delta_{\mathbf{m}})$ est un opérateur à trace. L'égalité précédente est donc justifiée et le noyau de cette famille d'opérateurs s'appelle le noyau de la chaleur. Par la suite, on verra ce noyau comme une fonction k définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times X \times X$ et caractérisée par la propriété suivante: pour toute fonction u_0 continue sur X, la fonction $u(t, x) = \int_X k(t, x, y) u_0(y) dy$ est la solution de l'équation de la chaleur $\Delta_{\mathbf{m}} u + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ telle que $\lim_{t \to +0} u(t, x) = u_0(x)$, et ce pour tout $x \in X$. Notons que dans cette deuxième caractérisation du noyau de la chaleur, la compacité de X n'est pas nécessaire (on demande en général que la fonction u_0 soit continue et bornée sur X). Par exemple, dans le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, il est bien connu que $k(t, x, y) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-d^2(x, y)/4t)$.

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés du noyau de la chaleur. Nous considèrerons toujours des variétés $(X, \mathbf{m})$ qui admettent une action libre et co-compacte d'un groupe discret Γ d'isométries. Sous cette hypothèse, on peut montrer les résultats suivants:

a) Il existe un voisinage de la diagonale dans $X \times X$ sur lequel on a le développement asymptotique suivant quand $t \to +0$:
$$k(t,x,y) \sim (4\pi t)^{-n/2} \exp(-d^2(x,y)/4t) \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x,y) t^k.$$
De plus, pour tout $T > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x, y dans X et t dans $[0, T]$, on ait: $0 < k(t,x,y) < Ct^{-n/2} \exp(-d^2(x,y)/4t)$.

b) Si l'on munit $\Gamma\backslash X$ de la métrique induite par $\mathbf{m}$, alors le noyau de la chaleur k_Γ de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ est donné par la formule:
$$k_\Gamma(t,x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(t, x, \gamma \cdot y).$$

c) Si g est une isométrie de $(X, \mathbf{m})$, alors pour tout x, y dans X, on a $k(t, g\cdot x, g \cdot y) = k(t,x,y)$.

On peut trouver ces résultats dans Berger-Gauduchon-Mazet [6] dans le cas où X est compacte. Le cas où X admet une action co-compacte est dû à Donnelly [16] et est une adaptation du cas compact. On utilise maintenant le fait que lorsque X est compacte, on a $Z_{(X,\mathbf{m})}(t) = \int_X k(t,x,x)dx$ et on obtient:

Proposition 1. a) *Soit* $(X, \mathbf{m})$ *une variété compacte, on a le développement asymptotique suivant quand* $t \to +0$*:*
$$Z_{(X,\mathbf{m})}(t) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k.$$
De plus, les a_k *sont des intégrales sur* X *de polynômes universels en la courbure et ses dérivées covariantes.*

b) *Si* $(X, \mathbf{m})$ *est une variété complète qui admet une action libre et co-compacte d'un groupe discret* Γ *d'isométries et si l'on munit* $\Gamma\backslash X$ *de la métrique induite par* $\mathbf{m}$*, alors on a l'égalité suivante:*
$$Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) = \sum_{[\gamma]} \int_{\Gamma_\gamma \backslash X} k(t,x,\gamma\cdot x)dx.$$
Dans l'égalité précédente, la somme porte sur l'ensemble des classes de conjugaison de Γ *et* Γ_γ *désigne le centralisateur de* γ *dans* Γ*.*

Le développement la première partie de cette proposition est connu sous le nom de développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel. Les premiers coefficients sont connus: $a_0 = \mathrm{vol}(X, \mathbf{m})$, $a_1 = \int_X \mathrm{scal}(x)\, dx/6 \ldots$ La deuxième partie de la proposition s'obtient facilement en utilisant la formule pour k_Γ donnée précédemment et en regroupant les termes de la somme par classe de conjugaison.
Comme le montre le développement asymptotique de Minakshisundaram-Pleijel, l'étude de la fonction de partition au voisinage de 0 fournit des invariants spectraux qui sont des intégrales sur la variété d'invariants locaux (la courbure et ses dérivées). On peut cependant s'attendre à ce qu'une étude plus précise fournisse des informations qui prennent en compte des informations globales autres que le volume. Ce phénomène s'observe dans les cas où l'on a des formules exactes. Nous allons énoncer les deux cas les plus connus:

La formule de Poisson. C'est le cas où $(X, \mathbf{m})$ est un tore plat $\Gamma\backslash\mathbb{R}^n$ muni de la métrique usuelle de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, on a la formule:

$$Z_{\Gamma\backslash\mathbb{R}^n}(t) = (\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n)/(4\pi t)^{n/2}) \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-||\gamma||^2/4t}.$$

La formule des trace de Selberg pour les surfaces de Riemman. C'est le cas où $(X, \mathbf{m})$ est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. On considère un sous-groupe Γ discret et co-compact de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ne contenant que des éléments hyperboliques. Si $\gamma \in \Gamma$, alors Γ_γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. On notera γ_P l'unique générateur de Γ_γ tel que $\gamma = \gamma_P^N$ avec $N > 0$. Finalement, on note l_γ la longueur de l'unique géodésique minimisante dans la classe d'homotopie libre correspondant à $[\gamma]$, c'est-à-dire $l_\gamma = \inf_{x\in\mathbb{H}^2} d(x, \gamma \cdot x)$. On peut maintenant énoncer la formule des traces de Selberg. Pour tout $t > 0$:

$$Z_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2}(t) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)\frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{3/2}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2/4t}}{sh(b/2)}db + \frac{1}{2}\frac{e^{-t/4}}{(4\pi t)^{1/2}}\cdot$$
$$\cdot \sum_{\substack{[\gamma]\\ \gamma\neq 1}} \frac{l_{\gamma_P}}{sh(l_\gamma/2)} e^{-l_\gamma^2/4t}.$$

On voit donc, dans ces deux cas, que la somme de droite se décompose en deux parties: une première partie qui correspond à l'élément neutre de Γ et qui admet le même développement que celui de Minakshisundaram-Pleijel et une deuxième partie qui correspond aux autres classes de conjugaison et qui fait apparaître des termes à décroissance exponentielle et dont les taux de décroissance sont reliés aux longueurs des géodésiques périodiques. Le problème de savoir si de telles relations sont vraies pour une variété quelconque est un problème extrêmement difficile et des résultats ne sont connus que pour des métriques génériques.

Le but de cette partie est de rappeler les résultats obtenus dans l'article de Colin de Verdière [14]. Nous allons tout d'abord expliquer l'hypothèse requise. Soient X une variété compacte, $\mathbf{m}$ une métrique sur X, alors l'ensemble $\Omega(X) = H^1([0,1], X)$ des applications c absolûment continues de $[0,1]$ dans X telles que $\dot{c}$ soit de carré sommable est une variété hilbertienne. Si g est une isométrie de $(X, \mathbf{m})$, on peut considérer l'ensemble $\Omega(X, g)$ des éléments c de $\Omega(X)$ qui sont tels que $g \cdot c(0) = c(1)$ et $g \cdot \dot{c}(0) = \dot{c}(1)$. On peut montrer que $\Omega(X, g)$ est une sous-variété de $\Omega(X)$ et que l'énergie $E_g : \Omega(X, g) \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse dont les points critiques s'étendent en les géodésiques de $(X, \mathbf{m})$ qui sont telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on ait $c(t+1) = g \cdot c(t)$. Notons $\mathcal{L}_g$ l'ensemble des longueurs des géodésiques critiques pour E_g. On dit qu'une longueur l de $\mathcal{L}_g$ est non dégénérée si l'ensemble des points critiques correspondants à la valeur critique l^2 est une réunion finie de sous-variétés compactes, connexes et non-dégénérées, c'est-à-dire que la restriction du hessien de E_g au fibré normal de chacune de ces sous-variétés est non dégénérée. Nous allons pouvoir énoncer le résulat qui nous intéresse. Dans l'énoncé, il apparaît le symbole "$=_{F_\alpha}$". Ce symbole est défini p. 167 dans [14] et ne signifie pas qu'il y a égalité entre les fonctions mais que, après changement de variables, les deux fonctions ont des transformées de Fourier qui ont un comportement similaire. Le but de la formule de [14] est d'obtenir une expression de $Z(g,t) = \int_X k(t, x, g \cdot x)dx$ faisant apparaître les longueurs de $\mathcal{L}_g$. Remarquons que si $g = id$, alors $Z(id, t) = Z_{(X,\mathbf{m})}(t)$. On peut maintenant énoncer [14]:

Proposition 2. *Supposons que l'isométrie g de $(X, \mathbf{m})$ soit telle que toutes les longueurs de $\mathcal{L}_g$ sont non dégénérées, alors $\mathcal{L}_g = \{0 \leq l_0(g) < \cdots < l_n(g) < \cdots\}$ et*

$$Z(g,t) =_{F_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha,g}(t) \exp(-l_n^2(g)/4t).$$

De plus, on peut décrire la forme des fonctions $f_n^{\alpha,g}$ au moyen de l'indice et de la nullité des géodésiques critiques pour la valeur $l_n^2(g)$.

Un résultat dû à Abraham assure que, lorsque $g = id$, l'hypothèse qui apparaît dans la proposition précédente est vérifiée génériquement [1]. Ceci montre que, génériquement, le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs.

2 – Un premier résultat de compacité et de finitude

Dans cette partie, on va montrer un résultat d'ordre quantitatif portant sur la compacité de l'ensemble des groupes donnant lieu à des variétés isospectrales. Des résultats plus précis seront démontrés par la suite en ajoutant des hypothèses supplémentaires. Expliquons tout d'abord la situation: la construction par Gordon et Wilson de déformations isospectrales a montré que, en général, l'ensemble des variétés ayant un spectre donné non seulement ne se réduit pas à une classe d'isométrie mais peut même en contenir une infinité non dénombrable. Il se trouve cependant que l'ensemble des classes d'isométries parcouru lors des déformations isospectrales de Gordon et Wilson est compact et la compacité de l'ensemble des variétés ayant un spectre donné semble être le seul résultat d'ordre général que l'on puisse espérer obtenir. Ce résultat a été démontré en dimension 2 par Osgood, Phillips et Sarnak [34] et des résultats partiels en dimension 3 ont été obtenus par Brooks, Perry et Petersen [8].

On se place dans le cadre suivant: $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne que l'on fixe une fois pour toutes et on considère des variétés riemanniennes du type $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ où Γ est un sous-groupe discret d'un groupe G d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ qui opère librement sur X de sorte que $\Gamma\backslash X$ soit une variété compacte et $\mathbf{m}$ désigne encore la métrique induite par $\mathbf{m}$. A l'exception d'un exemple récemment construit par Gordon, tous les exemples de couples de variétés isospectrales et non isométriques connus à ce jour, y compris les déformations de Gordon et Wilson, sont de la forme $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ où Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes discrets d'isométries. Il est donc naturel de considérer l'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ des sous-groupes Γ d'un groupe d'isométries G tels que $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ soit une variété compacte ayant même spectre qu'une variété $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m})$ donnée.

2.1 – Un résultat de compacité

Nous allons tout d'abord préciser la topologie utilisée. On considère un groupe de Lie G et on veut munir l'ensemble $\mathcal{M}_G$ des sous-groupes discrets de G d'une topologie. Pour cela, si U est un ouvert de G, K un compact et si Γ_0 est un sous-groupe discret, on définit $\mathcal{V}_{\Gamma_0,U,K}$ comme étant l'ensemble des Γ dans $\mathcal{M}_G$ tels que $\Gamma_0 \cap K \subseteq \Gamma U$ et $\Gamma \cap K \subseteq \Gamma_0 U$. La topologie engendrée par les $\mathcal{V}_{\Gamma_0,U,K}$ s'appelle la topologie de Chabauty. On vérifie facilement que, muni de cette topologie, $\mathcal{M}_G$ est métrisable, puisque c'est un espace régulier à base dénombrable. Une manière plus intuitive de voir cette topologie est de dire qu'une suite $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un groupe Γ si, en restriction à tout compact, celle-ci converge vers Γ au sens de Hausdorff. On peut maintenant énoncer le résultat de compacité que l'on a obtenu dans [38]:

Proposition 1. *Soient G un sous-groupe du groupe des isométries d'une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ ayant un nombre fini de composantes connexes et Γ_0 un sous-groupe discret de G tel que $\Gamma_0\backslash X$ soit une variété compacte. Soit $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ l'ensemble des sous-groupes discrets Γ de G tels $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ soit une variété compacte qui ait même spectre du laplacien que $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m})$. Alors $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ est une partie compacte de l'ensemble $\mathcal{M}_G$ des sous-groupes discrets de G. De plus, il n'existe qu'un nombre fini de types de difféomorphisme pour les variétés $\Gamma\backslash X$ quand Γ parcourt $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$.*

Sans entrer dans les détails, on va maintenant donner les principales étapes de la preuve.

1. Utilisation des formules de trace. Comme nous l'avons dit dans la partie précédente, il existe de profondes relations entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs et le lien entre ces deux objets est fourni par les formules de trace. Il se trouve malheureusement que pour appliquer ces formules, il faut vérifier une hypothèse de non dégénérescence de la métrique, ce qui est un tâche ardue en pratique, sauf dans le cas où la métrique est à courbure négative. Les métriques que l'on considère ici ayant de gros groupes d'isométries, ce sont au contraire des cas typique de métriques non génériques et il faut abandonner l'idée d'utiliser les formules de trace usuelles. On va donc devoir utiliser le fait que les variétés que l'on considère sont localement isométriques. Avant d'énoncer le résultat, il faut introduire quelques notations. Si g est dans G, on pose $l(g) = \inf_{x\in X} d(x, g\cdot x)$ et si Γ est un sous-groupe discret de G, on pose $l_0(\Gamma) = \inf_{\gamma\in\Gamma-\{e\}} l(\gamma)$. D'un point de vue géométrique, si γ est dans Γ, alors $l(\gamma)$ est la longueur de la plus petite géodésique périodique

de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ qui se relève en un géodésique c vérifiant $c(t+1) = \gamma\cdot c(t)$ et, d'autre part, $l_0(\Gamma)$ est la longueur de la plus petite géodésique périodique de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ qui ne relève pas en une géodésique périodique de $(X, \mathbf{m})$. Le résultat qui va nous permettre d'utiliser le critère de Mahler est le suivant:

Lemme 2. *Pour tout* Γ *dans* $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$*, on a* $l_0(\Gamma) = l_0(\Gamma_0)$*.*

L'idée de la preuve de ce résultat est très simple, même si en pratique, elle est un peu technique. On utilise le fait que la fonction de partition de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ est donnée par la formule suivante:

$$Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) = \sum_{[\gamma]} \int_{\Gamma_\gamma\backslash X} k(t, x, \gamma\cdot x)dx.$$

Dans l'égalité précédente, la somme porte sur l'ensemble des classes de conjugaison de Γ et Γ_γ désigne le centralisateur de γ dans Γ.

On observe maintenant que le terme de cette somme correspondant à l' élément neutre est égal à ([ ], p. 1072):

$$\int_{\Gamma\backslash X} k(t, x, x)dx = \mu_{\Gamma\backslash G}(\Gamma\backslash G) \int_{G\backslash X} k(t, x, x)d\mu_{G\backslash X}(x).$$

Comme, $\mu_{\Gamma\backslash G}(\Gamma\backslash G) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash X)/\mu_{G\backslash X}(G\backslash X)$, ce terme ne fait intervenir le groupe Γ que par l'intermédiaire de $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash X)$. On utilise maintenant le fait que deux variétés isospectrales ont même volume et on obtient, en posant $W_\Gamma(t) = Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) - \int_{\Gamma\backslash X} k(t,x,x)dx$, que si Γ est dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, alors $W_\Gamma = W_{\Gamma_0}$. La fin de la preuve du lemme consiste à montrer que, si l'on pose $n = \dim X$, alors $l_0(\Gamma) = \sup\{l > 0 \mid \lim_{t\to 0^+} t^{n/2}\exp(l^2/4t)W_\Gamma(t) = 0\}$. On utilise pour cela des encradements du noyau de la chaleur. On a tout d'abord la majoration $k(t,x,y) < Ct^{-n/2}\exp(-d^2(x,y)/4t)$ avec $C > 0$ et valable pour tout t dans $[0,1]$ et x, y dans X. Cette majoration est due à Donnelly [16]. On utilise aussi une minoration du noyau de la chaleur qui a été obtenue par Cheeger et Yau: on remarque que $r_0 = \min_{u\in UX} Ricc(u,u)$ est fini car $(X, \mathbf{m})$ admet un quotient compact (UX désigne le fibré unitaire de $(X, \mathbf{m})$) et on obtient ([13], p. 477) que pour tout $t > 0$ et tous x, y dans X, on a $k(t,x,y) \geq k_{r_0}(t, d(x,y))$ où k_{r_0} est le noyau de la chaleur de l'espace simplement connexe à courbure constante dont la courbure de Ricci est r_0 (un tel espace étant deux-points homogène, le noyau de la chaleur ne dépend que de la distance). Le fait que le comportement au voisinage de 0 du noyau de la chaleur des espaces à courbure constante soit connu permet de conclure.

2. Une application du critère de Mahler. Nous allons maintenant utiliser le résultat précédent pour prouver le résultat de compacité recherché. Il existe une condition simple, connue sous le nom du critère de Mahler, qui assure la précompacité d'une famille de groupes discrets.

Proposition 1. *Soient G un groupe de Lie et U un ouvert de G contenant l'élément neutre e, alors l'ensemble des sous-groupes Γ de G tels que $\Gamma \cap U = \{e\}$ est un compact de $\mathcal{M}_G$. De plus, si une suite $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de ce compact converge vers un groupe Γ, alors $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G) \leq \liminf_{n\to+\infty} \mathrm{vol}(\Gamma_n\backslash G)$.*

Ce résultat est dû à Mahler dans le cas $G = \mathbb{R}^n$ et le cas général a été étudié par Chabauty [11]. D'après le lemme de la partie précédente, si γ est un élément de $\Gamma - \{e\}$ où Γ est dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, alors pour tout x dans X, on a $d(x, \gamma \cdot x) \geq l_0(\Gamma_0)$. Il existe donc un ouvert U de G contenant l'élément neutre e tel que pour tout Γ dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, on ait $U \cap \Gamma = \{e\}$. Soit $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$. D'après ce que l'on vient de voir, on peut appliquer le critère de Mahler. Il existe donc un sous-groupe discret Γ et une sous-suite que l'on notera encore $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ qui converge vers Γ. Il nous faut maintenant montrer que Γ est dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$.

Le premier point consiste à montrer que $\Gamma\backslash X$ est une variété compacte. On vérifie facilement en utilisant le lemme précédent que l'action de Γ sur X est libre. Il reste à montrer que $\Gamma\backslash X$ est compact. Pour cela, on montre le résultat suivant:

Lemme 2. *Il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout Γ dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, on ait $diam(\Gamma\backslash X, \mathbf{m}) \leq D$.*

Ce lemme se montre en majorant le volume d'une famille de boules disjointes de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ judicieusement choisies par le volume de la variété. En fait, on peut expliciter la constante: $D = 2\alpha\mathrm{vol}(\Gamma_0\backslash X)/v$ avec $\alpha =$

$l_0(\Gamma_0)/4$ et $v = \inf_{x\in X} \mathrm{vol}(B(x,\alpha))$. On déduit facilement de ce lemme que la variété $\Gamma\backslash X$ est elle aussi compacte. Pour conclure, il suffit de montrer que la variété $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ a même spectre que $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m})$. On a envie pour cela d'utiliser les arguments classiques de continuité des valeurs propres par rapport à la métrique. Il faut donc tout d'abord montrer que les variétés $\Gamma\backslash X$ et $\Gamma_n\backslash X$ sont difféomorphes pour n assez grand. Ceci se fait en utilisant le fait qu'une action co-compacte d'un groupe est différentiablement rigide. On conclut ensuite facilement.

Remarque. Dans le cas où le groupe G est compact, on montre facilement un résultat beaucoup plus fort. En effet, deux variétés isospectrales ayant même volume, si Γ est dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$, alors Γ et Γ_0 ont même cardinal. Or, un résultat de structure assure qu'un groupe compact n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes ayant un cardinal donné [7].

2.2 – Un résultat de finitude

Pour terminer cette partie, nous allons nous intéresser de manière plus précise à la topologie des ensembles $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$. L'abondance d'exemples de variétés isospectrales laisse penser que décrire de manière précise et globale $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ est un problème difficile et une première étape est de comprendre sa structure locale. En particulier, peut-on se limiter à l'étude des déformations de réseaux et ensuite utiliser des résultats de rigidité? Nous allons voir que ceci est le cas sous une hypothèse d'analycité. Tout d'abord, rappelons que tout groupe de Lie réel est en fait un groupe analytique. Maintenant, si Γ est un sous-groupe discret et co-compact d'un groupe de Lie G, on munit l'ensemble $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ des morphismes de Γ dans G de la topologie de la convergence simple puis d'une structure d'ensemble analytique. Pour cela, on choisit un ensemble fini $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ de générateurs de Γ et on identifie $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ à un sous-ensemble analytique de G^n par l'application: $\rho \mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{R}_0(\Gamma, G)$ des éléments injectifs ρ de $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ qui sont tels que $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe discret et co-compact. Un résultat de Weil nous assure que $\mathcal{R}_0(\Gamma, G)$ est ouvert dans $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ [58]. Finalement, on notera $\mathcal{R}_1(\Gamma, G)$ la composante connexe par arcs de l'inclusion canonique de Γ dans G. Dans de nombreux cas, on peut choisir un système de générateurs tel que $\mathcal{R}_1(\Gamma, G)$ soit non seulement un sous-ensemble analytique mais une sous-variété analytique. C'est ce qui se passe lorsque G est compact, nilpotent et simplement connexe, semi-simple sans facteur compact ou, plus généralement, si le quotient de G par son radical est un groupe semi-simple sans facteur compact ([48], p. 104). On peut maintenant énoncer le résultat de finitude que l'on a obtenu [38]:

Proposition 2. *Soit G un sous-groupe du groupe des isométries d'une variété riemannienne analytique $(X, \mathbf{m})$ tel que l'action de G sur X soit analytique. On suppose que G a un nombre fini de composantes connexes et que pour tout sous-groupe discret et co-compact Γ de G, $\mathcal{R}_1(\Gamma, G)$ est une variété analytique. Alors l'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ des sous-groupes discrets Γ de G tels $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ soit une variété compacte qui ait même spectre du laplacien que $(\Gamma_0\backslash X, \mathbf{m})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs.*

L'idée de la preuve de ce résultat est particulièrement simple. Tout d'abord, un résultat dû à Macbeath [32], nous renseigne sur la structure locale de $\mathcal{M}_G$ autour d'un sous-groupe discret et co-compact Γ_0: il existe un voisinage de Γ_0 dans $\mathcal{M}_G$ dont tous les éléments sont aussi discrets, co-compacts et isomorphes à Γ_0. Donc, les groupes proches de Γ_0 sont de la forme $\rho(\Gamma_0)$ où ρ est dans $\mathcal{R}_1(\Gamma, G)$. De plus, l'application $\rho \mapsto \rho(\Gamma_0)$ est un homéomorphisme d'un voisinage de l'inclusion canonique de Γ_0 dans G sur un voisinage de Γ_0. La preuve consiste à montrer que l'application $\rho \mapsto \mathrm{Spec}(\rho(\Gamma_0)\backslash X, \mathbf{m})$ est, dans un certain sens, analytique. On trouve donc que, dans un voisinage de Γ_0, on peut décrire $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ comme un ensemble analytique. Or, un résultat classique de Bruhat-Cartan assure que tout ensemble analytique est localement connexe par arcs, ce qui permet de conclure.

Remarquons que l'hypothèse d'analycité qui porte sur l'action de G sur X est automatiquement vérifiée lorsque $X = G/K$ est homogène sous l'action de G. Si, de plus, la deuxième hypothèse est vérifiée, on peut appliquer la proposition précédente. C'est le cas notamment des exemples classiques qui sont apparus dans l'histoire des problèmes d'isospectralité: espaces symétriques de type non-compact, nilvariétés. Nous verrons cependant que dans ces deux cas, on assiste à des phénomèmes assez différents. C'est le but des deux prochaines parties que de décrire cette différence de comportement.

3 – Propriétés algébriques des groupes d'isométries

Nous allons dans cette partie essayer de voir sous quelle hypothèse, portant sur le groupe d'isométries, on peut obtenir des renseignements plus précis que les résultats de compacité et de finitude de composantes connexes obtenus dans la partie précédente. Comme le laisse supposer la liste d'exemples de sous-groupes non conjugués induisant des représentations équivalentes, que nous avons donnée dans la première partie, on ne peut espérer au mieux obtenir que des résultats de finitude du nombre de classes de conjugaison ou, plus généralement, de finitude du nombre de composantes connexes de l'ensemble des réseaux isospectraux. Le problème qui apparaît alors est de décrire ces composantes connexes, c'est-à-dire les déformations isospectrales de réseaux.

Une approche possible pour traiter le cas général est de se limiter, dans un premier temps, à deux classes de groupes: les groupes semi-simples et les groupes résolubles. L'espoir que l'on a est de se ramener au cas général à partir des résultats obtenus dans ces deux cas particuliers en utilisant la décomposition de Levi. Rappelons que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son radical $\mathfrak{r}$ se définit comme étant le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. On peut montrer que $\mathfrak{r}$ possède une sous-algèbre supplémentaire $\mathfrak{s}$, sous-algèbre qui est forcément semi-simple: c'est le théorème de décomposition de Levi. Maintenant, si G est un groupe de Lie et si R et S sont les sous-groupes correspondants aux algèbres de la décomposition de Levi de l'algèbre de Lie de G, alors R est le radical de G, S est semi-simple et $G = RS$. Si, de plus, G est simplement connexe, alors $R \cap S = \{1\}$ et G est le produit semi-direct de S par R [7]. Le comportement des projections sur les facteurs de la décomposition de Levi d'un sous-groupe Γ discret et co-compact dans G est un problème qui est abordé dans [57].

3.1 – Les cas des groupes semi-simples

Le cas des groupes compacts a été traité dans la partie précédente et dans ce cas, on a vu qu'il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes donnant lieu à des variétés ayant un spectre donné. On s'intéresse maintenant au cas des groupes semi-simples sans facteur compact. Rappelons que, à revêtement fini près, tout groupe semi-simple est produit d'un groupe compact et d'un groupe semi-simple sans facteur compact. L'étude des sous-groupes discrets des groupes semi-simples sans facteur compact a été à la source de nombreux travaux qui ont donné lieu à des résultats de rigidité très spectaculaires (Mostow, Margulis). Pour ces groupes, on montre le résultat de finitude suivant [38]:

Proposition 1. *Soient* $(X, \mathbf{m})$ *une variété riemannienne et* G *un sous-groupe fermé et connexe du groupe des isométries de* $(X, \mathbf{m})$. *On suppose que* G *est semi-simple, n'a aucun facteur compact ou localement isomorphe à* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. *Soit* Γ_0 *un groupe discret contenu dans* G *tel que* $\Gamma_0 \backslash X$ *soit une variété compacte. Alors,* $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ *est une réunion finie de classes de conjugaison. Autrement dit, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie pour les variétés* $(\Gamma \backslash X, \mathbf{m})$ *quand* Γ *parcourt* $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$.

La preuve de ce résultat est une combinaison de la compacité de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ et du théorème de Mostow: supposons qu'il existe dans $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ une suite infinie $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ de groupes non deux-à-deux conjugués dans G. D'après ce que l'on a vu dans la partie précédente, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $\{\Gamma_n\}_{n\geq 1}$ converge vers un élément Γ de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$. De plus, il existe une suite d'isomorphismes $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ de Γ vers Γ_n qui converge vers l'identité. On se ramène facilement au cas où le centre de G est trivial et on en déduit que ces isomorphismes s'étendent de manière unique en des isomorphismes de G qui, eux aussi, convergent vers l'identité. Comme G est semi-simple, ce sont forcément des automorphismes intérieurs pour n assez grand, ce qui constitue une contradiction.

Remarque 2. Le résultat obtenu dans la proposition précédente ne peut être amélioré dans le sens que l'on ne peut pas espérer montrer que l'ensemble $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ se réduit à l'ensemble des sous-groupes conjugués avec Γ_0, comme le montrent les exemples de Vignéras et Spatzier.

Nous avons malheureusement été obligés dans la proposition précédente d'exclure le cas le cas où le groupe semi-simple G admet un facteur localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Nous allons voir que l'on peut se passer de cette hypothèse si la variété sur laquelle le groupe G opère isométriquement est l'espace symétrique qui lui est naturellement associé. En effet, on a le résultat suivant [38]:

Proposition 3. *Soient* $X = G/K$ *un espace symétrique de type non compact simplement connexe et* Γ_0 *un sous-groupe discret du groupe* G

des isométries de X tel que $\Gamma_0 \backslash X$ soit une variété compacte. Alors, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de variétés localement symétriques de la forme $\Gamma \backslash X$ quand Γ parcourt $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$.

Le fait que l'on n'exclut pas de facteur localement isomorphe à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ implique que l'on ne peut plus se limiter à l'usage du théorème de Mostow, qui ne tient compte que des propriétés algébriques des groupes considérés, mais que l'on doit aussi prendre en compte la géométrie de la variété. Notons que dans ce cas, on sait déja que $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma_0)$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs. Il suffit donc de montrer que celles-ci sont des classes de conjugaison, c'est-à-dire que les déformations isospectrales de réseaux sont triviales. La structure des sous-groupes discrets et co-compact de G est faite en détails dans l'article de WEIL [59]. On déduit facilement de cette étude qu'il suffit de montrer le résultat lorsque $X = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/SO(2)$ est le plan hyperbolique. On dispose maintenant de deux outils pour conclure. Tout d'abord, on peut utiliser le résultat général de GUILLEMIN-KAZDAN qui assure que toute déformation isospectrale d'une surface à courbure négative est triviale [26]. Une deuxième solution, beaucoup plus élémentaire, consiste à utiliser la formule des traces de Selberg. On déduit de celle-ci que si $\{\Gamma_t\}_{t \in I}$ est une famille continue de sous-groupes discrets et co-compacts de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tels que les variétés $\Gamma_t \backslash \mathbb{H}^2$ aient toutes le même spectre du laplacien, elles ont toutes le même spectre des longueurs, ce qui se traduit par le fait que pour tout s, t dans I, on a $\mathrm{trace}(\gamma_t) = \mathrm{trace}(\gamma_s)$. On conclut en utilisant un résultat classique dû à SELBERG [51]: si $\{\Gamma_t\}_{t \in I}$ est une famille continue de sous-groupes discrets et co-compacts de $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ telle que pour tout s, t dans I, on ait $\mathrm{trace}(\gamma_s) = \mathrm{trace}(\gamma_t)$, alors les groupes Γ_t sont deux-à-deux conjugués.

3.2 – Les cas des groupes résolubles et la géométrie spectrale des nilvariétés

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les déformations isospectrales de réseaux dans les espaces symétriques sont triviales et nous allons voir que ce type de comportement n'existe pas, en général, lorsque l'on regarde des groupes d'isométries résolubles. En effet, on peut dans ce cas construire des déformations isospectrales non triviales en utilisant de méthodes de représentation. Cette idée a été introduite par GORDON et WILSON [24]. Le principe de la méthode de Gordon et

Wilson a été décrit dans la première partie. Nous allons cependant en rappeler rapidement l'idée. On considère un groupe de Lie nilpotent et simplement connexe G et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G. Gordon et Wilson introduisent alors le groupe $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ des automorphismes presque intérieurs par rapport à Γ, qu'ils définissent comme étant les automorphismes φ de G qui sont tels que $\varphi(\gamma)$ et γ sont conjugués dans G, et ce pour tout γ dans Γ. Ils montrent que c'est un groupe de Lie qui contient $\mathrm{Int}(G)$, le groupe des automorphismes intérieurs et que, si φ est dans $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$, alors les représentations π_Γ^G et $\pi_{\varphi(\Gamma)}^G$ sont équivalentes. Le principal outil de leur preuve est la méthode des orbites de Kirillov. Gordon et Wilson ont construit de nombreux exemples pour lesquels $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)) > \dim(\mathrm{Int}(G))$. Notons que la méthode de Kirillov est encore valable pour les groupes résolubles de type exponentiel et il faut raffiner la définition des automorphismes presque intérieurs pour obtenir le même résultat [15].

Nous allons maintenant appliquer ces résultats sur les représentations aux problèmes d'isospectralité. Pour cela, nous allons considérer une variété $(X, \mathbf{m})$ dont G est un groupe d'isométries. D'après ce que l'on a vu, si Γ un sous-groupe discret et co-compact de G et si φ est dans $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$, alors les variétés $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\varphi(\Gamma)\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectrales. Le problème est de savoir si ces variétés ne sont pas isométriques. Il n'existe pas de réponse d'ordre général et il faut se concentrer sur des cas particuliers. Pour cela, on regarde l'exemple le plus simple, c'est-à-dire le cas où la variété est homogène sous l'action de G. Comme G n'admet aucun sous-groupe compact non trivial, l'action de G est libre et $(X, \mathbf{m})$ est isométrique au groupe G muni d'une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$. Dans ce cas, le groupe des isométries de $(G, \mathbf{m})$ est le produit semi-direct $K_{\mathbf{m}} \ltimes G$ où $K_{\mathbf{m}}$ est le groupe des automorphismes de G qui préservent $\mathbf{m}$. Maintenant, si on a des groupes tels que $\dim(\mathrm{AIA}(G;\Gamma)) > \dim(\mathrm{Int}(G))$, on peut choisir un groupe à un paramètre $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ transverse à $\mathrm{Int}(G)$ et les groupes $\Gamma_t = \varphi_t(\Gamma)$ sont tels que les variétés $(\varphi_t(\Gamma)\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\varphi_s(\Gamma)\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectrales et non isométriques si $t - s$ est assez petit, c'est-à-dire que Γ_t et Γ_s ne sont pas conjugués dans G et ne le sont pas non plus dans $K_{\mathbf{m}} \ltimes G$.

Les déformations de Gordon et Wilson ont eu un écho particulier car elles permettent de construire des déformations isospectrales de métriques sur une variété donnée. En effet, si φ est dans $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$ et si $\mathbf{m}$ et une métrique invariante à gauche, alors $\varphi^*\mathbf{m}$ est encore invariante à gauche et les variétés $(\Gamma\backslash G, \varphi^*\mathbf{m})$ et $(\varphi(\Gamma)\backslash G, \mathbf{m})$ sont isométriques. Donc, si l'on pose $\mathbf{m}_t = \varphi_t^*\mathbf{m}$ où $\{\varphi_t\}$ est un famille continue d'éléments de $\mathrm{AIA}(G;\Gamma)$, on obtient une famille continue $\{\mathbf{m}_t\}$ de métriques invariantes à gauche telles que les variétés $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$ ont toutes le même spectre et, dans certain cas, ne sont pas deux à deux isométriques. Ce résultat contraste fortement avec le résultat de rigidité spectrale de Guillemin et Kazhdan concernant les variétés à opérateur de courbure défini négatif [26]. Il est donc naturel de se demander si toutes les déformations isospectrales proviennent de la méthode de Gordon et Wilson. Ce problème est, à ce jour, bien trop difficile et il semble plus raisonnable de se poser cette question dans le cadre où les déformations de Gordon et Wilson ont été construites. Plus précisément, supposons que $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ est une famille continue de métriques invariantes à gauche, I désignant un intervalle ou, plus généralement, un espace connexe, telle que les variétés $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$ aient toutes le même spectre, cette famille entre-t-elle dans le cadre des déformations de Gordon et Wilson?

1. Les tores plats. On regarde tout d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire le cas où $G = \mathbb{R}^n$ est l'espace euclidien. En utilisant la formule de Poisson, on voit que si $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ est une famille continue de métriques plates telles que les tores plats $(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n, \mathbf{m}_t)$ aient tous le même spectre du laplacien, alors ils ont tous le même spectre des longueurs. Comme celui-ci est un ensemble discret et que I est connexe, on trouve que les métriques $\mathbf{m}_t$ coincident sur le réseau Γ. On en déduit que la famille $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ est constante. Nous utiliserons ce résultat par la suite.

Nous avons exprimé ce résultat en terme de famille de métriques mais on peut aussi l'exprimer en terme de famille de réseaux et on obtient que si $\{\Gamma_t\}_{t\in I}$ est une famille continue de réseaux telle que les tores plats $(\Gamma_t\backslash\mathbb{R}^n, \mathbf{m})$ aient tous le même spectre du laplacien, alors il existe une famille continue $\{O_t\}_{t\in I}$ d'éléments du groupe orthogonal $O(\mathbf{m})$ et un réseau Γ tels que $\Gamma_t = O_t(\Gamma)$. En d'autres termes, ces réseaux sont deux-à-deux conjugués dans le groupe des isométries $O(\mathbf{m}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Comme on est dans le cadre d'application de la proposition 2 de la partie précédente, et que chaque composante connexe correspond à une classe d'isométrie, on en déduit qu' il n'existe qu'un nombre fini de classses d'isométrie de tores ayant un spectre donné. En fait, on peut avoir une majoration explicite de ce nombre. Avant d'énoncer le résultat, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Si Γ est un réseau dans $(\mathbb{R}^n, \mathbf{m})$, on note $l_0(\Gamma)$ la longueur du plus petit élément non nul de Γ et $S(\Gamma) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n, \mathbf{m})/l_0^n(\Gamma)$. Finalement, on pose:

$$N_1(\Gamma) = \Big[\frac{1}{2}\big(1+2\sqrt{c_n}S(\Gamma)\big)^n - \frac{1}{2}\Big], \quad N_2(\Gamma) = \Big[\frac{1}{2}\big(1+4\sqrt{c_n}S(\Gamma)\big)^n - \frac{1}{2}\Big]$$

et $$N_{\max}(\Gamma) = \frac{N_1(\Gamma)!}{(n-2)!(N_1(\Gamma)-2+n)!} \cdot \frac{N_2(\Gamma)!}{(N_2(\Gamma)-\frac{n(n-1)}{2})!}$$

($[x]$ désigne la partie entière de x et $c_n = (\frac{4}{\pi})^n \Gamma(\frac{n+1}{2})^2 (\frac{3}{2})^{(n-1)(n-2)}$).

On peut maintenant décrire les bornes que l'on a obtenues [39]:

Proposition 1. *Soit* $(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n, \mathbf{m})$ *un tore plat, alors:*

a) *Il existe au plus* $N_{\max}(\Gamma)$ *classes d'isométries de tores plats qui ont même spectre que* $(\Gamma\backslash\mathbb{R}^n, \mathbf{m})$.
b) *Si* $n = 3$, *on peut prendre* $N_{\max}(\Gamma) = 3612$ *et si* $n = 2$, *on a* $N_{\max}(\Gamma) = 1$.

Le principal outil pour démontrer ce résultat est l'utilisation de la réduction de Minkowski des formes quadratiques. Le but de la réduction de Minkowski est de trouver une base d'un réseau de l'espace euclidien qui soit la plus orthogonale possible [31]. L'idée que l'on utilise est de majorer le nombre de possibilités pour les éléments de cette base à partir des informations contenues dans le spectre des longueurs. Il est à noter que Berry a annoncé 15 comme une borne en dimension trois [2]. D'autre part, de nombreux exemples de tores plats isospectraux et non isométriques ont été construits (voir [4] et [47] pour des références).

2. Les nilvariétés de rang deux. Ind Ce sont les exemples les plus simples après les tores plats. Les résultats concernant les nilvariétés ont fait l'objet de l'article de synthèse [47]. Durant toute cette partie, on va considérer un groupe de Lie G simplement connexe et nilpotent. Un résultat de Malcev assure qu'un tel groupe admet un sous-groupe discret et co-compact si et seulement si il existe un base de son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ telle que les constantes de structure relatives à cette base sont rationnelles [32]. Par la suite, les groupes que l'on considèrera seront supposés vérifier cette hypothèse et on supposera aussi qu'ils sont de rang 2, c'est-à-dire tels que le groupe dérivé G' est contenu dans le centre Z.

Si W est n'importe quel sous-groupe du centre, alors il existe une unique métrique invariante à gauche $\mathbf{n}$ sur G/W telle que la projection de $(G, \mathbf{m})$ sur $(G/W, \mathbf{n})$ soit une submersion riemannienne. De plus, cette submersion est à fibres totalement géodésiques. Si le groupe W est rationnel, on en déduit que la projection $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ sur $(\Gamma\backslash G/W, \mathbf{n})$ est encore une submersion à fibres totalement géodésiques dont les fibres sont des tores plats $((\Gamma \cap W)\backslash W, \mathbf{m})$. En particulier, si W contient G', alors G/W est commutatif et l'on voit que $\Gamma\backslash G$ est l'espace total d'une fibration proncipale dont la base et la fibre sont des tores. Cette structure sera utlisée de manière intensive par la suite. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie [36]:

Proposition 2. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang 2 et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G. Si $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ est une famille continue de métriques invariantes à gauche, I étant un espace connexe, telle que les variétés $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$ sont isospectrales, alors il existe une famille continue $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ d'éléments de* $\mathrm{AIA}(G, \Gamma)$ *et une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$ telles que $\mathbf{m}_t = \varphi_t^* \mathbf{m}$.*

Avant de donner une idée de la preuve de ce résultat, nous allons en donner une conséquence:

Corollaire 3. *Soit $(G, \mathbf{m})$ un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang 2 muni d'une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$ et Γ_0 un sous-groupe discret et co-compact de G, alors* $\mathrm{Isos}(\Gamma_0)$ *n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs et la composante connexe par arcs d'un groupe Γ est l'ensemble des $\psi\circ\varphi(\Gamma)$ quand φ parcourt* $\mathrm{AIA}(G, \Gamma)$ *et ψ parcourt la composante neutre de $K_{\mathbf{m}}$, le groupe des automorphismes de G qui préservent $\mathbf{m}$.*

Notons que ces deux énoncés ne sont pas équivalents car dans le deuxième énoncé, les variétés sont supposées *à priori* localement isométriques, ce qui n'est pas le cas dans le premier énoncé.

Il existe deux preuves de ce résultat. Nous allons indiquer rapidement les idées utilisées.

La première preuve est due à Ouyang [35]. Elle se fait par récurrence sur la dimension de G. Si $\dim(G) = 1$, alors $G = \mathbb{R}$ et le résultat est évident, d'après ce que l'on a vu précédemment. Supposons le résultat prouvé pour tous les groupes G tels que $\dim(G) < n$ et considérons un groupe de Lie G simplement connexe et nilpotent de rang 2 tel que $\dim(G) = n$. Comme nous l'avons déja dit, si W est un sous-groupe rationnel du centre centre, la projection de $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ sur $(\Gamma\backslash G/W, \mathbf{n})$ est une submersion à fibres totalement géodésiques dont les fibres sont des tores plats $((\Gamma \cap W)\backslash W, \mathbf{m})$. Comme, dans une telle situation, le spectre de la base est contenu dans le spectre de l'espace total, pour tout $t \in I$, on a $\mathrm{Spec}((\Gamma\cap W)\backslash W, \mathbf{n}_t) \subset \mathrm{Spec}(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$. L'ensemble de droite dans cette inclusion étant discret et, par hypothèse, indépendant de t, un argument de continuité nous assure que les variétés $((\Gamma \cap W)\backslash W, \mathbf{n}_t)$ sont isospectrales et l'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Tout le problème consiste à choisir de manière judicieuse les sous-algèbres rationnelles.

La deuxième preuve est basée sur un calcul explicite du spectre des variétés considérées [40]. Pour cela, on considère la représentation π_Γ^G de G que l'on a introduite dans la première partie. On définit la différentielle de cette représentation comme suit:

$$((\pi_\Gamma^G)_*(X))f = \frac{d}{dt}\pi_\Gamma^G\big(\exp(tX)\big)f|_{t=0} \text{ où } X \in \mathfrak{g} \text{ et } f \in C^\infty(\Gamma\backslash G).$$

$(\pi_\Gamma^G)_*(X)$ est un opérateur différentiel du premier ordre. On a alors une expression simple de l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ de la variété $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ [24]:

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n}(\pi_\Gamma^G)_*(X_i)^2$$

où $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée quelconque de $\mathfrak{g}$ pour la métrique $\mathbf{m}$ et $n = \dim(\mathfrak{g})$.

La compacité de $\Gamma\backslash G$ implique que la représentation π_Γ^G se décompose en une somme directe discrète de représentations unitaires irréductibles, chacune apparaissant avec multiplicité finie. Il est maintenant temps de rappeler les principes de la méthode des orbites de Kirillov. Cette méthode permet de décrire les représentations unitaires irréductibles de G. Soit l dans $\mathfrak{g}^*$, le dual de $\mathfrak{g}$, on dit qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est subordonnée à l si la restriction de l à l'algèbre dérivée de $\mathfrak{h}$ est nulle (*i.e.* pour tout $X, Y \in \mathfrak{h}$, $l([X,Y]) = 0$). Une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est dite subordonnée maximale par rapport à l si $\mathfrak{h}$ est de dimension maximale parmi toutes les sous-algèbres subordonnées à l. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à l, on peut construire un caractère $\bar{l}$ sur $H = \exp(\mathfrak{h})$ en posant $\bar{l}(\exp X) = \exp(2\pi i l(X))$ où $X \in \mathfrak{h}$ ($\bar{l}$ est bien un caractère puisque $\mathfrak{h}$ est subordonnée à l). On appelle $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ la représentation de G induite par $\bar{l}$. On peut alors énoncer le résultat fondamental suivant [30]:

1) Si l est dans $\mathfrak{g}^*$ et si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée à l, alors la représentation $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ est irréductible si et seulement si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre subordonnée maximale par rapport à l. De plus $\pi_{l,\mathfrak{h}}$ ne dépend que de l, à équivalence unitaire près, pourvu que $\mathfrak{h}$ soit subordonnée maximale. On peut donc définir $\pi_l = \pi_{l,\mathfrak{h}}$ sans ambiguïté.
2) Toute représentation unitaire irréductible de G est équivalente à l'une des représentations π_l que l'on vient de construire.
3) Deux représentations π_l et $\pi_{l'}$ sont équivalentes si et seulement si l et l' sont dans la même orbite coadjointe (*i.e.* il existe g dans G tel que $l' = l \circ Ad(g)$). On notera $\mathfrak{g}^*/Ad(G)$ l'ensemble des orbites coadjointes.

Revenons maintenant au problème du calcul de spectre. D'après ce que l'on vient de voir, il existe une partie A_Γ de $\mathfrak{g}^*/Ad(G)$, et pour chaque $l \in A_\Gamma$ un entier m_l non nul, tels que π_Γ^G se décompose comme $\sum m_l \pi_l$, la somme portant sur A_Γ (on explicitera l'ensemble A_Γ et les entiers m_l par la suite). Comme en restriction à chaque sous-espace irréductible V_l ($l \in A_\Gamma$), π_Γ^G est unitairement équivalente à π_l, la restriction de Δ à V_l est unitairement conjuguée à l'opérateur:

$$\Delta_l = -\sum_{i=1}^{n} (\pi_l)_*(X_i)^2$$

où $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ est une base orthonormée quelconque de $\mathfrak{g}$ pour la métrique et où l'on a posé $(\pi_l)_*(X_i) = \frac{d}{dt}\pi_l(\exp(tX_i))|_{t=0}$ pour $i = 1, \dots, n$. On en déduit que le spectre de la restriction de Δ à V_l est égal à celui de Δ_l que l'on notera $\Sigma(l, \mathbf{m})$. D'après ce qui précède, le spectre de $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ sera la réunion des $\Sigma(l, \mathbf{m})$, chaque élément de $\Sigma(l, \mathbf{m})$ étant compté avec la multiplicité m_l. Il ne reste plus qu'à calculer le spectre des opérateurs Δ_l.

Avant d'énoncer les résultats obtenus, fixons les notations. Si l est dans $\mathfrak{g}^*$, on note B_l la forme bilinéaire antisymétrique définie par $B_l(X, Y) = l([X, Y])$ pour X, Y dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_l$ le noyau de B_l. Si $\mathbf{m}$ est une métrique sur $\mathfrak{g}$, on note u_l l'opérateur antisymétrique par rapport à $\mathbf{m}$ défini par

$B_l(X,Y) = \mathbf{m}(X, u_l(Y))$. Comme u_l est antisymétrique, ses valeurs propres sont de la forme $\pm i d_j$ pour $j \in \{1, \ldots, k\}$ où $k = (\dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{g}_l))/2$ (on suppose que $0 < d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k$). Avec ces notations, il est montré dans [40] que le spectre de Δ_l est $\Sigma(l, \mathbf{m}) = \{\mu(l,p,\mathbf{m}); p \in \mathbf{N}^k\}$ où $\mu(l,p,\mathbf{m}) = 4\pi^2 \sum_{1\leq i \leq n}(l(w_i))^2 + 2\pi \sum_{1 \leq j \leq k}(2p_j+1)d_j$ avec $n = \dim(\mathfrak{g}_l)$ et où $\{W_i\}_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathfrak{g}_l$ pour $\mathbf{m}$. L'idée de ce calcul est de construire une isométrie de l'espace de la représentation π_l vers $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^k)$ de sorte que la conjuguée de π_l par cette isométrie soit une représentation qui ressemble le plus possible à une des représentations de dimension infinie du groupe de Heisenberg. On constate ensuite que l'image de l'opérateur Δ_l par cette isométrie est, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, l'opérateur d'Hermite. Or, le spectre de cet opérateur est bien connu et on obtient la résultat annoncé.

La deuxième étape consiste à caractériser les représentations irréductibles qui apparaissent dans la représentation π_Γ^G et à savoir avec quelle multiplicité elles apparaissent. Pour cela, on utilise la caractérisation donnée par Moore ([33], p. 42) et on montre que, dans le cas des nilvariétés de rang deux, cette caractérisation prend une forme beaucoup plus explicite. Avant d'énoncer le résultat, remarquons que si $l \in \mathfrak{g}^*$, alors B_l induit une forme bilinéaire antisymétrique $\tilde{B}_l$ non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_l$ et que, bien que $\log(\Gamma)$ ne soit pas a priori un réseau, son image Γ_l dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_l$ en est un (puisque si $X, Y \in \log\Gamma$, alors $X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] \in \log\Gamma$ et $[X,Y] \in \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{g}$). Ceci dit, on montre dans [Pe4] que si G est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe de rang deux et si Γ est un sous-groupe discret et co-compact de G, alors la représentation π_l apparaît dans la représentation π_Γ^G si et seulement si $\log(\Gamma \cap \mathfrak{g}_l) \subset \mathbb{Z}$. La représentation π_l apparaît alors avec la multiplicité $m_l = 1$ si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_l$ et $m_l = (\det \tilde{B}_l)^{1/2}$ si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_l$, le déterminant étant calculé par rapport à n'importe quelle base du réseau Γ_l.

Une fois ce calcul effectué, on peut l'utiliser pour montrer la proposition 2. Notons que si l'on suppose que le groupe est non-singulier (*i.e.* pour tout $X \in \mathfrak{g}$ qui n'est pas dans le centre $\mathfrak{z}$, alors l'image de $\mathrm{ad}_X(\mathfrak{g}) = \mathfrak{z}$), la preuve de la proposition est beaucoup plus simple [37].

Remarque 4. a) Une question naturelle est de savoir si ce résultat est encore vrai si l'on supprime l'hypothèse de rang deux. Tout récemment, Gornet a construit des déformations isospectrales sur une nilvariété de rang trois qui ne proviennent pas de la méthode de Gordon et Wilson. Il semble donc que pour les nilvariétés de rang supérieur, la situation soit plus complexe que pour celles de rang deux.

b) Le calcul que l'on vient de faire donne une expression du spectre particulièrement simple lorsque le groupe, muni de sa métrique, est un groupe de type Heisenberg. Il a été utilisé par Gordon pour construire les premiers exemples de variétés isospectrales et non localement isométriques [22].

Comme nous l'avons déjà dit, les relations profondes qui existent entre le spectre des longueurs et le spectre du laplacien peuvent laisser penser que des résultats analogues à ceux obtenus pour le spectre du laplacien peuvent être démontrés pour le spectre des longueurs. Il se trouve que le spectre des longueurs reste inchangé lors des déformations de Gordon et Wilson et on peut alors se poser le même problème de classification des déformations isospectrales pour le spectre des longueurs. On montre dans [41] que la situation est la même que pour le spectre du laplacien:

Proposition 5. *Soient G un groupe de Lie simplement connexe et nilpotent de rang 2 et Γ un sous-groupe discret et co-compact de G. Si $\{\mathbf{m}_t\}_{t\in I}$ est une famille continue de métriques invariantes à gauche, I étant un espace connexe, telle que les variétés $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m}_t)$ aient le même spectre des longueurs, alors il existe une famille continue $\{\varphi_t\}_{t\in I}$ d'éléments de $\mathrm{AIA}(G,\Gamma)$ et une métrique invariante à gauche $\mathbf{m}$ telles que $\mathbf{m}_t = \varphi_t^*\mathbf{m}$.*

La preuve de ce résultat est basée sur le fait que si W est un sous-groupe rationnel du centre, la projection de $(\Gamma\backslash G, \mathbf{m})$ sur $(\Gamma\backslash G/W, \mathbf{n})$ est une submersion à fibres totalement géodésiques dont les fibres sont des tores plats $((\Gamma\cap W)\backslash W, \mathbf{m})$. Remarquons que, dans cette situation, les géodésiques horizontales se projettent en des géodésiques de la base qui, si W contient le groupe dérivé G', est elle aussi un tore plat.

Pour terminer cette partie, nous allons regarder en détails le cas du groupe de Heisenberg H_n et étudier dans ce cas les relations entre le spectre des longueurs et le spectre du laplacien. Rappelons que H_n est obtenu en munissant $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R}^{2n}\bigoplus\mathbb{R}$ de la loi de groupe $(x,y,z)(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z'+ < x \mid y' >)$ où $x,y,x',y' \in \mathbb{R}^n$

et $z, z' \in \mathbb{R}$. Le groupe ainsi obtenu est nilpotent de rang deux et son centre est $Z = \{(0,0,z); z \in \mathbb{R}\}$. Comme Z est aussi le groupe dérivé, le groupe quotient H_n/Z est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$. Maintenant, si $\mathbf{m}$ est une métrique invariante à gauche, alors il existe une unique métrique invariante à gauche $\mathbf{n}$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ telle que la projection de $(H_n, \mathbf{m})$ sur $(\mathbb{R}^{2n}, \mathbf{n})$ soit une submersion riemannienne. De plus, cette submersion est à fibres totalement géodésiques. Cette structure de submersion riemannienne permet de définir les notions d'horizontale et de verticale. On dira qu'une géodésique est horizontale (resp. verticale) si son vecteur tangent est horizontal (resp. vertical) et qu'elle est tranverse si elle n'est ni horizontale, ni verticale. Les géodésiques horizontales et verticales sont des orbites de groupes à un paramètre de H_n [42]. Ce n'est pas le cas des géodésiques transverses qui sont des spirales qui se projettent sur des cercles de $\mathbb{R}^{2n}$. Finalement, si Γ est un sous-groupe discret et co-compact de H_n, alors sa projection sur $\mathbb{R}^{2n}$ est un réseau que l'on notera L. Nous pouvons maintenant retourner au problème initial et essayer de comprendre les relations entre le spectre des longueurs et le spectre du laplacien dans le cas des variétés de Heisenberg. Pour cela, le principal outil est un analogue de la formule de Poisson pour les variétés de HEISENBERG [42]:

PROPOSITION 6. *Soit* $(\Gamma \backslash H_n, \mathbf{m})$ *une variété de Heisenberg munie d'une métrique invariante à gauche* $\mathbf{m}$. *Notons* $\{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots\}$ *son spectre du laplacien et* $\{0 = l_0 < l_1 < l_2 \dots\}$ *l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques comptées sans multiplicité. Alors, il existe une famille* $\{\varphi_p\}_{p\geq 1}$ *de fonctions holomorphes sur le demi-plan* $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathrm{Re}(z) > 0\}$ *telle que pour tout* $z \in \mathbb{C}^+$ *on ait:* $\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-z\lambda_p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi_p(z) e^{-l_p^2/4z}$. *De plus, les fonctions* φ_p *peuvent être calculées explicitement.*

Avant de tirer les conséquences géométriques de cette formule, il faut remarquer que l'on ne fait aucune hypothèse de non dégénérescence sur la métrique, c'est-à-dire que l'on ne demande pas que les variétés critiques de la fonctionnelle énergie soient toutes non dégénérées, ce qui est l'hypothèse usuelle qui permet d'écrire des formules de trace. Il se trouve que pour certaines métriques invariantes à gauche, cette hypothèse n'est pas remplie ([42], p. 90). On voit donc que, même dans ce cas, on peut obtenir une formule de trace. Avant de revenir aux conséquences géométriques de cette formule, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Si $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ est une variété de Heisenberg, on note $\Lambda_H(\Gamma, \mathbf{m})$ (resp. $\Lambda_V(\Gamma, \mathbf{m}), \Lambda_T(\Gamma, \mathbf{m})$) l'ensemble des longueurs des géodésiques horizontales (resp. verticales, transverses) comptées avec une multiplicité égale au nombre de variétés connexes critiques qui correspondent à des géodésiques périodiques d'une longueur donnée. Une première conséquence de la formule de Poisson est le résultat suivant [42], résultat qui montre bien les relations profondes entre le spectre du laplacien et le spectre des longueurs:

Corollaire 7. *Soient* $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma'\backslash H_n, \mathbf{m}')$ *deux variétés de Heisenberg. Si elles ont même spectre du laplacien, alors elles ont même spectre des longueurs. De manière plus précise, on a:* $\Lambda_H(\Gamma, \mathbf{m}) = \Lambda_H(\Gamma', \mathbf{m}')$, $\Lambda_V(\Gamma, \mathbf{m}) = \Lambda_V(\Gamma', \mathbf{m}')$ *et* $\Lambda_T(\Gamma, \mathbf{m}) = \Lambda_V(\Gamma', \mathbf{m}')$.

Ce résultat se montre en utilisant la forme explicite des fonctions φ_p qui apparaissent dans la proposition 6. Ces fonctions sont des sommes de fonctions qui correspondent chacune à une variété critique. Il se trouve que ces fonctions ont des singularités en 0 différentes suivant la nature des géodésiques correspondantes: horizontale, verticale ou tranverse. On peut ainsi arriver à détecter la nature des géodésiques d'une longueur donnée et on obtient le résultat annoncé. On peut aussi utiliser cette formule pour étudier les problèmes d'isospectralité et on obtient le résultat suivant [42]:

Corollaire 8. *Soient* $(\Gamma\backslash H_n, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma'\backslash H_n, \mathbf{m}')$ *deux variétés de Heisenberg qui ont même spectre du laplacien. Alors:*

a) *Les tores de bases* $(L\backslash \mathbb{R}^{2n}, \mathbf{n})$ *et* $(L'\backslash \mathbb{R}^{2n}, \mathbf{n}')$ *ont eux aussi même spectre du laplacien.*

b) *Ces deux variétés de Heisenberg sont localement isométriques. Si elles sont de dimension* 3*, elles sont isométriques.*

Ce résultat se montre en utilisant la forme explicite des valeurs propres qui proviennent des représentations de dimension infinie et qui ne dépendent que d'invariants locaux. Le résultat concernant la dimension 3 n'est pas généralisable à des dimensions supérieures. Il utilise, entre autre, la partie a) et le fait que deux tores plats de dimension deux isospectraux sont isométriques. Pour terminer, nous allons énoncer une dernière conséquence [42]:

COROLLAIRE 9. *Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de variétés de Heisenberg ayant un spectre donné.*

Ce résultat se montre de manière directe en utilisant la forme explicite du spectre et le fait que ce résultat est vrai pour les tores plats, comme nous l'avons déja vu [37]. Une autre manière de prouver ce résultat est d'utiliser le fait que deux variétés de Heisenberg isospectrales sont localement isométriques. On est donc ramené à montrer que les ensembles $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma)$ donnent lieu à un nombre fini de classes d'isométries. Ceci est une conséquence directe du corollaire 3, concernant la finitude et la description des composantes connexes de $\mathcal{I}\mathrm{sos}(\Gamma)$, et du fait que pour tout sous-groupe discret et co-compact Γ, on a: $\mathrm{AIA}(H_n, \Gamma) = \mathrm{Int}(H_n)$. Remarquons que de nombreux exemples de variétés de Heisenberg isospectrales et non isométriques ont été construits par GORDON et WILSON [25].

4 – Un peu de géométrie

Dans cette partie, on continue à essayer de comprendre les exemples de variétés isospectrales localement isométriques. On veut notamment les interpréter en termes d'équivalence de représentations. La première question que l'on se pose est de savoir si de tels exemples proviennent de la méthode de Sunada. Les exemples d'Ikeda d'espaces lenticulaires isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais pas pour le laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les $1-$formes différentielles montrent qu'il existe des exemples de variétés isospectrales qui ne proviennent pas de la méthode de Sunada. En effet, cette méthode donne lieu à des variétés qui sont isospectrales pour n'importe quel opérateur différentiel naturel. On est donc amené à se demander s'il n'est pas possible d'affaiblir la condition du théorème de Sunada. En particulier, est-il possible d'obtenir une condition qui ne tienne pas seulement compte des groupes d'isométries, mais aussi de la géométrie de la variété? Le but de cette partie est d'apporter un réponse positive à cette question.

4.1 – Représentations relativement équivalentes

On va s'intéresser à un problème de représentations. Les résultats obtenus seront utilisés plus tard pour étudier les problèmes d'isospectralité.

Par la suite, G désignera un groupe de Lie unimodulaire et K un sous-groupe compact de G. Si ρ est une représentation de G dans un espace de Hilbert V et si τ est une représentation de K, on va définir à l'aide de τ une sous-représentation de ρ que l'on notera ρ_τ. Tout d'abord, si τ est irréductible, on définit V^τ comme étant la somme des sous-espaces de V sur lesquels la restriction de ρ à K est isomorphe à τ et V_τ comme étant le plus petit sous-espace fermé de V, contenant V^τ, et invariant par G. Dans le cas général, on définit V_τ comme étant l'adhérence de la somme des V_μ quand μ parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de τ. Le sous-espace V_τ étant invariant, on obtient ainsi une sous-représentation de ρ que l'on note ρ_τ.

Il est clair que si ρ et σ sont deux représentations équivalentes de G et si τ est une représentation de K, alors ρ_τ et σ_τ sont aussi équivalentes, la réciproque étant fausse en général. Nous verrons plus loin que de tels exemples apparaissent naturellement dans les problèmes d'isospectralité. Par la suite, on dira que deux représentations ρ et σ sont équivalentes relativement à τ si les représentations ρ_τ et σ_τ sont équivalentes, et qu'elles sont K-équivalentes si, en notant 1_K la représentation triviale de K, elles sont équivalentes relativement à 1_K. Pour alléger les notations, si ρ est une représentation de G dans un espace de Hilbert V, on notera V^K (resp. V_K) le sous-espace V^{1_K} (resp. V_{1_K}) et ρ_K la sous-représentation correspondant à V_K. Remarquons que V_K est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les $V^{gKg^{-1}}$ quand g parcourt G.

Dans la suite de cette partie, on va se concentrer sur le dernier cas évoqué et essayer de comprendre à quelle condition deux représentations sont K-équivalentes. On notera $\widehat{G}$ le dual de G, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires et irréductibles de G, et $\widehat{G}_K$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles qui admettent des vecteurs non nuls, invariants par K. Autrement dit, une représentation irréductible ρ dans un espace V est dans $\widehat{G}_K$ si V_K n'est pas réduit à $\{0\}$. Remarquons que dans ce cas, $V = V_K$ et $\rho = \rho_K$. Par contre, si une représentation irréductible ρ dans un espace

V n'est pas dans $\widehat{G}_K$, alors $V^K = \{0\}$. On en déduit que si α et β sont deux représentations de G complètement réductibles telles que toute représentation irréductible de G ait une multiplicité finie dans α et dans β, alors α et β sont K-équivalentes si et seulement si tout élément de $\widehat{G}_K$ a même multiplicité dans α et dans β.

Le critère que l'on vient d'énoncer est simple mais n'a d'intérêt que dans le cas où l'on connait explicitement à la fois $\widehat{G}$ et la décomposition en composantes irréductibles des représentations qui interviennent. Il est donc naturel de chercher une condition nécessaire et suffisante pour que deux représentations soient K-équivalentes qui fasse intervenir les caractères de ces représentations. Une telle condition est obtenue dans 43]:

Proposition 1. *Soient G un groupe de Lie unimodulaire, K un sous-groupe compact et π_1 et π_2 deux représentations à trace de G. Alors π_1 et π_2 sont K-équivalentes si et seulement si pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G)$ invariante à gauche par K, $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace.*

La preuve suit la même démarche que l'on celle du résultat que l'on peut trouver dans ([29], p. 495) où le cas traité est celui où K est trivial.

Remarque 2. On peut se demander comment le fait que deux représentations de G soient équivalentes relativement à une représentation non triviale de K peut se lire sur leurs caractères. Pour cela, on considère la représentation régulière $\rho = \mathrm{Ind}_{\{1\}}^G(1)$ de G dans $L^2_{\mathbb{C}}(G)$ et si τ est une représentation de K , on peut considérer le sous-espace $L^2_{\mathbb{C}}(G)^\tau$ de $L^2_{\mathbb{C}}(G)$. En adaptant la preuve de la proposition précédente, on obtient facilement le résultat suivant: soient τ une représentation irréductible de K et π_1 et π_2 deux représentations à trace de G, alors π_1 et π_2 sont $\tau-$équivalentes si et seulement si $\pi_1(\varphi)$ et $\pi_2(\varphi)$ ont même trace pour toute fonction φ dans $C_0^\infty(G) \cap L^2_{\mathbb{C}}(G)^\tau$.

4.2 – Une généralisation du théorème de Sunada

On va utiliser les résultats sur les représentations obtenus dans la première partie pour étudier les problèmes d'isospectralité. On se place dans le même cadre: $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne, G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de $(X, \mathbf{m})$ et Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes discrets de G qui opèrent librement sur X et tels que les variétés $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ soient compactes. On cherche alors une condition d'ordre algébrique qui implique l'isospectralité des variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$. Comme nous l'avons déja mentionné, une telle condition est donnée par l'équivalence des repésentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$. C'est le théorème de Sunada. Le point essentiel de la preuve est que le laplacien commute avec les isométries et il se trouve que les variétés obtenues sont isospectrales pour tout opérateur différentiel ayant cette propriété: laplacien opérant sur les fonctions, laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles ... On est donc amené à chercher une condition qui n'implique, *à priori*, que l'isospectralité pour le laplacien opérant sur les fonctions.

Avant d'énoncer la condition obtenue, on a besoin de rappeler un résultat relatif aux actions de groupes sur les variétés. Si G est un groupe de Lie qui opère sur une variété X, on notera G_x le stabilisateur d'un point x de X, c'est-à-dire l'ensemble des $g \in G$ tels que $g \cdot x = x$. Si l'action de G est propre et C^∞, alors G_x est un sous-groupe compact de G et on peut montrer ([7], p. 96) qu'il existe un sous-groupe compact K de G, que l'on appelle stabilisateur générique, jouissant des deux propriétés suivantes:

a) Pour tout $x \in X$, K est conjugué à un sous-groupe de G_x.

b) Il existe un ouvert dense U tel que si $x \in U$, alors K et G_x sont conjugués.

Exemples 1. Si $(X, \mathbf{m})$ est une variété riemannienne et si G est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de $(X, \mathbf{m})$, alors l'action de G est propre et on peut regarder les cas particuliers suivants:

a) $(X, \mathbf{m})$ est homogène sous l'action de G. On peut alors écrire $X = G/K$ où K est le stabilisateur d'un point fixé une fois pour toutes. Il est clair que K est le stabilisateur générique de l'action de G sur X.

b) G est un groupe dénombrable d'isométries d'une variété $(X, \mathbf{m})$ complète. Comme l'ensemble des points fixes d'une isométrie différente de l'identité est un fermé d'intérieur vide, la réunion des points fixes des éléments de G différents de l'identité ne peut pas être égale à X puisque, d'après le théorème de Baire, elle est d'intérieur vide. On en déduit que le stabilisateur générique de l'action de G est trivial.

On peut maintenant énoncer la généralisation du théorème de Sunada que l'on a obtenue [43]:

PROPOSITION 2. *Soient* $(X, \mathbf{m})$ *une variété riemannienne,* G *un sous-groupe fermé du groupe des isométries de* $(X, \mathbf{m})$*,* K *le stabilisateur générique de l'action de* G *sur* X*. Soient* Γ_1 *et* Γ_2 *deux sous-groupes discrets de* G *tels que les quotients* $\Gamma_1 \backslash X$ *et* $\Gamma_2 \backslash X$ *soient des variétés compactes. Si les représentations* $\pi^G_{\Gamma_1}$ *et* $\pi^G_{\Gamma_2}$ *sont* K*-équivalentes, alors les quotients riemanniens* $(\Gamma_1 \backslash X, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_2 \backslash X, \mathbf{m})$ *sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions.*

Il existe trois preuves de ce résultat, dont une n'est valable que dans le cas où X est compacte. Ce sont toutes des raffinement du théorème de Sunada. Ceci est une bonne occasion pour faire le point sur les méthodes qui ont été utilisées jusqu'à présent.

PREUVE PAR LA MÉTHODE DE TRANSPLANTATION. La méthode de transplantation est due à P. BÉRARD [4]. On va tout d'abord en rappeler le principe. On considère un sous-groupe Γ de G qui est discret et tel que $\Gamma \backslash X$ soit une variété compacte. On définit alors un espace de Hilbert comme suit: on considère tout d'abord l'espace vectoriel des fonctions φ continues sur X à valeurs dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)$ qui sont telles que pour x dans X et g dans G on ait la relation $\varphi(g \cdot x) = \pi^G_\Gamma(g)\varphi(x)$. Si on munit cet espace du produit hermitien suivant:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{G \backslash X} (\varphi(x) \mid \psi(x)) d\mu_{G \backslash X}(x)$$

(on a noté $(\cdot \mid \cdot)$ le produit hermitien de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash G)$) et si on le complète par rapport à ce produit hermitien, on obtient un espace de Hilbert que l'on note $L^2(G \backslash X; \pi^G_\Gamma)$. On définit alors une application linéaire T_Γ de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash X)$ dans $L^2(G \backslash X; \pi^G_\Gamma)$ en posant $(T_\Gamma \varphi)(x)(g) = \varphi(g \cdot x)$ pour φ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma \backslash X)$, x dans X et g dans G. On montre facilement que T_Γ est une isométrie. Si on considère maintenant deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 tels que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ soient équivalentes et si l'on note U une isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash G)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_2 \backslash G)$ qui entrelace ces deux représentations, alors U induit une isométrie, que l'on note encore U, entre $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma_1})$ et $L^2(G \backslash X; \pi^G_{\Gamma_2})$. On obtient ainsi une isométrie $T_{\Gamma_1,\Gamma_2} = T^{-1}_{\Gamma_2} \circ U \circ T_{\Gamma_1}$ de $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash X)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Gamma_2 \backslash X)$. On montre ensuite que T_{Γ_1,Γ_2} induit une isométrie entre les espaces de Sobolev $H^1_{\mathbb{C}}(\Gamma_1 \backslash X)$

et $H^1_{\mathbb{C}}(\Gamma_2\backslash X)$. On en déduit, en utilisant la caractérisation variationnelle des valeurs propres, que les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectraux. Ceci finit la preuve théorème de Sunada que l'on trouve dans [4]. On fait maintenant la remarque suivante: si K est le stabilisateur générique de l'action de G et si Γ a les mêmes propriétés que précédemment, alors $L^2(G\backslash X; \pi_\Gamma^G) = L^2(G\backslash X; (\pi_\Gamma^G)_K)$. En effet, si x est dans X, alors K est conjugué à un sous-groupe de G_x, le stabilisateur de x. Il existe donc g dans G tel que gKg^{-1} soit inclu dans G_x. Si maintenant φ est dans $L^2(G\backslash X; \pi_\Gamma^G)$ et l dans G_x, alors $\varphi(x) = \varphi(l\cdot x) = \pi_\Gamma^G(l)\varphi(x)$. On en déduit que pour tout x dans X, on a:

$$\varphi(x) \in L^2(G\backslash X; \pi_\Gamma^G)^{G_x} \subseteq L^2(G\backslash X; \pi_\Gamma^G)^{gKg^{-1}} \subseteq L^2(G\backslash X; \pi_\Gamma^G)_K.$$

Il maintenant clair, d'après la preuve par transplantation, que si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K-équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectraux.

Preuve par la formule des traces de Selberg. L'idée de cette preuve est d'obenir une expression de la fonction de partition d'un quotient compact $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ qui ne fasse intervenir Γ qu'à travers la représentation π_Γ^G. On introduit pour cela la fonction $\varphi_{x,t}$ définie sur G par la formule $\varphi_{x,t}(g) = k(t, x, g\cdot x)$, et ce pour chaque $t > 0$ et $x \in X$. On applique la formule des traces de Selberg à $\varphi_{x,t}$ et on obtient:

$$\mathrm{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi_{x,t})) = \sum_{[g]_G} r_\Gamma(g) \int_{G_g\backslash G} k(t, u\cdot x, gu\cdot x) d\mu_{G_g\backslash G}(u).$$

On pose maintenant $\widehat{\varphi}_t(x) = \int_{G_g\backslash G} k(t, u\cdot x, gu\cdot x) d\mu_{G_g\backslash G}(u)$ et on vérifie facilement que pour tout g dans G et x dans X, on a $\widehat{\varphi}_t(g\cdot x) = \widehat{\varphi}_t(x)$. Donc $\widehat{\varphi}_t$ définit une fonction sur $G\backslash X$ et on trouve que:

$$\int_{G\backslash X} \widehat{\varphi}_t(x) d\mu_{G\backslash X}(x) = \int_{G_g\backslash X} k(t, x, gx) d\mu_{G_g\backslash X}(x).$$

On en déduit que:

$$\int_{G\backslash X} \mathrm{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi_{x,t})) d\mu_{G\backslash X}(x) = \sum_{[g]_G} r_\Gamma(g) \int_{G_g\backslash X} k(t, x, gx) d\mu_{G_g\backslash X}(x).$$

On utilise maintenant la formule donnant le noyau de la chaleur d'un revêtement et en regroupant les termes en classes de conjugaison de G, on obtient la formule de DeTurck-Gordon [15] donnant la fonction de partition de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$:

$$Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) = \sum_{[g]_G} r_\Gamma(g) \int_{G_g\backslash X} k(t,x,gx)d\mu_{G_g\backslash X}(x).$$

On a donc obtenu la formule:

$$Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) = \int_{G\backslash X} \mathrm{trace}(\pi_\Gamma^G(\varphi_{x,t}))d\mu_{G\backslash X}(x).$$

On a donc bien obtenu le résultat désiré, à savoir une expression de la fonction de partition en fonction du caractère de π_Γ^G. Ceci donne une preuve du théorème de Sunada. Pour généraliser ce résultat, on fait la remarque suivante: il est clair que $\varphi_{x,t}$ est un fonction invariante à gauche par G_x et, à fortiori, par un sous-groupe conjugué à K dans G. Si on suppose maitenant que Γ_1 et Γ_2 sont tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K-équivalentes, comme cette notion ne dépend que de la classe de conjugaison de K dans G, en utilisant les résultats de la première partie, on obtient que $\mathrm{trace}(\pi_{\Gamma_1}^G(\varphi_{x,t})) = \mathrm{trace}(\pi_{\Gamma_2}^G(\varphi_{x,t}))$. En intégrant cette égalité et en utilisant l'expression de la fonction de partition précédemment obtenue, on voit que l'on a uniquement besoin de l'équivalence des sous-représentations $(\pi_{\Gamma_1}^G)_K$ et $(\pi_{\Gamma_2}^G)_K$ pour obtenir l'isospectralité des quotients.

Preuve par le théorème de réciprocité de Frobenius. On suppose dans cette partie que la variété X est compacte. Dans ce cas, le groupe G est lui aussi compact. On va donc pouvoir utiliser le théorème de réciprocité de Frobenius et donner un preuve complètement élémentaire de théorème de Sunanda. Comme la variété $(X, \mathbf{m})$ est compacte, son laplacien Δ admet un spectre discret. On va noter $S_\mathbf{m}$ l'ensemble des valeurs propres de Δ comptées sans multiplicité et si λ est dans $S_\mathbf{m}$, on notera V_λ l'espace propre complexe correspondant (la multiplicité de λ dans le spectre de $(X, \mathbf{m})$ est donc égale à $\dim_\mathbb{C} V_\lambda$). Si H est un sous-groupe fermé du groupe des isométries, on obtient une représentation de H dans V_λ en posant $\pi_\lambda^H(h)(\varphi) = \varphi \circ h^{-1}$ pour φ dans V_λ et h dans H. Maintenant, si G est un groupe compact d'isométries et si Γ est un sous-groupe fini de G opérant librement sur X, les fonctions propres de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ correspondants à une valeur propre μ étant les fonctions de V_μ invariantes par l'action de Γ, la multiplicité de μ, vue comme valeur propre de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$, est égale à la multiplicité $[1_\Gamma : \pi_\lambda^\Gamma]$ de la représentation triviale de Γ dans π_λ^Γ. On va maintenant essayer d'obtenir une expression de ce nombre faisant intervenir π_λ^G:

$$\begin{aligned}[1_\Gamma : \pi_\lambda^\Gamma] &= [1_\Gamma : \mathrm{Res}_\Gamma^G(\pi_\lambda^G)] = \Big[1_\Gamma : \mathrm{Res}_\Gamma^G\Big(\sum_{\rho\in\widehat{G}}[\rho : \pi_\lambda^G]\rho\Big)\Big] \\ &= \sum_{\rho\in\widehat{G}}[1_\Gamma : \mathrm{Res}_\Gamma^G(\rho)][\rho : \pi_\lambda^G] = \sum_{\rho\in\widehat{G}}[\rho : \pi_\Gamma^G][\rho : \pi_\lambda^G].\end{aligned}$$

Comme le groupe Γ n'apparaît dans cette formule qu'à travers la représentation π_Γ^G, le théorème de Sunada est redémontré de manière très simple. Pour tenir compte de l'existence du groupe K, on utilise un résultat de Donnelly [17]: une représentation irréductible ρ de G est une sous-représentation de l'une des représentations π_λ^G si et seulement si elle appartient à $\widehat{G}_K$. On en déduit que pour tout λ dans $S_\mathbf{m}$, on a la formule suivante:

$$[1_\Gamma : \pi_\lambda^\Gamma] = \sum_{\rho\in\widehat{G}_K}[\rho : \pi_\Gamma^G][\rho : \pi_\lambda^G].$$

Il est maintenant clair que si les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont K-équivalentes, alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isospectraux.

4.3 – Quelques cas particuliers

Nous allons voir dans cette partie que, dans certains cas, le critère que l'on vient d'obtenir est en fait une condition nécessaire et suffisante; c'est-à-dire que l'isospectrailté des quotients s'interprète en terme d'équivalence de représentations. Avant d'énoncer le résultat, remarquons que le groupe G qui apparaît dans le théorème est un groupe quelconque d'isométries à qui l'on impose de contenir les groupes Γ_1 et Γ_2. Si l'on désire obtenir une réciproque de la condition que l'on vient de trouver, il faut tout d'abord savoir pour quel groupe ayant cette propriété, la condition imposée est la plus faible. Des considérations purement algébriques montrent que la condition du théorème la moins restrictive est obtenue lorsque le groupe est maximal; c'est-à-dire lorsque G est le groupe de toutes les isométries. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant [43]:

Proposition 1. *Soient* $(X, \mathbf{m})$ *une variété riemannienne,* G *le groupe des isométries de* $(X, \mathbf{m})$*,* K *le stabilisateur générique de l'action de* G *sur* X *et* Γ_1 *et* Γ_2 *deux sous-groupes discrets de* G *tels que les quotients* $\Gamma_1\backslash X$ *et* $\Gamma_2\backslash X$ *soient des variétés compactes. On suppose que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée:*

a) X *est compacte et les espaces propres réels de* $(X, \mathbf{m})$ *sont irréductibles.*
b) $(X, \mathbf{m})$ *est un espace symétrique de rang* 1 *de type non compact.*
c) $(X, \mathbf{m})$ *est l'espace euclidien* $\mathbb{R}^n$.
Alors les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ *et* $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ *sont isospectraux si et seulement si les représentations* $\pi_{\Gamma_1}^G$ *et* $\pi_{\Gamma_2}^G$ *sont* K*-équivalentes.*

La preuve de ce résultat est différente suivant les hypothèses utilisées. Lorsque X est compacte, on peut utiliser la formule qui apparaît dant le partie précédente et qui est obtenue en utilisant le théorème de réciprocité de Frobenius. Il se trouve que cette formule est particulièrement simple lorsque les espaces propres réels sont irréductibles et l'on peut ainsi trouver les multiplicités des représentations de $\widehat{G}_K$ dans π_Γ^G à partir des multiplicités des valeurs propres de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$. Dans les deux derniers cas, la variété $X = G/K$ est homogène. Les représentations de $\widehat{G}_K$ sont paramétrées par un nombre réel et on peut explicitement calculer le spectre de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ en fonction des valeurs de ce nombre réel qui correspondent à des composantes irréductibles de π_Γ^G.

Exemples 2. Il est connu que si G/K est un espace symétrique de type compact de rang 1, alors les espaces propres de X sont irréductibles pour G. En particulier, si X est la sphère S^n, alors $G = O(n+1)$ et $K = O(n)$ et il existe des exemples de sous-groupes finis Γ_1 et Γ_2 de G non conjugués dans G et tels que les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ soient K-équivalentes. En utilisant la proposition précedente, on va pouvoir donner de tels exemples.

a) *Les exemples d'Urakawa.* Ce sont des sous-groupes Γ_i de $O(n+1)$ engendrés par des réflexions ($n \geq 3$). En utlisant les calculs de série de Poincaré faits dans [5], Urakawa donne des exemples de groupes de Coxeter Γ_1 et Γ_2 tels que, si C_1 et C_2 sont les chambres de Weyl correspondantes, alors $C_1 \cap S^n$ et $C_2 \cap S^n$ sont isospectraux pour le problème de Neumann et le problème de Dirichlet. Comme les fonctions propres de $C_i \cap S^n$ pour le problème de Neumann sont les fonctions propres de S^n invariantes par Γ_i, les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont K-équivalentes. Les premiers exemples non triviaux apparaissent lorsque $n = 3$. Dans ce cas on peut prendre Γ_1 correspondant au système de racines $A_3 \times A_1$ et Γ_2 correspondant au système de racines $A_2 \times B_2$. On peut trouver de nombreux exemples aux pages 450 et 451 de [54]. C'est en utlisant les exemples d'Urakawa et la proposition précédente que C. Gordon et D. Webb ont construit des domaines convexes isospectraux et non isométriques [23].

b) *Les exemples d'Ikeda.* Ce sont des exemples d'espaces lenticulaires, c'est-à-dire de quotients de sphères par des groupes cycliques. Plus précisemment, on considère $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ et on note Γ_α le groupe cyclique engendré par l'élément γ_α de $O(2n+2)$ défini par $\gamma_\alpha(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (\exp(2i\pi\alpha_1)z_1, \ldots, \exp(2i\pi\alpha_{n+1})z_{n+1})$ où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Si tous les α_i sont rationnels, on obtient un groupe fini qui opère librement sur S^{2n+1}. A chaque groupe Γ_α, Ikeda associe une fraction rationnelle, qui ne dépend que du spectre de $\Gamma_\alpha\backslash S^{2n+1}$, et en travaillant avec cette fraction rationnelle, il arrive à construire des exemples d'espaces lenticulaires isospectraux et non isométriques. Ikeda s'est aussi intéressé au problème de l'isopectralité des espaces lenticulaires pour le laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles et il a construit pour chaque $p \in \{0, \ldots, n\}$ des groupes tels que les quotients $\Gamma_\alpha\backslash S^{2n+1}$ et $\Gamma_\beta\backslash S^{2n+1}$ soient isospectraux pour les i-formes pour tout $i \leq p$ mais pas isospectraux pour les $p+1$-formes. Il est clair que les représentations $\pi^G_{\Gamma_\alpha}$ et $\pi^G_{\Gamma_\beta}$ sont K-équivalentes et ne peuvent pas être équivalentes. Par exemple, si on prend $n = 3$, $\alpha = (3/11, 4/11, 5/11)$ et $\beta = (1/11, 2/11, 3/11)$, alors les quotients $\Gamma_\alpha\backslash S^5$ et $\Gamma_\beta\backslash S^5$ sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais ne sont pas isospectraux pour le laplacien opérant sur les 1-formes [28]. Ce sont d'ailleurs les seuls exemples connus de groupes induisant des représentations K-équivalentes et non équivalentes.

4.4 – Le cas des fibrés vectoriels

Le but de cette section est de donner un analogue de la généralisation du théorème de Sunada pour une classe plus large d'opérateurs différentiels naturels.

On se place dans le cadre suivant: on considère une variété riemannienne $(X, \mathbf{m})$ et E un fibré naturel pour $\mathbf{m}$ au dessus de X; c'est-à-dire un fibré hermitien tel que si g est une isométrie de $(X, \mathbf{m})$, alors g opére sur E de sorte que g induise une isométrie de E_x sur $E_{g \cdot x}$. Dans ces conditions, le groupe des isométries opère sur l'ensemble $S(E)$ des sections C^∞ de E de la manière suivante: si g est une isométrie et s une section de E, alors $(g \cdot s)(x) = g \cdot s(g^{-1} \cdot x)$. Remarquons que si Γ est un groupe discret d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ opérant librement sur X, alors il opère aussi librement sur E et le fibré quotient E_Γ est un fibré naturel au dessus de $\Gamma \backslash X$ pour la métrique induite par $\mathbf{m}$ dont les sections sont les sections de E invariantes par Γ. On considère maintenant un opérateur différentiel naturel D, c'est-à-dire un opérateur différentiel opérant sur les sections de E et commutant avec l'action sur les sections des isométries de $(X, \mathbf{m})$. Si Γ est comme avant, alors D induit un opérateur différentiel naturel D_Γ opérant sur les sections de E_Γ.

Exemples 1. a) Si X est une variété quelconque, alors $\bigwedge^p (T^*X)_{\mathbb{C}}$ est naturel pour toute métrique riemmannienne $\mathbf{m}$ sur X et l'opérateur de Hodge-De Rham Δ^p est un opérateur naturel pour $\mathbf{m}$. On peut généraliser cet exemple en considérant le laplacien de Lichnérowicz opérant sur les tenseurs.

b) Si $X = G/K$ est un espace symétrique et si τ est une représentation de K dans un espace V de dimension finie, on construit un fibré homogène E_τ sur X en quotientant $G \times V$ par l'action suivante de K: $k \cdot (g, v) = (gk^{-1}, \tau(k)v)$. Le fibré ainsi obtenu est naturel pour la métrique symétrique de X et l'opérateur de Casimir est un opérateur naturel pour cette même métrique.

Dans le cadre des fibrés vectoriels, le résultat que l'on a obtenu est le suivant [43]:

Proposition 2. *Soient E un fibré naturel au dessus d'une variété riemmannienne $(X, \mathbf{m})$ et D un opérateur différentiel naturel elliptique et auto-adjoint. Soient G un groupe d'isométries, K le stabilisateur générique de l'action de G sur X et τ la représentation de K dans la fibre E_x au dessus d'un point X dont le stabilisateur est K. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que les quotients $\Gamma_1 \backslash X$ et $\Gamma_2 \backslash X$ soient des variétés compactes. Si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes relativement à τ, alors les opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospectraux.*

Remarquons que l'on peut, dans le cas où X est compacte, donner une preuve de la proposition précédente qui utilise le théorème de réciprocité de Frobenius. Il faut pour cela adapter le résultat de Donnelly (*i.e.* prouver qu'une représentation irréductible ρ de G apparaît dans l'un des espaces propres si et seulement si $\mathrm{Res}_K^G(\rho)$ a une de ses composantes irréductibles isomorphe à τ). Si les espaces propres de D sont irréductibles pour G, la condition de la proposition est une condition nécessaire et suffisante. Or, cette condition d'irréductibilité est vérifiée lorsque X est la sphère S^n munie de sa métrique canonique, E le fibré $\bigwedge^p (T^*X)_{\mathbb{C}}$ et D le laplacien de Hodge-De Rham. Les espaces lenticulaires construits par Ikeda qui sont isospectraux sur les $j-$formes pour $j \leq p$ et qui ne sont pas isospectraux sur les $(p+1)-$formes donnent des exemples de groupes Γ_1 et Γ_2 qui sont tels que, si l'on note τ^j la représentation naturelle de $K = O(n)$ dans $\bigwedge^j \mathbb{C}^n$, alors les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ sont équivalentes relativement à τ^j pour $j \leq p$ mais ne sont pas équivalentes relativement à $\tau^{(j+1)}$.

5 – Vers une classification?

On va continuer dans cette partie à essayer d'interpréter en termes de représentations le fait que deux variétés localement isométriques soient isospectrales. Il semble assez difficile d'obtenir une réponse générale et deux possibilités s'offrent à nous. La première est d'obtenir une caractérisation générique des variétés isospectrales et localement isométriques. L'idée est que, génériquement, tous les exemples de variétés isospectrales sont ceux qui proviennent du théorème de Sunada. Une deuxième possibilité est d'imposer aux variétés considérées d'être non seulement isospectrales pour le laplacien opérant sur les fonctions mais aussi pour tout opérateur différentiel naturel. On espère que cette hypothèse plus forte permettra d'obtenir une classification des variétés isospectrales. Nous allons expliquer les résultats obtenus dans ces deux directions.

5.1 – Une réciproque générique du théorème de Sunada

On adopte dans cette partie, le point de vue suivant: puisqu'il semble difficile de classifier tous les exemples de variétés isospectrales et localement isométriques, ne peut-on pas espérer une classification générique?

On se place pour cela dans le cadre suivant: on fixe une variété X et un groupe de Lie G qui opère fidèlement et proprement sur celle-ci. On peut considérer l'ensemble $\mathcal{M}^G$ des métriques sur X invariantes par G. On est maintenant dans le cadre du théorème de Sunada (et de sa généralisation) et on veut voir dans quelle mesure la condition qui apparaît dans ce théorème est nécessaire. D'après ce que nous avons vu précédemment, il nous faut introduire K, le stabilisateur générique de l'action de G sur X. On note $\mathcal{S}^G$ l'ensemble des métriques $\mathbf{m}$ de $\mathcal{M}^G$ qui sont caractérisées par la propriété:

"Si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que les quotients riemanniens $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ soient deux variétés compactes et isospectrales, alors les représentations $(\pi^G_{\Gamma_1})_K$ et $(\pi^G_{\Gamma_2})_K$ sont équivalentes."

On espère pouvoir montrer est que $\mathcal{S}^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$. Nous allons voir quels sont les résultats obtenus dans cette direction.

1. Le cas des groupes finis. Pour des raisons d'ordre géométrique et algébrique que l'on expliquera plus tard, le cas des groupes finis se traite plus facilement et on obtient le résultat suivant [44]:

Proposition 1. *$\mathcal{S}^G$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}^G$.*

L'idée de la preuve est particulièrement simple et consiste à utiliser les relations avec les géodésiques périodiques. On commence par utiliser la formule donnant la fonction de partition d'un revêtement riemannien. Si Γ est un sous-groupe de G, alors la fonction de partition de $(\Gamma\backslash X, \mathbf{m})$ est donnée par la formule:

$$Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}(t) = \sum_{[g]} r_\Gamma(g) Z(g,t).$$

Dans l'égalité précédente, la somme porte sur les classes de conjugaison, r_Γ est la fonction centrale qui apparaît dans la formule des traces de Selberg et qui est définie sur G par la formule $r_\Gamma(g) = \sharp([g]\bigcap\Gamma)/\sharp(\Gamma)$, et $Z(g,t) = \int_X k(t,x,g\cdot x)dx$. Le but est de montrer que si la métrique $\mathbf{m}$ est convenablement choisie, alors on peut reconstruire la fonction r_Γ à partir de la fonction de partition $Z_{(\Gamma\backslash X,\mathbf{m})}$. Supposons, pour simplifier, que l'action de G soit libre. Dans ce cas $G\backslash X$ est une variété et $\mathcal{M}^G$ s'identifie aux métriques sur $G\backslash X$. Si l'on fait l'hypothèse que toutes les géodésiques périodiques de $(G\backslash X, \mathbf{m})$ sont non dégénérées et que le spectre des longueurs est simple, on peut utiliser les résultats de Colin de Verdière que l'on a rappelés dans la première partie. On a dans ce cas des égalités du type:

$$Z(g,t) =_{F_\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\alpha,g}(t)\exp(-l_n^2(g)/4t).$$

Dans l'égalité précédente, $\{0 \leq l_0(g) < \cdots < l_n(g) <] \cdots\}$ désigne la collection des longueurs des géodésiques de $(X, \mathbf{m})$ qui sont telles que $c(t+1) = g{\cdot}c(t)$. Comme de telles géodésiques se projettent en des géodésiques périodiques de $(G\backslash X, \mathbf{m})$ et que cette variété a un spectre des longueurs qui est simple, il ne peut y avoir de mélange entre les développements des différentes intégrales et on arrive à identifier la fonction r_Γ grâce au développement ainsi obtenu. Un résultat d'Abraham nous assure que l'hypothèse faite sur $\mathbf{m}$ est générique, ce qui montre que $\mathcal{S}^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{S}^G$ est ouvert, ce qui est un simple exercice.

Exemple 1. Si G est d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers, alors $\mathcal{S}^G = \mathcal{M}^G$. En effet, si Γ_1 et Γ_2 sont deux sous-groupes de G tels que $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ soient isospectraux, alors, comme ces quotients ont même volume, Γ_1 et Γ_2 ont même cardinal et, d'après le théorème de Sylow, sont conjugués dans G.

Exemple 2. On considère un variété fermée Y, un groupe fini Γ qui opère sur Y et on pose $X = Y \times Y$ et $G = \Gamma \times \Gamma$. Dans ce cas $\mathcal{M}^G - \mathcal{S}^G$ contient la variété de dimension infinie constituée des métriques de la forme $\mathbf{m} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{n}$ où $\mathbf{n}$ parcourt l'ensemble des métriques sur Y qui sont invariantes par Γ. Si l'on pose $\Gamma_1 = \Gamma \times \{1\}$ et $\Gamma_2 = \{1\} \times \Gamma$ et si l'on considère une métrique du type précédent, alors les variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont isométriques, donc isospectrales et les représentations $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$ ne sont pas équivalentes puisque Γ_1 et Γ_2 sont normaux dans G.

Exemple 3. On considère la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$. Ikeda a montré qu'il existe deux opérateurs unitaires g_1 et g_2 de $\mathbb{C}^n$, qui commutent et qui sont tels que, si Γ_i désigne le groupe engendré par g_i, alors les quotients $\Gamma_1\backslash S^{2n-1}$ et $\Gamma_2\backslash S^{2n-1}$, lorsqu'on les munit de la métrique canonique, sont isospectraux pour le laplacien opérant sur les fonctions mais pas pour le laplacien opérant sur les formes différentielles [28]. On en déduit que si G est n'importe quel sous-groupe du groupe orthogonal contenant Γ_1 et Γ_2, alors la métrique canonique à courbure constante n'est pas dans $\mathcal{S}^G$.

2. Le cas des groupes compacts. Lorsque le groupe G est compact, l'argument utilisé dans la partie précédente portant sur les géodésiques périodiques n'est plus valable, et ce pour deux raisons de natures différentes: l'une est géométrique et l'autre algébrique. Tout d'abord, supposons pour simplifier que l'action de G est libre. Dans ce cas, $G\backslash X$ est une variété et toute métrique $\mathbf{m}$ dans $\mathcal{M}^G$ induit une métrique sur $G\backslash X$, que l'on note encore $\mathbf{m}$, de sorte que la projection $(X, \mathbf{m}) \to (G\backslash X, \mathbf{m})$ soit une submersion riemannienne. Le problème que l'on rencontre est que les géodésiques de $(G\backslash X, \mathbf{m})$ s'identifient aux géodésiques horizontales de $(X, \mathbf{m})$ et il n'y a aucune raison pour que les géodésiques critiques pour l'énergie qui apparaissent dans la formule de trace soient horizontales. Il n'est donc pas évident de trouver une condition simple sur la métrique qui assure la validité des formules de trace, ce qui est une première obstruction à l'utilisation de la méthode de la première partie. Le deuxième problème nous vient des représentations. En effet, pour montrer que les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ étaient équivalentes, il suffisait de montrer qu'elles avaient même caractère. On est donc confronté au problème de savoir comment on peut exprimer en fonction des caractères de deux représentations α et β le fait que les sous-représentations $(\alpha)_K$ et $(\beta)_K$ sont équivalentes. Comme nous l'avons mentionné, un tel critère existe effectivement mais est difficilement appliquable, sauf dans le cas où G est fini ([43], cor. 1.5), ce qui est le cas envisagé dans la première partie (rappelons que dans ce cas, K est trivial). On est donc amené à utiliser une autre méthode qui avait été introduite dans [45] et on obtient le résultat suivant [44]:

Proposition 2. *On suppose que X et G sont tels que pour toute représentation de G irréductible réelle ρ admettant des vecteurs invariants par K, on a $\dim(\rho) \leq \dim(X)$, alors $\mathcal{S}^G$ est dense dans $\mathcal{M}^G$.*

Le preuve de ce résultat est basée sur le résultat signalé dans la partie précédente (proposition 3.1) et que l'on peut exprimer sous la forme suivante: $\mathcal{S}^G$ contient toutes les métriques $\mathbf{m}$ de $\mathcal{M}^G$ qui sont telles que tous les espaces propres réels de $(X, \mathbf{m})$ sont irréductibles. On utilise maintenant un résultat de Zelditch [60] qui assure que, si pour toute représentation de G irréductible réelle ρ admettant des vecteurs invariants par K, on a $\dim(\rho) \leq \dim(X)$, alors l'ensemble des métriques ayant la propriété que l'on vient de citer est dense dans $\mathcal{M}^G$. Remarquons seulement que dans l'article de Zelditch le groupe G considéré est fini mais la preuve dans le cas où le groupe est compact est exactement la même et, comme seules les représentations qui apparaissent dans les espaces propres sont considérées dans la preuve, il suffit d'imposer l'hypothèse sur les dimensions aux représentations admettant des vecteurs invariants par K, d'après le résultat de Donnelly.

EXEMPLE 1. L'exemple le plus simple est celui où $G = T$ est un tore. Dans ce cas, les représentations irréductibles réelles sont de dimension 1 ou 2 et la proposition s'applique dès que $\dim(X) \geq 2$. On peut prendre par exemple $X = T$ et voir opérer T par translations sur lui-même. Dans ce cas, $\mathcal{M}^T$ est l'ensemble des métriques invariantes sur T et le stabilisateur générique est trivial. Comme le groupe T est commutatif, on vérifie facilement que si deux sous-groupes Γ_1 et Γ_2 sont tels que $\pi^T_{\Gamma_1}$ et $\pi^T_{\Gamma_1}$ sont équivalentes, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Remarquons que même dans ce cas simple, $\mathcal{S}^T$ est différent de $\mathcal{M}^T$. Pour voir ceci, il suffit de considérer les exemples de paires de tores plats isospectraux connus à ce jour (par exemple les tores de Milnor). En effet, si T_0 et T_1 sont de tels exemples, il existe un tore plat T qui est un revètement fini au dessus de T_0 et T_1 et la métrique sur T relevée de T_0 et T_1 n'est pas dans $\mathcal{S}^T$.

EXEMPLE 2. Nous allons voir maintenant un exemple où le groupe K est non trivial. On considère la sphère $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ et on prend comme groupe G le produit $(O(2))^n$ que l'on considère comme un sous-groupe de $O(2n)$ en le plongeant de manière diagonale par blocs. Dans ce cas, le stabilisateur générique est le sous-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Pour voir cela, on écrit un élément x de $\mathbb{R}^{2n}$ sous la forme $x = (x_1, \ldots, x_n)$ où les x_i sont dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'ouvert U de la sphère constitué des x tels que pour tout i, on ait $x_i \neq 0$. Comme l'action de G préserve cette décomposition de $\mathbb{R}^{2n}$, le stabilisateur G_x d'un tel point x est le produit des stabilisateur des x_i, c'est-à-dire, le produit des groupes d'ordre deux engendrés par les symétries orthogonales du plan par rapport aux droites engendrées par les x_i et ce pour $1 \leq i \leq n$. Si l'on pose $T = (SO(2))^n$ et $K = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, alors G est le produit semi-direct $K \ltimes T$. On vérifie immédiatement que si l'on restreint à T une représentation irréductible de G qui admet des vecteurs invariants par K, alors cette représentation reste irréductible. L'hypothèse de dimension est donc satisfaite.

Exemple 3. On considère une variété X compacte simplement connexe qui admet une métrique symétrique de rang 1, c'est-à-dire la sphère ou les espaces projectifs. On prend pour groupe G la composante neutre du groupe des isométries de la métrique symétrique et dans ce cas, on a $\mathcal{S}^G = \mathcal{M}^G$. En effet, toute métrique de $\mathcal{M}^G$ est multiple de la métrique symétrique et il est bien connu que les espaces propres du laplacien pour la métrique symétrique sont tous irréductibles pour G.

Les résultats que nous avons énoncés supposent que le groupe G d'isométries est compact et nous n'avons malheureusement dans le cas non-compact aucun résultat d'ordre général. Notons cependant que si X est l'espace euclidien ou un espace symétrique simplement connexe à courbures négatives, alors $\mathcal{S}^G = \mathcal{M}^G$ si G est le groupe des isométries de X (proposition 3.1).

5.2 – Variétés fortement isospectrales

Dans cette partie, on change de point de vue et on se demande si, quitte à changer la notion d'isospectralité, on ne peut pas obtenir une classification des variétés isospectrales localement isométriques.

Bien que les notions de fibré naturel au dessus d'une variété $(X, \mathbf{m})$ et d'opérateurs naturel aient déja été introduites, rappelons qu'un fibré E au dessus de X est naturel si l'action du groupe de isométries de $(X, \mathbf{m})$ s'étend en une action comme groupe d'automorphismes de E. Dans une telle situation, un opérateur D opérant sur les sections de E est naturel s'il commute avec l'action de G sur les sections de E. Remarquons que si Γ est un groupe discret d'isométries de $(X, \mathbf{m})$ opérant librement sur X, alors il opère aussi librement sur E et le fibré quotient E_Γ est un fibré naturel au dessus de $\Gamma\backslash X$ pour la métrique induite par $\mathbf{m}$. On notera D_Γ l'opérateur différentiel induit par D et opérant sur les sections de E_Γ. Ceci dit, nous dirons que deux variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont fortement isospectrales si pour tout fibré naturel E au dessus de $(X, \mathbf{m})$ et pour tout opérateur naturel, elliptique et auto-adjoint D, les opérateurs D_{Γ_1} et D_{Γ_2} sont isospectraux. D'après ce que nous avons vu, si les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes, alors les variétés $(\Gamma_1\backslash X, \mathbf{m})$ et $(\Gamma_2\backslash X, \mathbf{m})$ sont fortement isospectrales. Un problème naturel est de savoir si il existe une réciproque à ce résultat: deux variétés fortement isospectrales donnent-elles lieu à des représentations équivalentes?

Dans cette partie, nous allons regarder le cas où X est la sphère S^n ou l'espace hyperbolique H^n munis de leur métrique usuelle. Ces deux variétés sont homogènes et peuvent s'écrire sous la forme G/K où G est le groupe des isométries de X et K est le stabilisateur d'un point fixé une fois pour toutes. Cette structure de variété homogène permet de classifier les fibrés naturels au dessus de X. En effet, ils sont tous obtenus de la manière suivante: si τ est une représentation de K dans un espace de dimension finie V, on peut faire opérer K à droite sur $G\times V$ par la formule $(g,v)\cdot k = (gk, \tau(k^{-1})v)$. On note E_τ le quotient de $G\times V$ par cette action de K. Le fibré ainsi obtenu est naturel et tous les fibrés que l'on considère usuellement sont de ce type. Il existe un opérateur naturel privilégié qui opère sur les sections de E_τ. Cet opérateur s'appelle l'opérateur de Casimir et se définit comme suit: on considère deux bases $\{X_i\}_{1\leq i\leq p}$ et $\{Y_i\}_{1\leq i\leq p}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G telles que, si B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, alors $B(X_i, Y_j) = \delta_{i,j}$. On définit maintenant l'opérateur de Casimir $C = \sum_{1\leq i\leq p} X_i Y_i$. A priori, C opère sur les fonctions définies sur G à valeurs vectorielles. Cependant, si l'on identifie les sections de E_τ aux fonctions vérifiant la condition d'équivariance $\varphi(kg) = \tau(k)\varphi(g)$, alors on vérifie facilement que C définit bien un opérateur naturel opérant sur les sections de E_τ que l'on notera C_τ. Par exemple, si l'on choisit τ de sorte que $E_\tau = \bigwedge^p (T^*X)_{\mathbb{C}}$, alors C_τ est le laplacien de Hodge-De Rham.

La caractérisation des variétés elliptiques et hyperboliques fortement isospectrales que l'on a obtenue est la suivante [46]:

Proposition 2. *Soient X la sphère S^n ou l'espace hyperbolique H^n. Soient G le groupe des isométries de X, K le stabilisateur d'un point fixé une fois pour toutes, et Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ soient deux variétés compactes. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Les variétés $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ sont fortement isospectrales.*
b) *Pour toute représentation τ de K, les opérateurs C_{τ,Γ_1} et C_{τ,Γ_2} induits par l'opérateur de Casimir sont isospectraux.*
c) *Les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes.*

D'après ce que l'on a vu précédemment, il suffit de montrer que b) implique c). Dans les deux cas, on utilise la classification des représentations irréductibles du groupe orthogonal.

Le cas de la sphère S^n est le plus simple. En effet, le groupe $G = O(n+1)$ est compact et on peut appliquer le théorème de réciprocité de Frobenius. On remarque pour cela que l'espace des sections L^2 du fibré E_τ est l'espace de la représentation $\sigma = \mathrm{Ind}_K^G(\tau)$. Le théorème de réciprocité de Frobenius nous permet de décomposer cette représentation et, comme l'opérateur de Casimir C_τ commute avec σ, chaque composante irréductible est contenue dans un espace propre de C_τ. On utilise alors la classification des représentations irréductible de $O(n+1)$ et le fait que l'on sait calculer explicitement la valeur propre de l'opérateur de Casimir en restriction à une composante irréductible en fonction du poids dominant entier qui lui est associé. L'idée de la preuve est de montrer que chaque représentation irréductible σ de G a même multiplicité dans $\pi_{\Gamma_1}^G$ et $\pi_{\Gamma_2}^G$. On montre que cette égalité des multiplicités est une conséquence de l'isospectralité des opérateurs C_{τ,Γ_1} et C_{τ,Γ_2} quand τ parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de la restriction de σ à K. Remarquons que cette preuve demande l'isospectralité de tous les opérateurs C_{τ,Γ_1} et C_{τ,Γ_2} quand τ parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles de $K = O(n)$. En utilisant cette méthode, on ne peut espérer affaiblir l'hypothèse en ne demandant l'isospectralité d'un nombre fini d'opérateurs.

L'idée de la démonstration est la même dans le cas où $X = H^n$, bien que la non-compacité de $G = O(n,1)$ complique la preuve. En effet, on ne peut plus utiliser le théorème de Frobenius pour décomposer $\sigma = \mathrm{Ind}_K^G(\tau)$ et on est amené à utiliser des formules de trace. Contrairement aux formules de trace que l'on a considérées jusqu'à présent et qui étaient basées sur l'utilisation du noyau de la chaleur, on utilise ici des techniques d'analyse harmonique sur les espaces symétriques de rang 1, techniques que l'on peut trouver dans [56]. Cette approche avait été utilisée pour la première fois par FRIED [19r] dans le cas du laplacien de Hodge-De Rham opérant sur les formes différentielles. La forme précise de la formule de trace obtenue se trouve dans ([46], p. 384). Nous allons juste donner l'allure générale de celle-ci. Si l'on note $Z_{\tau,\Gamma}(t) = \mathrm{trace}(\exp(-tC_{\tau,\Gamma}))$, alors on a une formule du type:

$$Z_{\tau,\Gamma}(t) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash H^n)\varphi_\tau(t) + \sum_{[g]_G, g\neq 1} r_\Gamma(g)\alpha_\tau(g,t)e^{-l^2(g)/4t}.$$

Dans l'égalité précédente, φ_τ et α_τ désignent des fonctions indépendantes de Γ et $l(g) = inf_{x\in H^n} d(x, g\cdot x)$. On déduit de cette égalité que si C_{τ,Γ_1} et C_{τ,Γ_2} sont isospectraux, alors pour tout $l > 0$, on a: $\sum_{[g]_G, l(g)=l} \alpha_\tau(g,t)(r_{\Gamma_1}(g) - r_{\Gamma_2}(g)) = 0$. Si l'on demande maintenant que, quand τ parcourt l'ensemble de toutes les représentations irréductibles de K, tous les opérateurs C_{τ,Γ_1} et C_{τ,Γ_2} soient isospectraux, on obtient que les fonctions r_{Γ_1} et r_{Γ_2} sont égales, ce qui montre bien l'équivalence des représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$. Notons que, comme dans le cas de la sphère, cette méthode demande l'isospectralité de tous les opérateurs de Casimir. Cependant, nous allons voir que dans le cas des surfaces de Riemann, on obtient un résultat plus fort [46]:

Proposition 2. *Soient H^2 le plan hyperbolique et $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des isométries de H^2. Soient Γ_1 et Γ_2 deux sous-groupes discrets de G tels que $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ soient deux surfaces compactes. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Les surfaces $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ sont fortement isospectrales.*
b) *Les surfaces $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ ont même spectre pour le laplacien opérant sur les fonctions.*
c) *Les représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$ sont équivalentes.*

Il suffit de montrer que b) implique c). Nous allons donner deux preuves de ce résultat qui sont de natures différentes. Un première preuve consiste à utiliser la formule de trace que l'on vient de donner. On remarque que celle-ci prend une forme particulièrement simple pour la raison suivante: deux isométries hyperbolique g_1 et g_2 sont conjuguées dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ si et seulement si $l(g_1) = l(g_2)$. Géométriquement, ceci signifie qu'il n'y a pas d'holonomie le long des géodésiques périodiques. On obtient donc tout de suite que si deux surfaces de Riemann $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ ont même spectre pour le laplacien opérant sur les fonctions, alors les fonctions r_{Γ_1} et r_{Γ_2} sont égales, ce qui montre bien l'équivalence des représentations $\pi^G_{\Gamma_1}$ et $\pi^G_{\Gamma_2}$. Remarquons que le résultat est encore vrai si l'on impose l'isospectralité pour n'importe quel opérateur induit par un opérateur de Casimir. La deuxième preuve est basée sur des considérations plus algébriques. D'après ce que nous avons vu dans la partie précédente, si les surfaces de Riemann $\Gamma_1\backslash X$ et $\Gamma_2\backslash X$ ont même spectre pour le laplacien opérant sur les fonctions, alors les sous-représentations $(\pi^G_{\Gamma_1})_K$ et $(\pi^G_{\Gamma_2})_K$ avec $K = PSO(2)$ sont équivalentes (proposition 3.1).

Il ne reste donc plus qu'à controler les multiplicités des représentations qui n'ont pas de vecteurs invariants par K. Or, les représentations irréductibles de G qui ne sont pas dans $\widehat{G}_K$ s'appellent classiquement les représentations de la série discrète et sont naturellement paramétrées comme $\{\omega_n$ avec $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$. Avec ces notations, on peut montrer que la multiplicité de ω_n dans π_Γ^G est égale à $\mid n \mid (g-1)$ si $\mid n \mid \geq 2$ et à g si $n = \pm 1$ où g désigne le genre de la surface $\Gamma \backslash X$ [56]. Comme, en dimension 2, le genre est un invariant spectral, la multiplicité dans π_Γ^G de n'importe quelle représentation irréductible ne dépend que du spectre de la surface $\Gamma \backslash X$ et on retrouve le résultat précédemment cité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham: *Bumpy metrics*, Proc. Symp. Pure Math., **14** (1970), 1-3.

[2] J.P. Berr: *Tores isospectraux en dimension 3*, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 163-166.

[3] P. Bérard: *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc., **48** (1993), 565-576.

[4] P. Bérard: *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Astérisque, **177** (1989), 127-154.

[5] P. Bérard – G. Besson: *Spectres et groupes cristallographiques II: domaines sphériques*, Ann. Inst. Fourier, **30** (1980), 237-248.

[6] M. Berger M. – Gauduchon – P.E. Mazet: *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes, 194, 1971.

[7] N. Bourbaki: *Eléments de mathématique: groupes et algèbres de Lie*, Masson, Paris, 1982.

[8] R. Brooks – P. Perry – P. Petersen: *Compactness and finitness theorems for isospectral manifolds*, J. reine angew. Math., **426** (1992), 67–89.

[9] R. Brooks – R.Tse: *Isospectral surfaces of small genus*, Nagoya Math. J., **107** (1987), 63-66.

[10] P. Buser: *Isospectral riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier, **36** (1986), 167-192.

[11] C. Chabauty: *Limite d'ensemble et géométrie des nombres*, Bull. Soc. Math. France, **78** (1950), 143-151.

[12] J. Chazarain: *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Inventiones Math., **24** 1(974), 65-82.

[13] J. Cheeger – S.T. Yau: *A Lower Bound for the Heat Kernel*, Comm. Pure Appl. Math., **40** (1981), 465-480.

[14] Y. Colin de Verdière: *Spectre du laplacien et géodésiques périodiques*, Compositio Math., **27** (1973), 159-184.

[15] D. DeTurck – C. Gordon: *Isospectral deformations II. Trace Formulas, metrics and potentials*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989), 1067-1095.

[16] H. Donnelly: *Asymptotic expansions for compact quotients of properly discontinuous group actions*, Illinois J. Math., **23** (1979), 485-496.

[17] H. Donnelly: *G-spaces, the asymptotic Splitting of $L^2(M)$ into irreducibles*, Math. Ann., **237** (1978), 23-40.

[18] J. Duistermaat – V. Guillemin: *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Inventiones Math., **29** (1975), 39-79.

[19] D. Fried: *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds*, Invent. Math., **84** (1986), 523-540.

[20] F. Gassmann: *Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit von Hurwirtz*, Math. Z., **25** (1926), 124-143.

[21] I.M. Gelfand: *Automorphic functions and the theory of representations*, Internat. Congress Math., (1962), 75-85.

[22] C. Gordon: *Isospectral closed Riemannian manifolds which are not locally isometric*, J. Diff. Geom., **37** (1993), 639-649.

[23] C. Gordon – D. Webb – Wolpert S.: *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Invent. Math., **27** (1992), 134-138.

[24] C.S. Gordon – E. Wilson: *Isospectral deformations of compact solvmanifolds*, J. Diff. Geom., **19** (1984), 241-256.

[25] C.S. Gordon – E. Wilson : *The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds*, Michigan Math. J., **33** (1986), 253-271.

[26] V. Guillemin – D. Kazhdan: *Some inverse spectral results for negatively curved n-manifolds*, Proc. Symp. Pure Math., **36** (1980), 153-180.

[27] A. Ikeda: *On the spherical space forms which are isospectral but nonisometric*, J. Math. Soc. Jap., **35** (1983), 437-444.

[28] A. Ikeda: *Riemannian manifolds p-isospectral but not $(p+1)$-isospectral, in Geometry of Manifolds (Matsumoto)*, Perspect. Math., **8** (1988), 383-417.

[29] H. Jacquet – R. Langlands: *Automorphics forms on $GL(2)$*, Lectures Notes in Mathematics, **114** (Springer), 1970.

[30] A.A. Kirillov: *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, 1969.

[31] C.G. Lekerkerker: *Geometry of numbers*, Wolters-Noordhoff, 1969.

[32] A. M. Macbeath: *Groups of homeomorphisms of a simply connected space*, Ann. of Math., **79** (1964), 473-488.

[33] C.C. Moore: *Decomposition of unitary représentations defined by discrete subgroups of nilpotent groups*, Ann. of Math., **82**, (1965), 146-182.

[34] B. Osgood – R. Phillips – P. Sarnak: *Compact isospectral sets of surfaces*, J. Functional Anal., **80** (1988), 212-234.

[35] H. Ouyang H: Ph.D Thesis, Washington University, St Louis, 1991.

[36] H. Ouyang – H. Pesce: *Déformations isospectrales sur les nilvariétés de rang deux*, C.R. Acad. Sci. Paris, **314** (1992), 621-623.

[37] H. Pesce: *Déformations isospectrales sur certaines nilvariétés et finitude spectrale des variétés de Heisenberg*, Ann. scient. Ećole. Norm. Sup., **25** (1992), 515-538.

[38] H. Pesce: *Compacité de l'ensemble des réseaux isospectraux et applications*, Topology, **36** (1997), 695-710.

[39] H. Pesce: *Borne explicite du nombre de tores plats isospectraux à un tore donné*, Manuscripta Math., **75** (1992), 211-223.

[40] H. Pesce: *Calcul du spectre d'une nilvariété de rang deux et applications*, Trans. Amer. Math. Soc., **339** (1993), 433-461.

[41] H. Pesce: *Déformations L-isospectrales sur les nilvariétés de rang deux*, C.R. Acad. Sci. Paris, **315** (1992), 821-823.

[42] H. Pesce: *Une formule de Poisson pour les variétés de Heisenberg*, Duke Math. J., **73** (1994), 515-538.

[43] H. Pesce: *Représentations relativement équivalentes et variétés riemanniennes isospectrales*, Comm. Math. Helv., **71** (1996), 243-268.

[44] H. Pesce: *Une réciproque générique du théorème de Sunada*, à paraître dans Compositio Math.

[45] H. Pesce: *Variétés isospectrales et représentations de groupes*, Contemporary Math., **173** (1994), 231-240.

[46] H. Pesce: *Variétés hyperboliques et elliptiques fortement isospectrales*, J. Funct. Anal., **133** (1995), 363-391.

[47] H. Pesce: *Nilvariétés isospectrales*, Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, coll. Séminaires et congrés de la S.M.F, **1** (1996), 513-530.

[48] M.S. Raghunathan: *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, 1973.

[49] A. Reid: *Isospectrality and commensurability of arithmetic hyperbolic 2- and 3-manifolds*, Duke Math. J., **65** (1992), 215-228.

[50] D. Schueth: *Continuous families of quasi-regular representations of solvable Lie groups*, J. Funct. Anal., **134** (1995), 247-259.

[51] A. Selberg: *On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces*, International Colloquium on Fonction Theory, Tata Institute, (1960), 147-164.

[52] R. J. Spatzier: *On isospectral locally symmetric spaces and a theorem of Von Neumann*, Duke Math. J., **59** (1989), 289-294.

[53] T. Sunada: *Riemannian coverings and isospectral manifolds*, Ann. of Math., **121** (1985), 169-186.

[54] H. Urakawa: *Bounded domains which are isospectral but non isometric*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **15** (1982), 441-456.

[55] M.F. Vignéras : *Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques*, Ann. of Math., **112** (1980), 21-32.

[56] N. Wallach: *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient*, Bull. Amer. Math. Soc., **82** (1976), 171-195.

[57] H.C. Wang: *On the deformation of lattices in a Lie group*, Amer. J. Math., **85** (1963), 189-212.

[58] A. Weil: *On discrete subgroups of Lie groups*, Ann. of Math., **72** (1960), 369-384.

[59] A. Weil: *On discrete subgroups of Lie groups (II)*, Ann. of Math., **75** (1962), 578-602.

[60] S. Zelditch: *On the generic spectrum of a Riemannian covering*, Ann. Inst. Fourier, **40** (1990), 407-442.

Lavoro pervenuto alla redazione il 22 maggio 1997
ed accettato per la pubblicazione il 14 luglio 1997