Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 21, Roma (2001), 159-190

# Misure di non compattezza di insiemi ed operatori integrali in spazi di funzioni misurabili

**J. APPELL – M. VÄTH**

*Dedicato al professor Antonio Avantaggiati in occasione del suo 70° compleanno*

RIASSUNTO: *Diamo delle stime per la misura di non compattezza della composizione di operatori lineari integrali con operatori non lineari in spazi ideali ($L_\infty$-lattices) di funzioni misurabili a valori in spazi di Banach.*

ABSTRACT: *We give estimates for the measure of noncompactness of the image of compositions of linear integral operators with nonlinear operators in ideal spaces ($L_\infty$-lattices) of measurable functions with values in Banach spaces.*

È ben noto che la composizione di due operatori non compatti può essere compatta. Nelle applicazioni è particolarmente importante la composizione di un operatore integrale (lineare non compatto) con un operatore di sovrapposizione (non lineare e non compatto). In questo caso la composizione è un operatore integrale (non lineare) di tipo Hammerstein. Tali operatori sono stati studiati, tra l'altro, in molti lavori di M. A. Krasnosel'skij e P. P. Zabrejko [10].

---

KEY WORDS AND PHRASES: *Measure of noncompactness – Integral operator – Regular operator– Regularizing operator – Vector valued function – Ideal space of measurable functions.*
A.M.S. CLASSIFICATION: 47H09 – 47G10 – 47H30 – 46E30 – 28B05 – 54D30

La classe più naturale di spazi per analizzare operatori integrali è quella degli spazi ideali (che contengono in particolare gli spazi di Lebesgue e di Orlicz). Anche se le composizioni di tali operatori possono essere non compatte, spesso si riescono ad ottenere delle stime per la loro misura di non compattezza che sono molto più precise che per operatori lineari qualsiasi. Ciò è dovuto al fatto che *operatori lineari integrali hanno sempre qualche proprietà di compattezza* in spazi di funzioni misurabili. Più avanti discuteremo questo fenomeno anche per funzioni a valori in spazi di Banach.

Questo articolo è strutturato come segue. Nel primo paragrafo otterremo un legame tra la misura di non compattezza $\alpha(M)$ di un insieme limitato $M$ in uno spazio ideale, da una parte, ed una certa caratteristica $\gamma(M)$, dall'altra, sotto l'ipotesi che $M$ sia compatto in misura. Nel secondo paragrafo dimostreremo che molti operatori integrali lineari $K$ sono in un certo senso compatti in misura. Questo fatto sarà utilizzato per derivare una stima per la misura di non compattezza $\alpha(K(B))$ dell'immagine $K(B)$ tramite altre due caratteristiche $\gamma(K(B))$ e $\gamma(B,K)$ che introdurremo nel terzo paragrafo. Successivamente proveremo che per operatori integrali "regolari" la stessa caratteristica $\gamma(K(B))$ si controlla con $\gamma(B,K)$. Di conseguenza si può stimare la misura di non compattezza $\alpha(K(B))$ di $K(B)$ solo tramite $\gamma(B,K)$. Come vedremo quest'ultima caratteristica può essere "piccola" (o addirittura zero) anche se $B$ e $K$ sono "lontani" dall'essere compatti. Infine, nell'ultimo paragrafo illustreremo i risultati astratti tramite esempi ed applicazioni.

## 1 – Misure di non compattezza in spazi ideali

Sia $(U,|\cdot|)$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, e sia $(S,\Sigma,\mu)$ uno spazio con misura completo. Con $\mathfrak{M}(S,U)$ denotiamo l'insieme di tutte le (classi di) funzioni misurabili (secondo Bochner) $x: S\to U$. Per $x\in\mathfrak{M}(S,U)$ poniamo

$$D(x)=\{y\in\mathfrak{M}(S,U):|y(s)|\le|x(s)| \text{ per quasi ogni } s\in S\}. \tag{1}$$

Ricordiamo che un funzionale $||\cdot||: X\to[0,\infty)$ è detto *quasi-seminorma* su uno spazio lineare $X\subseteq\mathfrak{M}(S,U)$ se $||x||=0$ per $x(s)=0$ quasi ovunque su $S$, $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$ per $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, e

$$||x+y|| \leq q(||x|| + ||y||) \qquad (x, y \in X) \tag{2}$$

per qualche costante $q \in [1, \infty)$. Nel seguito denotiamo con $q(X)$ la più piccola costante $q \geq 1$ per la quale valga la (2). Nel caso $q(X) = 1$ lo spazio $X$ è chiamato *quasi-normato*. Se inoltre $||x|| = 0$ implica $x(s) = 0$ quasi ovunque su $S$ allora $||\cdot||$ è una norma.

Uno spazio lineare quasi-seminormato $X \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ è detto *spazio preideale* se le relazioni $x \in X$ e $y \in D(x)$ implicano che $y \in X$ e $||y|| \leq ||x||$, e *spazio ideale* se $X$ è completo.

Esempio 1. Sia $X = L_p^w(S, U)$ lo spazio di Lebesgue-Bochner debole di tutte le funzioni $x \in \mathfrak{M}(S, U)$ per cui la quasi-norma

$$||x|| = \sup_{a>0} \left(a^p\, \mu(\{s \in S : |x(s)| \geq a\})\right)^{1/p}$$

è finita (vedi per esempio [11]). Allora $X$ è uno spazio ideale quasi-normato con $q(x) \leq 2^{1+1/p}$ per $p < 1$ e $q(x) \leq 2$ per $p \geq 1$. □

Ad ogni spazio preideale $X$ di funzioni misurabili a valori in $U$ possiamo associare uno spazio preideale $X_{\mathbb{R}}$ di funzioni reali tramite la formula

$$||x||_X = ||\,|x|\,||_{X_{\mathbb{R}}}.$$

Lo spazio $X_{\mathbb{R}}$ si chiama la *forma reale* di $X$; nel seguito non distingueremo esplicitamente tra gli spazi $X$ e $X_{\mathbb{R}}$.

Uno spazio preideale $X \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ è chiamato *regolare* se la relazione

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\mu(D) \leq \delta} ||P_D x|| = \inf_{\mu(E) < \infty} ||P_{S \setminus E} x|| = 0 \tag{3}$$

vale per ogni $x \in X$, dove $P_D x(s) = \chi_D(s) x(s)$ è l'operatore di moltiplicazione con la funzione caratteristica $\chi_D$ di $D \in \Sigma$.

Esempio 2. Gli spazi di Lebesgue-Bochner $X = L_p(S, U)$ (vedi per esempio [11]) sono spazi preideali quasi-normati per $0 < p \leq \infty$ con $q(X) \leq 2^{1/p}$ per $p < 1$ e $q(X) = 1$ per $p \geq 1$. Lo spazio $L_p(S, U)$ è normato per $1 \leq p \leq \infty$ e regolare per $0 < p < \infty$. Ovviamente la forma reale di $X = L_p(S, U)$ coincide con lo spazio $X_{\mathbb{R}} = L_p(S, \mathbb{R})$. □

Il sottospazio preideale $X^0 \subseteq X$ di tutti gli elementi $x \in X$ soddisfacenti la (3) è detto la *parte regolare* di $X$. Per esempio, $L_p^0(S, \mathbb{R}) = L_p(S, \mathbb{R})$ per $0 < p < \infty$ e $L_\infty^0(S, \mathbb{R}) = \{0\}$. Un esempio di uno spazio preideale $X$ con $\{0\} \subset X^0 \subset X$ è lo spazio di Orlicz $X = L_\Phi([0,1], \mathbb{R})$ nel caso che la funzione di Young $\Phi$ non soddisfi una condizione $\Delta_2$ (vedi [9], [15]).

In questo lavoro considereremo solo insiemi $\sigma$-finiti $S$. In questo caso la (3) è equivalente alla condizione apparentemente più semplice

$$\lim_{n\to\infty} ||P_{D_n}x|| = 0 \qquad (D_n \downarrow \emptyset). \tag{4}$$

La (4) significa che la funzione $x$ "ha la norma assolutamente continua". La seguente definizione fornisce un'importante generalizzazione.

Definizione 1. Per $M \subseteq X \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ poniamo

$$\gamma_\mu(M) = \limsup_{\delta\to 0} \sup_{\mu(D)\le\delta} \sup_{x\in M} ||P_D x||,$$

$$\tilde{\gamma}_\mu(M) = \inf_{\mu(E)<\infty} \sup_{x\in M} ||P_{S\setminus E}x||,$$

e

$$\gamma(M) = \sup_{D_n\downarrow\emptyset} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in M} ||P_{D_n}x||.$$

Nel caso scalare $U = \mathbb{R}$ la caratteristica $\gamma_\mu$ è stata introdotta in [5] e (indipendentemente) in [3].

Ricordiamo che il *supporto* $\operatorname{supp} M$ di un insieme $M \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ è caratterizzato da due proprietà: ogni funzione $x \in M$ è zero quasi ovunque su $S \setminus \operatorname{supp} M$, e per ogni insieme misurabile $D \subseteq \operatorname{supp} M$ di misura positiva esiste qualche $x \in M$ t.c. $\operatorname{supp} x \cap D$ abbia misura positiva. Il supporto di un insieme $M \subset \mathfrak{M}(S, U)$, almeno nel caso di un dominio $\sigma$-finito $S$, esiste sempre ed è unico (a meno di un sottoinsieme di misura nulla, vedi per esempio [21, Teorema 2.2.4]).

Proposizione 1. *Per ogni* $M \subseteq X \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ *si ha*

$$\gamma(M) \le q(X)[\gamma_\mu(M) + \tilde{\gamma}_\mu(M)]. \tag{5}$$

*Viceversa,*

$$\max\{\gamma_\mu(M), \tilde{\gamma}_\mu(M)\} \le \gamma(M),$$

*e nel caso* $\mu(\operatorname{supp} M) < \infty$ *si ha addirittura*

$$\gamma(M) = \gamma_\mu(M). \tag{6}$$

Dim. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $(D_n)_n$ una successione con $D_n \downarrow \emptyset$. Scegliamo un insieme $E \subseteq S$ t.c. $\mu(E) < \infty$ e

$$||P_{S\setminus E}x|| < \tilde{\gamma}_\mu(M) + \varepsilon \qquad (x \in M). \tag{7}$$

Poiché $E_n = D_n \cap E \downarrow \emptyset$ e $\mu(E) < \infty$ si ha $\mu(E_n) \to 0$ e quindi

$$||P_{E_n}x|| < \gamma_\mu(M) + \varepsilon \qquad (x \in M) \tag{8}$$

per quasi ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, le stime (7) e (8) implicano insieme alla stima $|P_{D_n}x| \le |P_{S\setminus E}x + P_{E_n}x|$ che

$$||P_{D_n}x|| \le ||P_{S\setminus E}x + P_{E_n}x|| \le q(X)[\tilde{\gamma}_\mu(M) + \gamma_\mu(M) + 2\varepsilon] \qquad (x \in M)$$

per quasi ogni $n \in \mathbb{N}$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si ottiene la (5). Ora, se $\mu(\operatorname{supp} M) < \infty$, nei calcoli precedenti possiamo scegliere $E = \operatorname{supp} M$ e otteniamo $\gamma(M) \le \gamma_\mu(M)$ in virtù della (8) e dell'uguaglianza $P_{E_n}x = P_{D_n}x$.

Viceversa, dato che il supporto di $M$ è $\sigma$-finito esistono insiemi $E_n \uparrow \operatorname{supp} M$ con $\mu(E_n) < \infty$. Poiché $S \setminus E_n \downarrow \emptyset$, la stima $\tilde{\gamma}_\mu(M) \le \gamma(M)$ è immediata. Per dimostrare che anche $\gamma_\mu(M) \le \gamma(M)$ fissiamo $d > \gamma(M)$. Se fosse $\gamma_\mu(M) > d$ esisterebbero due successioni $D_n \subseteq S$ e $x_n \in M$ con $\mu(D_n) \le 1/n^2$ e $||P_{D_n}x_n|| \ge d$. Ponendo $F_n = D_n \cup D_{n+1} \cup D_{n+2} \cup \dots$ si avrebbe

$$\mu(F_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0.$$

La misura di $N = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \dots$ dovrebbe essere allora nulla e quindi

$$||P_{F_n\setminus N}x_n|| \ge ||P_{D_n}x_n|| \ge d \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Ma ciò contraddice la stima $d > \gamma(M)$ poiché $F_n \setminus N \downarrow \emptyset$. $\square$

È ben noto che per ogni spazio $\sigma$-finito $(S, \Sigma, \mu)$ esiste una misura $\nu$ normalizzata equivalente (vedi per esempio [21, Corollario 2.2.6]), cioè $\nu(S) = 1$ e $\nu(E) = 0$ se e solo se $\mu(E) = 0$. Poiché la misura $\mu$ non compare esplicitamente nella (4), la regolarità di uno spazio preideale $X$ non si perde passando dalla misura $\mu$ alla misura normalizzata $\nu$. Inoltre, anche $\gamma(M)$ non cambia se passiamo da $\mu$ a $\nu$. Poiché la (6) implica che

$$\gamma(M) = \gamma_\nu(M), \tag{9}$$

si vede che $\gamma_\nu(M)$ effettivamente non dipende dalla scelta di $\nu$.

Ricordiamo alcuni risultati classici sulla convergenza in misura. Se una successione $(x_n)_n$ in $\mathfrak{M}(S, U)$ converge quasi ovunque ad $x : S \to U$ allora la restrizione di $(x_n)_n$ a qualche insieme di misura finita converge ad $x$ in misura. Viceversa, se la restrizione di una successione $(x_n)_n$ in $\mathfrak{M}(S, U)$ ad ogni insieme di misura finita converge ad $x$ in misura allora esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ di $(x_n)_n$ che converge quasi ovunque ad $x$. È ben noto che l'insieme $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica

$$d(x, y) = \inf_{a>0} \{a + \nu(\{s \in S : |x(s) - y(s)| \geq a\})\} \tag{10}$$

è uno spazio metrico lineare completo, e la convergenza nella metrica (10) coincide con la convergenza nella misura normalizzata $\nu$. Inoltre, un insieme $M \subseteq \mathfrak{M}(S, U)$ è precompatto nella metrica (10) se e solo se ogni successione in $M$ contiene una sottosuccessione che converge quasi ovunque su $S$.

Ricordiamo che la *misura di non compattezza di Kuratowski* $\alpha(M)$ di un insieme limitato $M$ in uno spazio quasi-seminormato $X$ è definita come l'estremo inferiore di tutti i numeri $\varepsilon > 0$ t.c. $M$ possa essere ricoperto con un numero finito di insiemi di diametro $\leq \varepsilon$. Analogamente, la *misura di non compattezza di Hausdorff* $\chi(M)$ è l'estremo inferiore di tutti i numeri $\varepsilon > 0$ t.c. $M$ ammetta una $\varepsilon$-rete finita in $X$, cioè un ricoprimento con un numero finito di palle con raggio $\leq \varepsilon$. Queste due misure di non compattezza sono equivalenti nel senso che

$$\chi(M) \leq \alpha(M) \leq 2q(X)\chi(M).$$

Lo scopo principale di questo paragrafo è di stabilire un legame tra le caratteristiche $\alpha(M)$ e $\gamma(M)$. A tale scopo è utile il seguente

Lemma 1. *Sia $X$ uno spazio ideale quasi-seminormato di funzioni misurabili $x : S \to U$. Allora per ogni insieme numerabile $M \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ esiste una successione $(S_n)_n$ di insiemi $S_n \uparrow \operatorname{supp} X$ t.c. $P_{S_n}(M) \subseteq X$.*

Dim. Sia $\nu$ una misura normalizzata equivalente su $S$, e sia $S_0 := \operatorname{supp} X$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ troviamo qualche insieme $E_n \subseteq S$ con $\nu(S_0 \setminus E_n) < 1/n$ t.c. $\chi_{E_n}$ appartenga alla forma reale $X_{\mathbb{R}}$ di $X$ (vedi [21]).

Sia $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ una enumerazione di $M$. Gli insiemi $D_n(k) = \{s \in S : |x_n(s)| > k\}$ soddisfano

$$D_n(1) \supseteq D_n(2) \supseteq D_n(3) \supseteq \dots, \qquad \nu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} D_n(k)\right) = 0.$$

Il fatto che $\nu(S) < \infty$ implica che $\nu(D_n(k)) \downarrow 0$ per $k \to \infty$. Di conseguenza, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}$ troviamo qualche $k_{n,j} \in \mathbb{N}$ t.c. $\nu(D_n(k_{n,j})) \leq 1/j2^n$. Per l'unione $D_j = D_1(k_{1,j}) \cup D_2(k_{2,j}) \cup D_3(k_{3,j}) \cup \dots$ si ha quindi

$$\nu(D_j) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(D_n(k_{n,j})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j2^n} \leq \frac{1}{j}.$$

Osserviamo inoltre che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ e $s \in S \setminus D_j \subseteq S \setminus D_n(k_{n,j})$ si ha $|x_n(s)| \leq k_{n,j}$. In particolare, ognuna delle funzioni $P_{D_j}x$ ($x \in M, j \in \mathbb{N}$) è limitata e quindi $P_{E_j \cap D_j}x \in X$.

Rimane da osservare che gli insiemi $S_n = (E_1 \setminus D_1) \cup (E_2 \setminus D_2) \cup \dots \cup (E_n \setminus D_n)$ hanno le proprietà richieste. Infatti, per ogni $x \in M$ abbiamo $|P_{S_n}x| \leq |P_{E_1 \setminus D_1}x| + |P_{E_2 \setminus D_2}x| + \dots + |P_{E_n \setminus D_n}x| \in X$. Inoltre, $S_n \uparrow S_0$ poiché

$$\nu(S_0 \setminus S_n) \leq \nu(S_0 \setminus (E_n \setminus D_n)) \leq \nu((S_0 \setminus E_n) \cup D_n) \leq \frac{2}{n}.$$

La dimostrazione è completa. □

Teorema 1. *Siano $X \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ uno spazio preideale quasi-seminormato e $M \subseteq X$. Se $M$ è precompatto in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica* (10) *allora*

$$\alpha(M) \leq (1 + q(X))q(X)\gamma(M). \tag{11}$$

*Viceversa, se $X$ è regolare allora*

$$\gamma(M) \leq q(X)\chi(M). \tag{12}$$

DIM. Per dimostrare la (11) possiamo supporre che $\gamma(M) < \infty$. Fissiamo qualche $e \in U$ con $|e| = 1$. Poiché $S$ è $\sigma$-finito per il Lemma 1 esiste una successione $(S_n)_n$ di insiemi misurabili $S_n \subseteq S$ t.c. $S_n \uparrow \operatorname{supp} M$ e $e\chi_{S_n} \in X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato $c > \gamma(M) = \gamma_\nu(M)$ si scelga $\delta > 0$ con

$$||P_D x|| < c \qquad (x \in M,\ \nu(D) < 2\delta). \tag{13}$$

Poiché $S_n \uparrow S_0 = \operatorname{supp} M$ e $\nu(S_0) < \infty$ si ha $\nu(S_0 \setminus S_n) < \delta$ per $n$ sufficientemente grande. Per la precompattezza di $M$ in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica (10) esiste, per ogni $\varepsilon \in (0, \delta)$, un numero finito di insiemi $M_1, \ldots, M_k \subseteq M$ che ricoprono $M$ ed hanno diametro $\leq \varepsilon$ (nella metrica (10)). Ciò implica che, per ogni scelta di elementi $x, y \in M_j$, l'insieme $D_0 = \{s \in S : |x(s) - y(s)| \geq \varepsilon\}$ soddisfa $\nu(D_0) \leq \varepsilon < \delta$. Posto $D = D_0 \cup (S_0 \setminus S_n)$, per la definizione di $D_0$ si ha $|x - y| \leq |P_D(x - y)| + |\varepsilon e\chi_{S_n \setminus D_0}|$. In virtù di $\nu(D) < 2\delta$ e della (13) si ottengono le stime

$$\begin{aligned} ||x - y|| &\leq ||P_D|x| + P_D|y| + \varepsilon e\chi_{S_n \setminus D_0}|| \leq \\ &\leq q(X)[||P_D x|| + q(X)(||P_D y|| + \varepsilon||\chi_{S_n}||)] < \\ &< q(X)[c + q(X)(c + \varepsilon||\chi_{S_n}||)]. \end{aligned}$$

Ciò significa che il diametro di ogni insieme $M_j$ in $X$ si controlla con $(1 + q(X))q(X)c + q(X)^2\varepsilon||\chi_{S_n}||$. Poiché $\varepsilon > 0$ è arbitrario ne segue che $\alpha(M) \leq (1 + q(X))q(X)c$ e quindi vale la (11).

Ora dimostriamo la (12) sempre sotto l'ipotesi $\chi(M) < \infty$. Fissato $\varepsilon > 0$ si scelga qualche $(\chi(M) + \varepsilon)$-rete finita $N$ per $M$. Per la regolarità di $X$ esiste $\delta > 0$ t.c.

$$||P_D y|| \leq \varepsilon \qquad (y \in N)$$

per ogni $D \subseteq S$ con $\nu(D) \leq \delta$. Fissato $x \in M$ si scelga $y \in N$ con $||x - y|| \leq \chi(M) + \varepsilon$. Poiché $P_D x = P_D y + P_D(x - y)$ si ha

$$||P_D x|| \leq q(X)(\varepsilon + ||P_D(x - y)||) \leq q(X)\chi(M) + 2q(X)\varepsilon$$

per ogni $D \subseteq S$ con $\mu(D) \leq \delta$. Ciò implica che

$$\gamma(M) = \gamma_\nu(M) \leq q(X)\chi(M) + 2q(X)\varepsilon,$$

e la (12) segue. □

Corollario 1. *Sia $X \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ uno spazio preideale regolare quasi-seminormato e sia $M \subseteq X$ precompatto in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica* (10). *Allora*

$$\frac{1}{q(X)}\gamma(M) \leq \chi(M) \leq \alpha(M) \leq q(X)(1+q(X))\gamma(M).$$

Ci si potrebbe aspettare che una stima del tipo

$$\alpha(M) \leq C[\gamma(M) + \alpha_{\mathfrak{M}}(M)] \tag{14}$$

sia sempre valida per qualche $C > 0$, dove $\alpha_{\mathfrak{M}}(M)$ rappresenta la misura di non compattezza di Kuratowski nello spazio metrico $\mathfrak{M}(S,U)$. Invece, ciò non è vero addirittura nel caso scalare $U = \mathbb{R}$. Riportiamo un semplice esempio [3]:

Esempio 3. Nello spazio $X = L_1([0,1],\mathbb{R})$ consideriamo la successione $(M_n)_n$ di insiemi

$$M_n = \{x \in L_1([0,1],\mathbb{R}) : 0 \leq x(s) \leq n\chi_{[0,1-1/n]}(s)\} \qquad (n = 1,2,\dots).$$

Con un semplice calcolo è facile convincersi che

$$\alpha(M_n) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad \gamma(M_n) \equiv 0, \quad \alpha_{\mathfrak{M}}(M_n) = 1 - \frac{1}{n}$$

e quindi la (14) non può essere soddisfatta. □

Se $X$ è uno spazio preideale quasi-normato si può dimostrare che la convergenza nello spazio $X$ implica la convergenza in $\mathfrak{M}(S,U)$. Per $X$ normato ciò è stato dimostrato in [21, Teorema 3.1.1], vedi anche [24]; per $X$ quasi-normato la dimostrazione è simile. Utilizzando questo fatto si può dimostrare che la precompatezza in $X$ implica la precompattezza in $\mathfrak{M}(S,U)$. In questo modo si ottiene il seguente criterio di compattezza di tipo Vitali-Krasnosel'skij per spazi preideali quasi-normati:

Corollario 2. *Sia $X \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ uno spazio preideale quasi-normato. Allora un insieme $M \subseteq X$ è precompatto in $X$ se e solo se $M$ è precompatto in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica* (10) *e $\gamma(M) = 0$.*

Per quanto osservato sopra $X$ è immerso (con immersione continua) nello spazio $\mathfrak{M}(S,U)$. Ciò implica il seguente

Lemma 2. *Sia $X \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ uno spazio preideale quasi-normato. Se $B \subseteq X$ è limitato in $X$ allora $B$ è anche limitato in $\mathfrak{M}(S,U)$ cioè*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} \nu(\{s \in S : |x(s)| \geq n\}) = 0. \tag{15}$$

Dim. Se $B$ non fosse limitato in $\mathfrak{M}(S,U)$ allora esisterebbero successioni $x_n \in B$ e $\lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda_n \to 0$ e $d(\lambda_n x_n, 0) \not\to 0$, dove $d$ è la metrica (10) in $\mathfrak{M}(S,U)$ (vedi per esempio [16]). Ma la limitatezza di $B$ implica che $||\lambda_n x_n|| \to 0$, una contraddizione. Il fatto che la limitatezza di $B$ in $\mathfrak{M}(S,U)$ sia equivalente alla relazione (15) è evidente. □

## 2 – Operatori integrali lineari

Siano $(U, |\cdot|)$ e $(V, |\cdot|)$ due spazi di Banach. Con $\mathfrak{L}(U,V)$ denotiamo lo spazio di tutti gli operatori lineari limitati $L : U \to V$ con l'usuale norma $|\cdot|$, e con $\mathfrak{K}(U,V)$ il sottospazio di tutti gli operatori lineari compatti. Consideriamo l'operatore integrale

$$Kx(t) = \int_S k(t,s)x(s)\,ds \qquad (t \in T), \tag{16}$$

dove $T$ e $S$ sono insiemi $\sigma$-finiti con misura e $k : T \times S \to \mathfrak{L}(U,V)$ è una funzione misurabile (nel senso di Bochner). Parallelamente alla (16) consideriamo l'operatore

$$|K|x(t) = \int_S |k(t,s)|x(s)\,ds \qquad (t \in T). \tag{17}$$

Il seguente Teorema 2 è ben noto se $T$ e $S$ sono domini limitati in $\mathbb{R}^n$ e $U = V = \mathbb{R}$, vedi [10, Lemma 5.1]. Osserviamo, però, che il ragionamento di [10] non è più valido in spazi non separabili. Inoltre, per spazi di dimensione infinita dobbiamo comunque addottare un procedimento diverso; perciò riportiamo un'altra dimostrazione. Sia $D(x)$ definita come nella (1) e sia

$$E(x) = \{y \in \mathfrak{M}(S, U) : |y(s)| = |x(s)| \text{ per quasi ogni } s \in S\}.$$

Teorema 2. *Per ogni $x \in \mathfrak{M}(S, U)$, i tre enunciati seguenti sono equivalenti:*

(a) *Per quasi ogni $t \in T$, l'elemento $Ky(t) \in V$ è definito per ogni $y \in D(x)$.*

(b) *Per quasi ogni $t \in T$, l'elemento $Ky(t) \in V$ è definito per ogni $y \in E(x)$.*

(c) *La funzione $|K|\,|x|$ è finita quasi ovunque su $T$.*

*Inoltre, in questo caso l'insieme $K(D(x))$ è contenuto in $\mathfrak{M}(T, V)$. Infine, se $k(t, s) \in \mathfrak{K}(U, V)$ per quasi ogni $(t, s) \in T \times S$ allora $K(D(x))$ è precompatto in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica* (10).

Dim. Se la (b) è soddisfatta la (c) segue in virtù di [21, Teorema A.2.2]. Viceversa, supponiamo che la (c) sia vera. Poiché $k(t, \cdot)$ è misurabile per quasi ogni $t \in T$, Teorema A.1.2 di [21] implica che anche la funzione $s \mapsto k(t, s)y(s)$ è misurabile, e quindi integrabile per ogni $y \in D(x)$. Di conseguenza, la (a) è soddisfatta.

Dimostriamo ora la seconda parte nel caso di un nucleo degenere

$$k(t, s) = \sum_{j=1}^{k} f_j(s)\chi_{E_j}(t).$$

In questo caso si ha

$$Ky(t) = \sum_{j=1}^{k} \left( \int_S f_j(s)y(s)\,ds \right) \chi_{E_j}(t),$$

e la relazione $Ky \in \mathfrak{M}(T,V)$ è evidente. Supponendo ora che $f_j \in \mathfrak{K}(U,V)$, dobbiamo dimostrare che l'insieme

$$\left\{\int_S f_j(s)y(s)\,ds : y \in D(x)\right\} = \left\{\int_S z(s)\,ds : z \in Z_j\right\} \qquad (j = 1,\ldots,k)$$

è precompatto, dove abbiamo posto $Z_j = \{s \mapsto f_j(s)y(s) : y \in D(x)\}$. Ma ognuno degli insiemi $\{z(s) : z \in Z_j\}$ è precompatto, e tutte le funzioni in $Z_j$ si controllano uniformemente con la maggiorante integrabile $s \mapsto |f_j(s)|\,|x(s)|$. Di conseguenza, la tesi è un caso speciale di [4, Proposizione 2.1].

Per dimostrare il caso generale denotiamo con $S_0$ l'insieme dei punti $s \in S$ per cui $x(s) = 0$. Poiché $k(t,s)y(s) = 0$ su $S_0$ per ogni $y \in D(x)$ possiamo sostituire, senza ledere la generalità, l'insieme $S$ con l'insieme $S \setminus S_0$. In altre parole possiamo supporre che $x(s) \neq 0$ per ogni $s \in S$.

Sia $X$ lo spazio di tutte le funzioni misurabili $f : S \to \mathfrak{L}(U,V)$ (oppure $\mathfrak{K}(U,V)$) per le quali la norma

$$||f||_X = \int_S |f(s)|\,|x(s)|\,ds$$

è finita. Allora $X$ è uno spazio di tipo $L_1$ con peso e quindi uno spazio preideale regolare. Nel caso $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ (per quasi ogni $(t,s) \in T \times S$) la misurabilità di $k : T \times S \to \mathfrak{L}(U,V)$ implica la misurabilità di $k : T \times S \to \mathfrak{K}(U,V)$ (vedi [22]). Poiché $X$ è regolare con $k(t,\cdot) \in X$ per quasi ogni $t \in T$, Teorema 4.4.2 di [21] implica che la funzione astratta $H : T \to X$ definita da $H(t) = k(t,\cdot)$ è misurabile. In particolare esiste una successione $(H_n)_n$ di funzioni semplici $H_n : T \to X$ che converge quasi ovunque ad $H$. Essendo semplice, $H_n$ ha la forma

$$H_n(t) = \sum_{j=1}^{k(n)} f_{j,n}\chi_{E_{j,n}}(t) \qquad (E_j \subseteq T)$$

con $f_{j,n} \in X$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Poniamo

$$k_n(t,s) = \sum_{j=1}^{k(n)} f_{j,n}(s)\chi_{E_{j,n}}(t),$$

e denotiamo con $K_n$ l'operatore integrale generato dal nucleo $k_n$. Il fatto che $f_{j,n}$ appartenga ad $X$ implica che

$$|K_n|\,|x|(t) = \int_S |k_n(t,s)|\,|x(s)|\,ds < \infty.$$

Per quanto già dimostrato ognuno degli insiemi $K_n(D(x))$ è contenuto in $\mathfrak{M}(T,V)$ (ed è precompatto in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica (10) se $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$). Inoltre, per ogni $y \in D(x)$ si ha

$$|(K-K_n)y(t)| \leq \int_S |k(t,s)-k_n(t,s)|\,|x(s)|\,ds = ||H(t)-H_n(t)||_X \to 0$$

per quasi ogni $t \in T$. In virtù del teorema di Severini-Egorov ciò implica in particolare che $Ky$ è misurabile e

$$\sup_{y\in D(x)} d(K_n y, Ky) \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

dove $d$ denota la metrica (10). Di conseguenza, si ha anche $K(D(x)) \subseteq \mathfrak{M}(T,V)$, e nel caso $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ l'insieme $K(D(x))$ è precompatto in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica (10). $\square$

Si osservi che l'insieme eccezionale di misura nulla nel Teorema 2 deve essere indipendente da $y$. Ciononostante nel caso più importante di dimensione finita questa restrizione può essere indebolita:

PROPOSIZIONE 2. *Sia $U$ di dimensione finita e sia $x \in \mathfrak{M}(S,U)$. Supponiamo che $Ky$ sia definito quasi ovunque per ogni $y \in E(x)$. Allora le conclusioni del Teorema* 2 *sono valide.*

DIM. Sia $\{e_1,\dots,e_N\}$ una base per $U$ con $|e_1| = \dots = |e_N| = 1$. Poiché tutte le norme su $U$ sono equivalenti si ha

$$C = \sup\{\max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_N|\} : |\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_N e_N| \leq 1\} < \infty.$$

In particolare, per ogni $h \in \mathfrak{L}(U,V)$ abbiamo

$$|h| = \sup_{|u|\leq 1} |h(u)| = \sup_{|\lambda_n|\leq C} \left| h\left(\sum_{n=1}^N \lambda_n e_n\right)\right| \leq C\sum_{n=1}^N |h(e_n)|.$$

Poiché tutte le funzioni $y_n(t) = |x(s)|e_n$ appartengono ad $E(x)$ le funzioni $s \mapsto k(t,s)y_n(s)$ $(n = 1, \dots, N)$ sono integrabili per quasi ogni $t \in T$ e quindi la funzione

$$|K|\,|x|(t) = \int_S |k(t,s)|\,|x(s)|\,ds \leq$$
$$\leq C \int_S \sum_{n=1}^{N} |k(t,s)e_n|\,|x(s)|\,ds = C \sum_{n=1}^{N} \int_S |k(t,s)y_n(s)|\,ds$$

è finita. ∎

Corollario 3. *Se $U$ ha dimensione finita allora $K(E(x))$ è definito se e solo se $K(D(x))$ è definito; in questo caso $K(E(x))$ e $K(D(x))$ sono contenuti in $\mathfrak{M}(S,U)$ e precompatti in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica* (10).

Non sappiamo se la Proposizione 2 vale anche in spazi di dimensione infinita. Una parziale risposta (positiva) a questo problema consiste nell'osservazione seguente: esiste un sottoinsieme numerabile $E_0(x) \subseteq E(x)$ t.c.

$$|K|\,|x|(t) = \sup_{y \in E_0(x)} \int_S |k(t,s)y(s)|\,ds \tag{18}$$

per quasi ogni $t \in T$. Di conseguenza, se $K(E(x))$ è definito, allora per quasi ogni $t \in T$ l'integrale nella (18) è finito per ogni $y \in E_0(x)$ (essendo $E_0(x)$ numerabile!). Ciononostante, non sappiamo se l'estremo superiore rispetto ad $y \in E_0(x)$ nella (18) è necessariamente finito.

La formula (18) è una conseguenza di una versione "vettoriale" del teorema di Luxemburg-Gribanov ([6], [13], vedi anche [23, Teorema 99.2 e Corollario 99.3]). Infatti, Teorema A.2.2 di [21] implica che

$$|K|\,|x|(t) = \sup_{y \in E(x)} \int_S |k(t,s)y(s)|\,ds$$

per quasi ogni $t \in T$. Dal teorema di Luxemburg-Gribanov nella forma vettoriale [19] segue l'esistenza di un sottoinsieme numerabile $E_0(x) \subseteq E(x)$ (indipendente da $t$!) t.c.

$$\sup_{y \in E_0(x)} \int_S |k(t,s)y(s)|\,ds = \sup_{y \in E(x)} \int_S |k(t,s)y(s)|\,ds.$$

Come conseguenza si ottiene la (18). Una combinazione del Teorema 1 col Teorema 2 fornisce ora il seguente

COROLLARIO 4. *Sia $Y \subseteq \mathfrak{M}(T,V)$ uno spazio preideale quasi-seminormato, e sia $x \in \mathfrak{M}(S,U)$ t.c. $|K|\,|x|$ appartenga alla forma reale $Y_{\mathbb{R}}$ di $Y$. Allora $K(D(x)) \subseteq Y$ e*

$$\chi(K(D(x))) \leq \alpha(K(D(x))) \leq q(Y)(1+q(Y))\gamma(K(D(x))).$$

*Se lo spazio $Y$ è regolare allora vale anche la stima inversa*

$$\chi(K(D(x))) \geq \frac{1}{q(Y)}\gamma(K(D(x))).$$

## 3 – Operatori integrali in spazi ideali

Consideriamo l'operatore integrale (16) sotto le stesse ipotesi generali come nel paragrafo precedente. Nel seguito $X \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ e $Y \subseteq \mathfrak{M}(T,V)$ sono due spazi preideali quasi-seminormati, e $\nu$ è qualche misura normalizzata su $S$.

DEFINIZIONE 2. Per $B \subseteq X$ e $K : X \to Y$ poniamo

$$\gamma(B,K) = \sup_{D_n \downarrow \emptyset} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in B} ||KP_{D_n}x||,$$

$$\gamma_\nu(B,K) = \limsup_{\delta\to 0} \sup_{\nu(D)\leq\delta} \sup_{x\in B} ||KP_D x||,$$

$$\gamma^0(B,K) = \sup_{\substack{E_n\subseteq T\\ E_n\downarrow\emptyset}} \sup_{\substack{D_n\subseteq S\\ D_n\downarrow\emptyset}} \limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in B} ||P_{E_n}KP_{D_n}x||,$$

e

$$\gamma_\nu^0(B,K) = \sup_{\substack{E_n\subseteq T\\ E_n\downarrow\emptyset}} \limsup_{n\to\infty} \limsup_{\delta\to 0} \sup_{\nu(D)\leq\delta} \sup_{x\in B} ||P_{E_n}KP_D x||.$$

Per ogni $B \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ utilizziamo la notazione

$$P(B) = \{P_D x : D \subseteq S \text{ misurabile},\ x \in B\}. \tag{19}$$

La seguente proposizione è parallela alla Proposizione 1:

Proposizione 3. *Per $B \subseteq X$ e $K : X \to Y$ si ha*

$$\gamma^0(B,K) \le \gamma^0_\nu(B,K) \le \gamma_\nu(B,K) \le ||K||\gamma_\nu(B) = ||K||\gamma(B) \tag{20}$$

*e*

$$\gamma^0(B,K) \le \gamma(B,K) \le \gamma_\nu(B,K). \tag{21}$$

*Inoltre, se $P(B) \subseteq B$ allora*

$$\gamma^0(B,K) = \gamma^0_\nu(B,K) \tag{22}$$

*e*

$$\gamma(B,K) = \gamma_\nu(B,K). \tag{23}$$

Dim. Le disuguaglianze $\gamma^0(B,K) \le \gamma^0_\nu(B,K)$ e $\gamma(B,K) \le \gamma_\nu(B,K)$ seguono immediatamente dal fatto che $D_k \downarrow \emptyset$ implica $\nu(D_k) \to 0$. Le altre disuguaglianze nella (20) e (21) sono conseguenze della stima $||P_{E_n}KP_Dx|| \le ||KP_Dx|| \le ||K||\,||P_Dx||$.

L'ipotesi $P(B) \subseteq B$ implica la proprietà di monotonia

$$\sup_{x\in B} ||P_EKP_Dx|| \le \sup_{x\in B} ||P_EKP_Fx|| \qquad (D \subseteq F) \tag{24}$$

per insiemi misurabili qualsiasi $E \subseteq T$, $D \subseteq S$ ed $F \subseteq S$. Proviamo che ciò implica $\gamma^0_\nu(B,K) \le \gamma^0(B,K)$. Fissato $c > \gamma^0(B,K)$ dobbiamo dunque dimostrare che $\gamma^0_\nu(B,K) \le c$. Supponiamo per assurdo che esistano successioni $(E_n)_n$ e $(D_n)_n$ t.c. $E_n \downarrow \emptyset$, $\nu(D_n) \to 0$ e

$$\sup_{x\in B} ||P_{E_n}KP_{D_n}x|| > c \qquad (n = 1, 2, \dots). \tag{25}$$

Considerando eventualmente una sottosuccessione possiamo supporre senza perdere di generalità che $\nu(D_n) \le n^{-2}$. Ponendo $F_n = D_n \cup D_{n+1} \cup D_{n+2} \cup \dots$ si ha

$$F_n \downarrow N := \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$$

e $\nu(N) = 0$ poiché $\nu(F_n) \le n^{-2} + (n+1)^{-2} + (n+2)^{-2} + \ldots \to 0$ per $n \to \infty$. Trascurando l'insieme di misura nulla $N$, possiamo quindi suppore che $F_n \downarrow \emptyset$. Inoltre, $D_n \subseteq F_n$ implica, in virtù di (24) e (25), che

$$\sup_{x\in B} ||P_{E_n} K P_{F_n} x|| > c \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ma ciò implica la stima $\gamma^0(B, K) \ge c$, una contraddizione. Abbiamo quindi dimostrato che $\gamma^0_\nu(B, K) \le \gamma^0(B, K)$. Di conseguenza, la (22) segue insieme alla (20). La dimostrazione della (23) è analoga con $E_n \equiv T$. ∎

Illustriamo la Proposizione 3 con un semplice esempio.

Esempio 4. Nello spazio $X = Y = L_p([0, 1], \mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ consideriamo l'operatore integrale

$$Kx(t) = \frac{1}{t} \int_0^t x(s)\, ds.$$

La classica disuguaglianza di Hardy implica che $K \in \mathfrak{L}(L_p, L_p)$ con $||K|| \le \frac{p}{p-1}$.

Sia $B = \{x \in L_p : ||x|| \le 1\}$ la palla unitaria chiusa in $X$. Poniamo

$$D_n = E_n = (0, \tfrac{1}{n}), \quad y(t) = t^{-c} \ (c < \tfrac{1}{p}), \quad y_n = P_{D_n} y, \quad x_n = \frac{y_n}{||y_n||}.$$

Per $t \in E_n$ si ha $Ky_n(t) = (1 - c)^{-1} y_n(t)$, quindi

$$||P_{E_n} K P_{D_n} x_n|| = \frac{||x_n||}{1 - c} = \frac{1}{1 - c}.$$

Poiché $E_n \downarrow \emptyset$ e $x_n \in B$, ciò implica che $\gamma^0(B, K) \ge \frac{p}{p-1} \ge ||K||$. Di conseguenza, per la Proposizione 3 abbiamo

$$\gamma^0(B, K) = \gamma^0_\nu(B, K) = \gamma(B, K) = \gamma_\nu(B, K) = ||K|| = \frac{p}{p - 1},$$

poiché $\gamma(B) = \gamma_\nu(B) = 1$. ∎

Dimostriamo ora una generalizazzione di un classico criterio di compattezza per operatori integrali (vedi [10]). Cominciamo con una semplice osservazione:

Lemma 3. *Supponiamo che* $x_n \in \mathfrak{M}(S,U)$ *soddisfi* $0 \leq |x_n(s)| \uparrow \infty$. *Per* $x \in \mathfrak{M}(S,U)$ *poniamo* $F_n(x) = \{s \in S : |x(s)| \geq |x_n(s)|\}$. *Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in B} \nu(F_n(x)) = 0$$

*per ogni insieme* $B \subseteq \mathfrak{M}(S,U)$ *limitato in* $\mathfrak{M}(S,U)$ *con la metrica* (10).

Dim. Poiché $B$ è limitato in $\mathfrak{M}(S,U)$ con la metrica (10) la (15) è soddisfatta. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\sup_{x\in B} \nu(\{s \in S : |x(s)| \geq m\}) \leq \varepsilon.$$

Posto $D_n = \{s : |x_n(s)| \geq m\}$ si ha $D_n \downarrow \emptyset$ e $\nu(D_1) < \infty$, quindi $\nu(D_n) \to 0$ per $n \to \infty$. Di conseguenza, per $E(x) = \{s \in S : |x(s)| \geq m\}$ si ottiene $F_n(x) \subseteq E(x) \cup D_n$, cioè $\nu(F_n(x)) \leq \nu(E(x)) + \nu(D_n) \leq \varepsilon + \nu(D_n) \to \varepsilon$ per $n \to \infty$. □

Ricordiamo che per ogni insieme $B$ di funzioni misurabili su $S$ denotiamo con $P(B)$ l'insieme (19).

Teorema 3. *Supponiamo che l'operatore* (16) *mandi* $X$ *in* $Y$ *e* $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ *per quasi ogni* $(t,s) \in T \times S$. *Sia* $x_n \in \mathfrak{M}(S,U)$ *una successione t.c.* $0 \leq |x_n(s)| \uparrow \infty$. *Inoltre, supponiamo che la funzione* $|K|P_D|x_n|$ *sia finita quasi ovunque per ogni insieme misurabile* $D \subseteq S$ *con* $P_D x_n \in X$. *Allora per ogni insieme* $B \subseteq X$ *che è limitato in* $\mathfrak{M}(S,U)$ *con la metrica* (10) *si ha*

$$\alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B,K) + (1+q(Y))q(Y)^2 \sup_n \gamma(K[P(B) \cap D(x_n)]).$$

Dim. Senza ledere la generalità possiamo supporre che $\operatorname{supp} X = S$. In virtù del Lemma 1 troviamo una successione di insiemi $S_n \uparrow S$ t.c. $P_{S_n} x_n \in X$ per ogni $n$. Sostituendo $x_n$ con $P_{S_n} x_n$ si vede che le funzioni $|K|\,|x_n|$ sono quasi ovunque finite.

Fissato $c > \gamma_\nu(B, K)$ esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\sup_{\nu(F)\leq\delta} \sup_{x\in B} ||KP_F x|| \leq c.$$

In virtù del Lemma 3 troviamo $n \in \mathbb{N}$ t.c. l'insieme $F(x) = \{s \in S : |x(s)| \geq |x_n(s)|\}$ abbia misura $\nu(F(x)) \leq \delta$ per ogni $x \in B$. Di conseguenza, $||KP_{F(x)}x|| \leq c$ per $x \in B$. Ciò implica che l'insieme $M_1 = \{KP_{F(x)}x : x \in B\}$ è contenuto in un insieme di diametro $2q(Y)c$ e quindi $\alpha(M_1) \leq 2q(Y)c$.

Consideriamo ora l'insieme $M_2 = \{KP_{S\setminus F(x)}x : x \in B\}$. Il fatto che $|P_{S\setminus F(x)}x(s)| < |x_n(s)|$ implica che $M_2 \subseteq K(P(B) \cap D(x_n))$. Dal Teorema 2 possiamo dedurre che $K(D(x_n))$, e quindi anche $M_2$ è precompatto in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica (10). Insieme alla (11) ciò implica che

$$\alpha(M_2) \leq (1+q(Y))q(Y)\gamma(M_2) \leq (1+q(Y))q(Y)\gamma(K[P(B) \cap D(x_n)]). \tag{26}$$

L'uguaglianza $x = P_{F(x)}x + P_{S\setminus F(x)}x$ e l'additività di $K$ implicano che $Kx = KP_{F(x)}x + KP_{S\setminus F(x)}x$. Di conseguenza, $K(B) \subseteq M_1 + M_2$ e quindi

$$\alpha(K(B)) \leq q(Y)[\alpha(M_1) + \alpha(M_2)] \leq q(Y)[2q(Y)c + \alpha(M_2)].$$

Poiché $c > \gamma_\nu(B, K)$ è arbitrario la tesi segue in virtù della (26). $\square$

Poiché ogni sottoinsieme limitato di $X$ è anche limitato in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica (10), per il Lemma 2, il teorema precedente ammette il seguente

COROLLARIO 5. *Supponiamo che l'operatore* (16) *mandi $X$ in $Y$ e $k(t, s) \in \mathfrak{K}(U, V)$ per quasi ogni $(t, s) \in T \times S$. Sia $x_n \in \mathfrak{M}(S, U)$ una successione t.c. $0 \leq |x_n(s)| \uparrow \infty$. Inoltre, supponiamo che la funzione $|K|P_D|x_n|$ sia finita quasi ovunque per ogni insieme misurabile $D \subseteq S$ con $P_D x_n \in X$. Allora per ogni $B \subseteq X$ limitato si ha*

$$\alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B, K) + (1 + q(Y))q(Y)^2 \sup_n \gamma(K[P(B) \cap D(x_n)]).$$

Si osservi che in spazi di dimensione finita la condizione su $|K|P_D|x_n|$ nel Teorema 3 segue dall'inclusione $K(X) \subseteq Y$ (vedi la Proposizione 2). Di conseguenza, otteniamo ancora il seguente

Corollario 6. *Supponiamo che l'operatore* (16) *mandi* $X$ *in* $Y$ *e* $\dim U < \infty$. *Allora per ogni limitato* $B \subseteq X$ *si ha*

$$\alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B,K) + (1+q(Y))q(Y)^2\gamma(K[P(B)]).$$

Riassumendo il ragionamento di sopra otteniamo il seguente criterio di compattezza per operatori integrali:

Corollario 7. *Supponiamo che l'operatore* (16) *mandi* $X$ *in* $Y$ *e* $\dim U < \infty$. *Siano soddisfatte le seguenti due condizioni:*

(a) *Per ogni successione* $D_n \subseteq S$ *di insiemi misurabili con* $D_n \downarrow \emptyset$ *si ha* $||KP_{D_n}|| \to 0$.

(b) *Per ogni successione* $E_n \subseteq T$ *di insiemi misurabili con* $E_n \downarrow \emptyset$ *si ha* $||P_{E_n}K|| \to 0$.

*Allora l'operatore* $K$ *è compatto.*

Dim. Sia $B = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ la palla chiusa unitaria in $X$, quindi $B = P(B)$. Per ipotesi abbiamo $\gamma(B,K) = 0$ e $\gamma(K(B)) = 0$. In virtù della (23) otteniamo $\gamma_\nu(B,K) \leq \gamma(B,K) = 0$ e la tesi segue dal Corollario 6. □

## 4 – Operatori integrali regolarizzanti

Finora non abbiamo dovuto imporre condizioni particolari sull'operatore $|K|$ (almeno nel caso $\dim U < \infty$), ma solo una stima su $\gamma(K(B))$. Se supponiamo che $|K|$ mandi $X$ in $Y$ e che $Y$ sia regolare, allora una tale stima è soddisfatta automaticamente. Però è sufficiente un'ipotesi più debole:

Definizione 3. Chiamiamo un operatore integrale $K : X \to Y$ *regolarizzante* se esiste una successione $(x_n)_n$ in $\mathfrak{M}(S,U)$ con $|x_n(s)| \uparrow \infty$ e t.c. per ogni insieme $D \subseteq S$ con $P_D x_n \in X$ l'elemento $|K|P_D|x_n|$ appartenga alla parte regolare $Y^0$ di $Y$.

Facciamo qualche osservazione su questa definizione. Evidentemente, se lo spazio $Y$ è regolare e l'operatore $|K|$ manda $X$ in $Y$ allora $K$ è regolarizzante. Di solito un operatore integrale $K$ è detto *regolare* se $|K|$ manda $X$ in $Y$; ciò implica che $K(X) \subseteq Y$, per il Teorema 2, ma non viceversa. Infatti, addirittura nello spazio di Hilbert $X = Y = L_2([0,1], \mathbb{R})$ un controesempio è stato costruito da B. S. Mitjagin (vedi [10, Esempio 4.3]). Operatori non regolari possono avere delle proprietà assai "patologiche": ad esempio, la composizione di due operatori integrali non regolari non è necessariamente un operatore integrale (vedi [7], [8] ed anche Capitolo 4 di [12]). D'altro canto, tutti gli operatori integrali importanti in applicazioni sono regolari.

Il seguente risultato può essere considerato una generalizzazione del Teorema 2.8 di [10].

TEOREMA 4. *Sia $K : X \to Y$ un operatore regolarizzante. Allora*

$$\gamma(K(B)) \leq q(Y)\gamma_\nu^0(B, K) \tag{27}$$

*per ogni insieme $B \subseteq X$ che è limitato in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica* (10).

DIM. Senza perdere di generalità possiamo suppore che $S = \operatorname{supp} X$. Come nella dimostrazione del Teorema 3 possiamo scegliere la successione $(x_n)_n$ che compare nella Definizione 3 in $X$, cioè $|K|\,|x_n|$ appartiene alla parte regolare $Y^0$ di $Y$.

Sia $c > \gamma_\nu^0(B, K)$ e sia $E_n \subseteq T$ una successione t.c. $E_n \downarrow \emptyset$. Per la definizione di $\gamma_\nu^0(B, K)$ esistono $N \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ t.c.

$$\sup_{x \in B} ||P_{E_n} K P_F x|| \leq c \qquad (\nu(F) \leq \delta,\ n \geq N). \tag{28}$$

Inoltre, per il Lemma 3 troviamo $k \in \mathbb{N}$ t.c. l'insieme $F(x) = \{s \in S : |x(s)| \geq x_k(s)\}$ abbia misura $\nu(F(x)) \leq \delta$. L'uguaglianza $x = P_{F(x)}x + P_{S \setminus F(x)}x$ e l'additività di $K$ implicano che $Kx = KP_{F(x)}x + KP_{S \setminus F(x)}x$. Di conseguenza, dalla (28) segue che

$$\begin{aligned} ||P_{E_n} Kx|| = {} & ||P_{E_n} K P_{F(x)} x + P_{E_n} K P_{S \setminus F(x)} x|| \leq \\ & \leq q(Y)(||P_{E_n} K P_{F(x)} x|| + ||P_{E_n} |K| P_{S \setminus F(x)} |x|\,||) \leq \\ & \leq q(Y)(c + ||P_{E_n} |K|\,|x_k|\,||) \end{aligned}$$

per ogni $x \in B$ ed ogni $n \geq N$. Poiché $|K|\,|x_k|$ appartiene ad $Y^0$ si ha $||P_{E_n}|K|\,|x_k|\,|| \to 0$ per $n \to \infty$, uniformemente in $k \in \mathbb{N}$, e quindi $\gamma(K(B)) \leq q(Y)c$. Poiché $c > \gamma_\nu^0(B, K)$ è arbitrario segue la tesi. □

Dato che ogni sottoinsieme limitato di $X$ è anche limitato in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica (10), per il Lemma 2, il teorema precedente ammette il seguente

Corollario 8. *Siano $X$ uno spazio quasi-normato e $K : X \to Y$ un operatore regolarizzante. Allora*

$$\gamma(K(B)) \leq q(Y)\gamma_\nu^0(B, K)$$

*per ogni insieme limitato $B \subseteq X$.*

Combinando il Teorema 3 col Teorema 4 arriviamo al seguente

Teorema 5. *Sia $K : X \to Y$ un operatore regolarizzante e sia $k(t, s) \in \mathfrak{K}(U, V)$ per quasi ogni $(t, s) \in T \times S$. Allora*

$$\chi(K(B)) \leq \alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B, K)$$

*per ogni insieme $B \subseteq X$ limitato in $\mathfrak{M}(S, U)$ con la metrica* (10).

Dim. Come nella dimostrazione del Teorema 4 possiamo scegliere la successione $(x_n)_n$ che compare nella Definizione 3 in modo tale che $|K|\,|x_n| \in Y^0$. In virtù del Teorema 3 basta provare che $\gamma(K[P(B) \cap D(x_n)]) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma $|Kx| \leq |K|\,|x_n|$ per ogni $x \in P(B) \cap D(x_n)$, quindi

$$\gamma(K[P(B) \cap D(x_n)]) \leq \gamma(\{|K|\,|x_n|\}) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

poiché $|K|\,|x_n|$ è regolare. □

Corollario 9. *Siano $X$ uno spazio quasi-normato e $K : X \to Y$ un operatore regolarizzante. Supponiamo che $k(t, s) \in \mathfrak{K}(U, V)$ per quasi ogni $(t, s) \in T \times S$. Allora*

$$\chi(K(B)) \leq \alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B, K)$$

*per ogni insieme limitato $B \subseteq X$.*

## 5 – Alcune applicazioni

Poniamo le stesse ipotesi di prima, cioè $K : X \to Y$ è un operatore integrale lineare generato da un nucleo misurabile $k : T \times S \to \mathfrak{L}(U, V)$, e $X$ e $Y$ sono due spazi preideali quasi-seminormati.

Ricordiamo che $X$ è detto *$\beta$-quasi-perfetto* [21] se esiste $\beta \in [1, \infty)$ t.c.

$$||x|| \le \beta \lim_{n\to\infty} ||x_n|| \qquad (0 \le x_n \uparrow x \in X). \tag{29}$$

Nel seguito denotiamo con $\beta(X)$ la più piccola costante $\beta \ge 1$ per la quale valga la (29). Nel caso $\beta(X) = 1$ lo spazio $X$ si dice *quasi-perfetto*. Inoltre, lo spazio $X$ si chiama semi-perfetto se le relazioni $0 \le x_n \uparrow x$ e $\sup ||x_n|| < \infty$ implicano che $x$ è quasi ovunque finita ed appartiene ad $X$. Ogni spazio semi-perfetto è $\beta$-quasi-perfetto per qualche $\beta \ge 1$. Per spazi normati $X$ ciò è stato dimostrato in [1] (vedi anche [21]), ma nel caso generale la dimostrazione è identica. Osserviamo ancora che ogni spazio preideale semi-perfetto e quasi-normato è completo, cioè uno spazio ideale quasi-normato (vedi [21, Teorema 3.2.1] per il caso normato e [20] per il caso generale). Infine, se $X$ è semi-perfetto e quasi-perfetto, allora $X$ si dice *perfetto*.

Per ogni spazio preideale normato $X$ si può definire lo *spazio associato* $X'$ costituito da tutte le funzioni misurabili $y$ con $\operatorname{supp} y = \operatorname{supp} X$ per le quali la semi-norma

$$||y||_{X'} = \sup_{||x||\le 1} \int_S |y(s)|\,|x(s)|\,ds$$

è finita. Per esempio, per $X = L_p([0,1], \mathbb{R})$ con $1 \le p \le \infty$ si ha $X' = L_{p'}([0,1], \mathbb{R})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Lo spazio $X'$ è sempre uno spazio ideale perfetto (vedi [21, Teorema 3.4.1]). Di solito $X'$ è considerato come spazio di funzioni a valori nel duale $U^*$ di $U$. Identificando $y \in X'$ con il funzionale $y^* \in X^*$ definito da

$$y^*(x) = \int_S y(s)x(s)\,ds$$

si ottiene un'immersione (isometrica) $X' \hookrightarrow X^*$, vedi [21, Teorema 3.4.4]. Dalla definizione segue che $X \subseteq X''$ con $||x||_{X''} \le ||x||_X$. Inoltre, la norma $||\cdot||_X$ e la norma $||\cdot||_{X''}$ sono equivalenti su $X$ se e solo se $X$ è $\beta$-quasi-perfetto; in questo caso si ha

$$||x||_{X''} \leq ||x||_X \leq \beta(X)||x||_{X''} \qquad (x \in X), \tag{30}$$

vedi [21, Teorema 3.4.8]. Infine, si ha l'immersione (continua) $X'' \hookrightarrow X$ se e solo se $X$ è semi-perfetto.

In virtù del classico teorema di Hahn-Banach si ha

$$|u| = \sup_{||f||_{U^*} \leq 1} |f(u)| \qquad (u \in U). \tag{31}$$

Se definiamo $X'$ come sottospazio di $\mathfrak{M}(S, U^*)$ la (31) implica che

$$||x||_{X''} = \sup\left\{\int_S y(s)x(s)\,ds : yx \geq 0, ||y||_{X'} \leq 1\right\} \quad (x \in \mathfrak{M}(S, U)), \tag{32}$$

vedi [21, Corollario A.2.4].

Insieme a (16) consideriamo *l'operatore integrale associato* $K'$ di $K$ definito tramite la formula

$$K'y(s) = \int_T k^*(t,s)y(t)\,dt,$$

dove il nucleo $k^*(t,s) \in \mathfrak{L}(V^*, U^*)$ è definito tramite la relazione $k^*(t,s)(v^*)(u) = v^*(k(t,s)u)$. Il seguente risultato è ben noto nel caso di spazi perfetti di funzioni scalari:

PROPOSIZIONE 4. *Siano $X$ e $Y$ due spazi preideali normati e sia* $\operatorname{supp} k \subseteq \operatorname{supp} Y \times \operatorname{supp} X$. *Allora valgono i seguenti risultati:*

(a) *Se $K : X \to Y$ è limitato e regolare allora $K'$ manda $Y'$ in $X'$ ed è limitato con*

$$||K'|| \leq ||K||. \tag{33}$$

*In questo caso $K'$ è la restrizione $K^*|_{Y'}$ dell'operatore aggiunto $K^*$ ad $Y' \subseteq Y^*$. Inoltre, se anche $|K| : X \to Y$ è limitato allora $K'$ è regolare, $|K'|$ è limitato e $||\,|K'|\,|| \leq ||\,|K|\,||$.*

(b) *Viceversa, se* $K' : Y' \to X'$ *è limitato e regolare allora* $K$ *manda* $X'' \supseteq X$ *in* $Y''$ *e*

$$||K||_{\mathfrak{L}(X'',Y'')} \leq ||K'||.$$

*Inoltre, se* $Y$ *è* $\beta$*-quasi-perfetto e* $K(X) \subseteq Y$ *allora* $K : X \to Y$ *è limitato e*

$$||K||_{\mathfrak{L}(X,Y)} \leq \beta(Y)||K'||. \tag{34}$$

*Infine, se* $Y$ *è semi-perfetto l'ipotesi* $K(X) \subseteq Y$ *è sempre soddisfatta.*

Dim. Osserviamo innanzitutto che, poiché $K$ è regolare, per ogni $x \in X$ e ogni $y \in Y'$ si ha

$$\int_T \int_S |y(t)|\,|k(t,s)|\,|x(s)|\,ds\,dt = \int_T |y(t)|\,|K|\,|x|(t)\,dt < \infty.$$

In virtù del teorema di Tonelli la funzione misurabile $(t,s) \mapsto |y(t)k(t,s)|x(s)$ è integrabile su $T \times S$. In particolare, $t \mapsto k^*(t,s)y(t) = y(t)k(t,s)$ è integrabile per quasi ogni $s \in \operatorname{supp} x$. Utilizzando il teorema generalizzato di Fubini-Tonelli (vedi [18]) si deduce che $K'y$ è misurabile su $\operatorname{supp} x$. Per l'arbitrarietà di $x \in X$ concludiamo che la funzione $K'y$ è definita e misurabile per ogni $y \in Y'$. Poiché $(t,s) \mapsto y(t)k(t,s)x(s)$ è integrabile otteniamo, in virtù del teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \int_T y(t)Kx(t)\,dt &= \int_T \int_S y(t)k(t,s)x(s)\,ds\,dt = \\ &= \int_S \int_T y(t)k(t,s)x(s)\,dt\,ds = \int_S K'y(s)x(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ciò significa che $K' = K^*|_{Y'}$. Di conseguenza, $||K'|| \leq ||K^*|| \leq ||K||$.

Ora, se $|K| : X \to Y$ è limitato possiamo applicare il risultato appena ottenuto all'operatore integrale (scalare) con nucleo $|k|$. Concludiamo quindi che $|K|' : Y' \to X'$ è limitato con $||\,|K|'\,|| \leq ||\,|K|\,||$. D'altro canto, il nucleo $k^*$ dell'operatore $K'$ soddisfa

$$||k^*(t,s)|| = \sup_{||v^*||_{V^*} \leq 1} ||u \mapsto v^*(k(t,s)u)|| \leq ||k(t,s)||,$$

e quindi il nucleo di $|K'|$ si maggiora col nucleo di $|K|'$. Poiché quest'ultimo è non negativo, otteniamo per ogni $y \in Y'$ la stima $|\,|K'|y(t)| \leq |K|'|y|(t)$. Ciò significa che $|K'|y \in X'$ e

$$||\,|K'|y|| \leq ||\,|K|'|y|\,|| \leq ||\,|K|'||\,||\,|y|\,|| = ||\,|K|'||\,||y||.$$

Di conseguenza l'operatore $|K'| : Y' \to X'$ è definito e limitato con $||\,|K'|\,|| \leq ||\,|K|'\,|| \leq ||\,|K|\,||$ e la dimostrazione della tesi (a) è completa.

Dimostriamo ora la tesi (b). Per la (31) si ha

$$||k(t,s)u|| = \sup_{||v^*||_{V^*} \leq 1} |v^*(k(t,s)u)| = \sup_{||v^*||_{V^*} \leq 1} |k^*(t,s)(v^*)(u)| \leq |k^*(t,s)|\,|u|.$$

Per ogni $x \in X''$ ed $y \in Y'$ abbiamo quindi

$$\int_S \int_T |k(t,s)x(s)|\,|y(t)|\,dt\,ds \leq \int_S \int_T |k^*(t,s)|\,|x(s)|\,|y(t)|\,dt\,ds =$$
$$= \int_S |K'|\,|y|(t)\,|x(t)|\,dt < \infty,$$

poiché $|K'|$ manda $Y'$ in $X'$. Per quanto osservato sopra ne possiamo dedurre che $Kx$ è definita quasi ovunque e misurabile su $\operatorname{supp} Y$ per ogni $x \in X''$ e $Kx(t) = 0$ per $t \in T \setminus \operatorname{supp} Y$.

Il risultato dimostrato nella (a) implica che $K''$ manda $X''$ in $Y''$ con $||K''|| \leq ||K'||$. Si osservi che il nucleo $k^{**}$ di $K''$ soddisfa l'identità

$$k^{**}(t,s)(u)(v^*) = v^*(k(t,s)u) \qquad (u \in U,\ v^* \in V^*),$$

dove abbiamo identificato ogni elemento $u \in U$ in modo canonico con il rispettivo funzionale in $U^{**}$. Di conseguenza per ogni $x \in X''$ e $y \in Y'$ si ottiene

$$\int_T y(t)K''x(t)\,dt = \int_T \int_S y(t)k(t,s)x(s)\,ds\,dt = \int_T y(t)Kx(t)\,dt.$$

In virtù della (32) ciò implica che

$$||Kx||_{Y''} = \sup\left\{\int_T y(t)K''x(t)\,dt : yKx \geq 0,\ ||y||_{Y'} \leq 1\right\} \leq ||K''x||_{Y''},$$

quindi $||K||_{\mathfrak{L}(X'',Y'')} \leq ||K''|| \leq ||K'||$.

Se $Y$ è semi-perfetto abbiamo $Y'' = Y$ e quindi $K(X) \subseteq K(X'') \subseteq Y'' = Y$. Infine, se $Y$ è $\beta$-quasi-perfetto e $K(X) \subseteq Y$, allora la (30) implica che

$$||Kx||_Y \leq \beta(Y)||Kx||_{Y''} \leq \beta(Y)||K||_{\mathfrak{L}(X'',Y'')}||x||_{X''} \leq \beta(Y)||K'||\,||x||_X$$

per ogni $x \in X \subseteq X''$. La dimostrazione della tesi (b) è completa. $\square$

Teorema 6. *Siano $X$ e $Y$ spazi preideali normati con $Y$ $\beta$-quasi-perfetto. Sia $K : X \to Y$ un operatore limitato, regolare e regolarizzante. Supponiamo che anche l'operatore associato $K' : Y' \to X'$ sia regolare e regolarizzante. Allora per la palla unitaria $B = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ in $X$ si ha*

$$\gamma(B, K) \leq \beta(Y)\gamma^0(B, K) \leq \beta(Y) \min\{\gamma(B, K), \gamma(K(B))\}. \tag{35}$$

*Inoltre, se $k(t, s) \in \mathfrak{K}(U, V)$ per quasi ogni $(t, s) \in T \times S$, allora*

$$\chi(K(B)) \leq \alpha(K(B)) \leq 2\gamma(B, K). \tag{36}$$

*Infine, se $Y$ è regolare vale anche la stima inversa*

$$\gamma(K(B)) \leq \chi(K(B)). \tag{37}$$

Dim. La (37) segue direttamente dalla (13). Applicando la (24) con $F = S$ otteniamo $\gamma^0(B, K) \leq \gamma(K(B))$. Insieme alla (21) ciò fornisce la seconda disuguglianza nella (35).

Per dimostrare la prima disuguglianza nella (35) possiamo suppore, senza perdita di generalità, che $k(t, s) = 0$ per $(t, s) \notin \operatorname{supp} Y \times \operatorname{supp} X$. L'identità banale $(P_E K P_D)' = P_D K' P_E$ implica insieme alla (33) che

$$||P_D K' P_E|| = ||(P_E K P_D)'|| \leq ||P_E K P_D||,$$

e quindi $\gamma^0(B', K') \leq \gamma^0(B, K)$, dove $B' = \{y \in X' : ||y|| \leq 1\}$ rappresenta la palla unitaria in $X'$. Il Teorema 4 e la (23) implicano che

$$\gamma(K'(B')) \leq \gamma^0_\nu(B', K') = \gamma^0(B', K') \leq \gamma^0(B, K). \tag{38}$$

Ora, la relazione $(KP_D)' = P_D K'$ e la (34) implicano che
$$||KP_D|| \leq \beta(Y)||(KP_D)'|| = \beta(Y)||P_D K'||.$$
Ciò evidentemente dà la stima
$$\gamma(K, B) \leq \beta(Y)\gamma(K'(B')).$$
Combinando questa stima con la (38) si ottiene la prima disuguaglianza nella (35). La (36) segue dalla (23) e dal Corollario 9. □

Il Teorema 6 contiene una versione "vettoriale" del criterio di compattezza dimostrato in [14] come caso particolare:

COROLLARIO 10. *Siano $X$ e $Y$ spazi preideali normati con $Y$ $\beta$-quasi-perfetto e regolare. Sia $K : X \to Y$ un operatore limitato e regolare. Supponiamo che l'operatore integrale associato $K' : Y' \to X'$ sia regolare e regolarizzante e che $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ per quasi ogni $(t,s) \in T \times S$. Allora le seguenti quattro condizioni sono equivalenti:*

(a) *Per qualsiasi coppia di successioni $D_n \subseteq S$ e $E_n \subseteq T$ di insiemi misurabili con $D_n \downarrow \emptyset$ e $E_n \downarrow \emptyset$ si ha $||P_{E_n} KP_{D_n}|| \to 0$.*

(b) *Per ogni successione $D_n \subseteq S$ di insiemi misurabili con $D_n \downarrow \emptyset$ si ha $||KP_{D_n}|| \to 0$.*

(c) *Per ogni successione $E_n \subseteq T$ di insiemi misurabili con $E_n \downarrow \emptyset$ si ha $||P_{E_n} K|| \to 0$.*

(d) *L'operatore $K$ è compatto.*

*Se $Y$ non è regolare ma $K$ è regolarizzante allora* (a) *e* (b) *sono ancora equivalenti e sufficienti per la* (d).

DIM. Se $B = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ rappresenta sempre la palla unitaria in $X$, le condizioni (a), (b) e (c) sono solo riformulazioni di $\gamma^0(B, K) = 0$, $\gamma(B, K) = 0$ e $\gamma(K(B)) = 0$, rispettivamente. La tesi segue quindi dal Teorema 6. □

Facciamo qualche osservazione sul Corollario 10. Persino nel caso scalare $U = V = \mathbb{R}$, questo corollario è più generale del criterio di compattezza dimostrato in [14]. Infatti, non supponiamo che $X$ o $Y$ siano semi-perfetti. Poiché non supponiamo neanche la completezza di $X$ esistono operatori integrali su $X$ che non sono limitati. In realtà supponiamo solo la limitatezza dell'operatore $K$, ma non quella dell'operatore $|K|$ tra

$X$ e $Y$; tali operatori non vengono considerati in [14]. Facciamo anche osservare che la nostra ipotesi su $K$ di essere regolarizzante è meno restrittiva dell'ipotesi fatta in [14] che $|K|$ mandi $X$ nella parte regolare $Y^0$ di $Y$.

A prescindere da queste osservazioni possiamo riassumere i vantaggi principali del nostro aproccio nel modo seguente:

- I Corollari 5 e 9 forniscono un criterio di compattezza anche nel caso che la parte regolare di $X'$ sia banale, ad esempio per $X = L_1([0,1], \mathbb{R})$.
- Nei Corollari 5 e 9 otteniamo risultati di compattezza anche se $Y$ è solo quasi-normato, ad esempio per $Y = L_p([0,1], \mathbb{R})$ con $p \in (0,1)$.
- Anche se $K$ non è compatto otteniamo delle stime per la misura di non compattezza dell'immagine $K(B)$ della palla unitaria $B$ in $X$.
- Tali stime valgono anche se $B$ non è necessariamente la palla unitaria in $X$.

L'ultima osservazione è particolarmente utile se si considerano composizioni $KF$ di un operatore integrale non compatto $K$ con qualche altro operatore (non lineare) $F : Z \to X$ dove $Z$ è un altro spazio quasi-normato.

Per esempio, nella teoria topologica di punti fissi per operatori non lineari $A$ (vedi per esempio [17]) è molto importante la caratteristica

$$[A]_\alpha = \inf \{L : L > 0,\, \alpha(A(M)) \leq L\alpha(M)\}.$$

È evidente che valgono sempre le stime

$$[KF]_\alpha \leq [K]_\alpha [F]_\alpha \leq ||K||\, [F]_\alpha$$

se $K$ è lineare e limitato. Ora, se $K$ è un operatore integrale limitato ma non compatto si può ottenere una stima più forte. Per $F : Z \to X$ poniamo

$$[F]_\gamma = \inf \{L : L > 0,\, \gamma(F(M)) \leq L\alpha(M)\}. \tag{39}$$

Nel caso scalare la caratteristica (39) è stata introdotta e studiata in [2]. Il Corollario 9 implica il seguente

COROLLARIO 11. *Siano $X$ uno spazio quasi-normato e $K : X \to Y$ un operatore integrale regolarizzante. Supponiamo che $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ per quasi ogni $(t,s) \in T \times S$. Inoltre, supponiamo che $F : Z \to X$ mandi insiemi limitati in insiemi limitati. Allora*

$$[KF]_\alpha \leq 2q(Y)^2 ||K||\,[F]_\gamma.$$

DIM. Fissato un insieme limitato $M \subseteq Z$ poniamo $B = F(M)$; allora per ipotesi $B$ è limitato. Il Corollario 9 e la (21) implicano che

$$\alpha((KF)(M)) = \alpha(K(B)) \leq 2q(Y)^2\gamma_\nu(B,K) \leq$$
$$\leq 2q(Y)^2||K||\gamma(B) \leq 2q(Y)^2||K||\,[F]_\gamma\alpha(M)$$

come volevasi dimostrare. □

L'esempio più importante per applicare il Corollario 11 è l'operatore di sovrapposizione (di Nemytskij)

$$Fz(s) = f(s,z(s)) \qquad (z \in Z \subseteq \mathfrak{M}(S,W))$$

generato da qualche funzione di Carathéodory $f : S \times W \to W$. In questo caso la composizione $KF$ è l'operatore integrale di tipo Hammerstein

$$KFz(t) = \int_S k(t,s)f(s,z(s))\,ds \qquad (t \in T). \tag{40}$$

A prescindere da casi banali l'operatore $F$ non è mai compatto. Ciononostante può capitare che l'operatore di Hammerstein (40) sia compatto anche se $K$ non lo è. Per esempio (vedi [10, Teorema 19.1 (b)]) ciò è vero se $Y = L_p(S,\mathbb{R})$ $(0 < p < \infty)$, $K : X \to Y$ è regolare ed $F$ è un operatore *migliorante* nel senso che $[F]_\gamma = 0$. Questo risultato è un caso speciale del precedente Corollario 11.

Ribadiamo che l'ipotesi su $F : Z \to X$ di essere migliorante non è molto restrittiva. Per esempio se $X = L_p(S,U)$ $(1 \leq p < \infty)$, dove $S$ ha misura finita, e $F : Z \to L_q(S,U)$ per qualche $q > p$ allora $F : Z \to X$ è migliorante. Infatti, la disuguglianza di Hölder implica che $||P_{D_n}Fz||_{L_p} \leq ||\chi_{D_n}||_{L_r}||Fz||_{L_q}$ con $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$. Una condizione necessaria e sufficiente basata sul criterio di De la Vallée-Poussin affinché $F$ sia migliorante in spazi di Lebesgue è dovuta a P. P. Zabrejko, vedi [10, Teorema 17.5].

Ribadiamo anche che quasi tutti i risultati ottenuti sopra rimangono validi se consideriamo il cosidetto “assioma della scelta dipendente” anziché l'assioma della scelta classico. L'unica restrizione sta nella Proposizione 4 (b) e nel Teorema 6 dove dobbiamo *supporre* che l'uguaglianza (31) sia soddisfatta nello spazio $V$. Nel Teorema 6 questa ipotesi non è necessaria, però, se abbiamo $k(t,s) \in \mathfrak{K}(U,V)$ per quasi ogni $(t,s) \in T \times S$. Infatti, modificando $k$ eventualmente su un insieme di misura nulla possiamo supporre in questo caso che $k(T \times S)$ sia separabile. Inoltre, considerando l'involucro chiuso lineare di $k(T \times S)(U)$ al posto di $V$, possiamo anche supporre che lo spazio $V$ sia separabile. Ma in spazi di Banach separabili l'uguaglianza (31) è sempre valida.

## BIBLIOGRAFIA

[1] I. Amemiya: *A generalization of Riesz-Fischer's theorem*, J. Math. Soc. Japan, **5** (1953), 353-354.

[2] J. Appell: *Deux méthodes topologiques pour la résolution des équations elliptiques non linéaires sans compacité*, in: Méthodes topologiques en analyse non linéaire, A. Granas (ed.), Presses Univ. Montréal, Montréal 1985.

[3] J. Appell – E. De Pascale: *Su alcuni parametri connessi con la misura di non compattezza di Hausdorff in spazi di funzioni misurabili*, Boll. Unione Mat. Ital., **B-3** (1984), 497-515.

[4] J. Appell – M. Väth – A. Vignoli: *Compactness and existence results for ordinary differential equations in Banach spaces*, Zeitschr. Anal. Anw., **18**, 3 (1999), 569-584.

[5] N. A. Erzakova: *On a certain measure of noncompactness*, [in Russian], Izd. Kujbyshev. Gos. Univ., **8** (1984), 20-22.

[6] Ju. I. Gribanov: *On the measurability of a function*, [in Russian], Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., **3** (1970), 22-26.

[7] V. B. Korotkov: *On the Halmos-Sunder problems about integral operators on* $L_2$, [in Russian], Sibir. Mat. Zh., **23**, 3 (1982), 214-216.

[8] V. B. Korotkov: *Integral Operators*, [in Russian], Nauka, Novosibirsk 1983.

[9] M. A. Krasnosel'skij – Ja. B. Rutitskij: *Convex Functions and Orlicz Spaces*, [in Russian], Fizmatgiz, Moscow 1958; Engl. transl.: Noordhoff, Groningen 1961.

[10] M. A. Krasnosel'skij – P. P. Zabrejko – E. I. Pustyl'nik, – P. E. Sobolevskij: *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, [in Russian], Nauka, Moscow 1958; Engl. transl.: Noordhoff, Leyden 1976.

[11] A. Kufner – O. John – S. Fučik: *Function Spaces*, Noordhoff, Leyden 1977.

[12] S. S. Kutateladze: *Vector Lattices and Integral Operators*, [in Russian], Nauka, Novosibirsk 1991; Engl. transl.: Kluwer Academic Publ., Dordrecht 1996.

[13] W. A. J. Luxemburg: *On the measurability of a function which occurs in a paper by A. C. Zaanen*, Indag. Math., **20**, (1958), 259-265.

[14] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen: *Compactness of integral operators in Banach function spaces*, Math. Ann., **149** (1963), 150-180.

[15] M. M. Rao – Z. D. Ren: *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, New York 1991.

[16] W. Rudin: *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New Delhi 1990.

[17] B. N. Sadovskij: *Limit-compact and condensing operators*, [in Russian], Uspekhi Mat. Nauk, **27** (1972), 81-146; Engl. transl.: Russian Math. Surveys, **27** (1972), 85-155.

[18] M. Väth: *Integration Theory – A Second Course*, submitted Springer, Berlin.

[19] M. Väth: *Some measurability results and applications to spaces with mixed family-norm*, submitted Positivity.

[20] M. Väth: *Volterra and integral equations of vector functions*, submitted M. Dekker, New York.

[21] M. Väth: *Ideal Spaces*, Lect. Notes Math., **1664**, Springer, Berlin 1997.

[22] M. Väth: *Complete continuity of some nonlinear Volterra operator in Banach spaces*, Zeitschr. Anal. Anw., **17**, 1 (1998), 23-35.

[23] A. C. Zaanen: *Riesz Spaces II*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1983.

[24] P. P. Zabrejko: *Ideal spaces of functions*, [in Russian], Vestnik Jaroslav. Univ., **8** (1974), 12-52.

*Lavoro pervenuto alla redazione il 6 aprile 2000*
*ed accettato per la pubblicazione il 18 dicembre 2000.*
*Bozze licenziate il 17 maggio 2001*

Indirizzo degli Autori:

Jürgen Appell – Martin Väth – University of Würzburg – Department of Mathematics – Am Hubland, D-97074 Würzburg – Germany
E-mails: appell@mathematik.uni-wuerzburg.de vaeth@mathematik.uni-wuerzburg.de

This paper was written in the framework of a DFG research project (Az. AP 40-15/1). Finacial support by the Deutsche Forschungsgemeinschaft is gratefully acknowledged.