Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 21, Roma (2001), 87-119

Formes harmoniques L^2 sur les variétés non-compactes

G. CARRON

Presentazione: *Questo articolo riprende e completa un ciclo di conferenze tenute dall'Autore al Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo" dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza" nel giugno 1996. In esso si espongono alcuni legami fra la coomologia L^2 (ridotta), la topologia e la geometria delle varietà riemanniane non compatte. Se (M^n, g) è una varietà riemanniana completa, il suo k-mo spazio di coomologia L^2 (ridotta), indicato con $\mathcal{H}^k(M)$, si può definire come lo spazio delle k-forme differenziali L^2 che sono simultaneamente chiuse e cochiuse:*

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2, \quad d\alpha = 0, \quad \delta\alpha = 0\}.$$

Quando la varietà è compatta e senza bordo, il teorema di Hodge-deRham dice che questi spazi sono di dimensione finita e che essi sono isomorfi agli spazi di coomologia reale di M. Inoltre vale la formula di Gauss-Bonnet:

$$\chi(M) = \int_M \Omega = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)\,,$$

ove Ω è la n-forma di Eulero; per esempio in dimensione 2 si ha $\Omega = K\frac{dA}{2\pi}$, ove K è la curvatura di Gauss e dA l'elemento d'area.

Considerando varietà riemanniane non compatte, sorgono spontaneamente le due seguenti questioni:

i) quali sono le condizioni geometriche all'infinito che impongono agli spazi delle forme armoniche L^2 di avere dimensione finita?

E poi, una volta fissata una tale geometria:

ii) quali sono i legami fra la topologia e gli spazi di coomologia L^2, e quale tipo di formule di Gauss-Bonnet si può sperare di trovare?

Nella prima sezione dell'articolo, si descrive la coomologia L^2 ridotta e si entra nel dettaglio dei problemi posti; nella seconda sezione, si danno alcuni esempi particolarmente significativi. Nella terza parte si introduce un importante strumento di *analisi globale sulle varietà: le disuguaglianze di Sobolev. Si ottengono le risposte ai problemi proposti per le varietà che verifichino una disuguaglianza di Sobolev e su cui un integrale di curvatura sia finito. Per esempio le varietà euclidee all'infinito verificano queste ipotesi ed i metodi qui presentati permettono di calcolare le dimensioni degli spazi delle forme armoniche L^2 di queste varietà in funzione della topologia. Si dà risposta in questo caso alla questione seguente, posta da J. Dodziuk nel 1980 nel seminario di S.T. Yau: "Secondo Vesentini si sa che gli spazi delle forme armoniche L^2 di una varietà piatta fuori di un compatto sono di dimensione finita. Quali sono i legami di questi spazi in funzione della topologia della varietà?"*

ABSTRACT: *We give here some results about harmonics L^2 forms, topology and the geometry at infinity on non-compact manifolds.*

1 – Les formes harmoniques L^2 sur les variétés riemanniennes non-compactes

Je voudrais dans cette partie décrire une question qui a motivé mes travaux sur les formes harmoniques L^2; pour cela, je vais d'abord rappeler briévèment les résultats de Hodge-Rham et deRham, ensuite je donnerais quelques exemples de variété non-compacte où on sait calculer les espaces de formes harmoniques L^2.

1.a. LA COHOMOLOGIE DERHAM. Soit M^n une variété différentiable de dimension n, l'opérateur de différentiation extérieure agit de

$$d \ : \ C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$$

et vérifie $d \circ d = 0$, ainsi on définit

i) $Z^k(M) = \mathrm{Ker}\{d : \ C^\infty(\Lambda^k T^*M) \longrightarrow C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\}$
ii) $B^k(M) = dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$.

Alors on a $B^k \subset Z^k$, le $k-$ième groupe de cohomologie (deRham) est le quotient de ces deux espaces

$$H^k_{dR}(M) = \frac{Z^k(M)}{B^k(M)}\,.$$

En fait ces espaces, qui sont a priori des invariants différentiables, sont en fait des invariants d'homotopie, plus précisément on a le résultat deRham

KEY WORDS AND PHRASES: L^2 *harmonic forms – Sobolev inequality.*
A.M.S. CLASSIFICATION: 58G05 – 46E35 – 53C21 – 53C42

THÉORÈME 1.1. *Les espaces de cohomologie deRham sont isomorphes aux groupes de cohomologie réels de M, i.e.* $H^k_{dR}(M) \simeq H^k(M, \mathbf{R})$.

REMARQUE. On peut définir la cohomologie deRham à support compact: à partir de

$$d \ : \ C_0^\infty(\Lambda^k T^* M) \longrightarrow C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)\,,$$

on définit

$$H^k_c(M) = \frac{\{\alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^*M),\ d\alpha = 0\}}{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}\ .$$

Et lorsque la variété est l'intérieure d'une variété compacte à bord, ces espaces sont isomorphes aux espaces de cohomologie relative réel: $H^k_c(M) \simeq H^k(M, \partial M, \mathbf{R})$.

1.b. LA L^2-COHOMOLOGIE RÉDUITE.

1.b.1 DÉFINITION. Soit maintenant (M^n, g) une variété riemannienne. La L^2-cohomologie réduite est définie à partir de l'action (non-bornée) de la différentiation extérieure d sur l'espace de Hilbert $L^2(\Lambda^k T^* M)$. On introduit

i) $Z^k_2(M)$, qui est le noyau de l'opérateur d agissant, de façon non-bornée, sur $L^2(\Lambda^k T^* M)$, ou de façon équivalente

$$Z^k_2(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ d\alpha = 0\}\,,$$

où on entend que $d\alpha$ est une distribution (ou un courant). Plus précisément, la structure Hilbertienne induite par la métrique nous permet de définir δ, l'opérateur différentiel adjoint à d, par la formule

$$\langle d\alpha, \beta\rangle_{L^2} = \langle \alpha, \delta\beta\rangle_{L^2}, \forall\, \alpha \in C_0^\infty(\Lambda^k T^* M),\ \beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)\,.$$

Alors l'égalité au sens des courants $d\alpha = 0$, signifie que pour tout $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M)$, on a

$$\langle \alpha, \delta\beta\rangle = 0\,.$$

C'est à dire que $Z^k_2(M) = (\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1} T^* M))^\perp$, ce qui montre que c'est un sous-espace fermé de L^2.

ii) $B_2^k(M)$, qui est l'adhérence dans $L^2(\Lambda^k T^*M)$ de $d\,[C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)]$; où on a noté $C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ l'espace des k-formes différentielles lisses à support borné; par exemple si M est une variété à bord compacte alors les éléments de $C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$ ont un support qui peut rencontré le bord.

On a $B_2^k(M) \subset Z_2^k(M)$ et le k^{ieme} espace de L^2-cohomologie réduite est le quotient $H_2^k(M) = Z_2^k(M)/B_2^k(M)$. C'est donc un espace de Hilbert.

1.b.2 Quelques propriétés. Il est clair que si g' est une autre métrique sur M^n qui est quasi-isométrique à g (i.e. $C^{-1}g \leq g' \leq C\,g$, pour une constante C) alors les espaces de L^2-cohomologie réduites de (M,g) et (M,g') sont isomorphes. En fait, on même mieux J. Lott a remarqué que ces espaces étaient des invariants d'homotopie Lipschitz, i.e. si $f_0, f_1 : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ sont des applications Lipschitz telles qu'il existe une application Lipschitz $F : ([0,1]\times M, dt^2+g) \longrightarrow (N,h)$ homotopant f_0 et f_1 alors les applications $f_0^*, f_1^* : H_2^k(N) \longrightarrow H_2^k(M)$ sont égales.

1.b.3 Formes harmoniques et L^2-cohomologie réduite. La L^2-cohomologie réduite a une interprétation en terme de formes harmoniques L^2. En effet, notons $\mathcal{H}^k(M)$ l'espace des k-formes harmoniques L^2 sur M:

$$\mathcal{H}^k(M) = \{h \in L^2(\Lambda^k T^*M), dh = \delta h = 0\}\,.$$

Alors on a la décomposition de Hodge-deRham-Kodaira

$$L^2(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)} \oplus \overline{\delta C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)}\,, \tag{1.2}$$

où l'adhérence s'entend pour la topologie de $L^2(\Lambda^k T^*M)$. Et de plus on a $Z_2^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}$. Ainsi lorsque la variété est **complète** alors les fermés bornés sont les compacts et $C_0^\infty = C_b^\infty$ et donc on a dans ce cas l'isomorphisme $\mathcal{H}^k(M) \simeq H_2^k(M)$. De plus dans ce cas, le résultat d'Andreotti et Vesentini affirme que si $\Delta = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-deRham alors on a aussi

$$\mathcal{H}^k(M) = \{h \in L^2(\Lambda^k T^*M), \Delta h = 0\}\,.$$

Attention, ces résultats sont faux si la variété riemannienne n'est pas complète. Par exemple si la variété est une variété compacte à bord alors cette dernière identité n'est pas valable, puisque l'un des espaces est celui des fonctions localement constante et l'autre celui des fonctions harmoniques.

1.b.4 La L^2-cohomologie (non-réduite). Elle est définie comme le quotient de $Z_2^k(M)$ par l'image par d de son domaine i.e.

$$H_{2,nr}^k(M)=Z_2^k(M)/\{d\alpha,\ \text{tel que}\,\alpha \in L^2(\Lambda^{k-1}T^*M),\ d\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*M)\}\,.$$

En fait, la L^2-cohomologie réduite et non-réduite coincident uniquement lorsque zéro n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham. Les propriétés usuelles de cohomologie, comme les suites exactes de Mayer-Vietoris, de l'homomorphisme cobord, sont vrai pour la cohomologie L^2 non-réduite mais elles ne sont pas vrai en génerale pour la cohomologie réduite. Désormais, on nommera L^2-cohomologie la L^2-cohomologie réduite sauf lorsque cela sera ambigu.

1.b.5 Le cas des variétés compactes. Supposons ici que la variété est compacte sans bord. Alors dans ce cas, les L^2-cohomologie réduite et non-réduite coincident puisque le spectre du Laplacien de Hodge-Rham est discret; en particulier l'espace des formes harmoniques est de dimension finie. Le théorème de Hodge-deRham affirme que l'on a la décompsition

$$C^\infty(\Lambda^k T^*M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M) \oplus \delta C^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)\,,$$

et on a $Z^k(M) = \mathcal{H}^k(M) \oplus dC^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)$. Ce qui montre que les espaces de L^2-cohomologie, de formes harmoniques L^2, de cohomologie réelle sont égaux.

En particulier, on a la formule de Gauss-Bonnet:

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M) = \int_M \Omega^g\,,$$

où $\chi(M)$ est la caractéristique d'Euler de M et où Ω^g est n-forme d'Euler; par exemple en dimension 2, nous avons $\Omega = KdA/2\pi$ K étant la courbure de Gauss de (M,g) et dA la forme d'aire.

Une question naturelle est de comprendre ce qui se passe pour les variétés complètes non-compactes. Suivant J. Roe ([38]) on peut classifier ce problème sur les variétés non-compactes en trois types: I, II, III, en référence à la classification des algèbres de Von-Neumann. Le type I est celui où les espaces de formes harmoniques sont de dimension finie, le type II celui où ces espaces sont de dimension infinie ou nulle mais où on peut définir une dimension moyennée, par exemple si la variété est un revêtement infini d'une variété compacte; une très bonne référence est l'article D'ATIYAH [3]. le type III est celui où on considère les formes harmoniques L^2 sur les feuilles d'un feuilletage.

Ici, on s'interesse uniquement au type I, et nos questions naïves sont les suivantes

i) Quand peut-on affirmer que ces espaces de formes harmoniques L^2 sont de dimension finie.

ii) Dans ce cas, quelles liens ont ces espaces avec la topologie et la géométrie de la variété?

iii) Si cela est bien défini comment peut-on comparer la caractéristique d'Euler L^2 définie par

$$\chi_{L^2}(M) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dim \mathcal{H}^k(M)$$

et l'intégrale de la n-forme d'Euler? Autrement dit, quel type de formule de Gauss-Bonnet peut-on espérer?

1.c. L^2-COHOMOLOGIE ET GÉOMÉTRIE À L'INFINI. Avant de donner des exemples, je voudrais donner le résultat suivant de J. LOTT ([34])

THÉORÈME 1.3. *Si deux variétés riemanniennes complètes (M_1, g_1) et (M_2, g_2) sont isométriques hors d'un compact alors si tout les espaces de L^2-cohomologie réduite de l'une sont de dimension finie, alors ceux de la seconde aussi, i.e.*

$$(\dim \mathcal{H}^k(M_1) < \infty,\ \forall k) \Leftrightarrow (\dim \mathcal{H}^k(M_2) < \infty,\ \forall\, k)\,.$$

Avant d'esquisser la preuve de ce résultat, je dois dire que ce théorème est une réponse à une question que m'a posée H. Pesce en 1995 et que cette question naturelle a guidé mon intuition.

Preuve. Elle nécéssite de définir la L^2-cohomologie absolue et relative d'une variété riemannienne ouverte (Ω, g) à bord compact. La L^2-cohomologie absolue est la L^2-cohomologie réduite comme elle a été définie précédement. La L^2-cohomologie relative est définie par

$$H_2^k(\Omega, \partial\Omega) = \frac{(\delta C_b^\infty(\Lambda^k T^*\Omega))^\perp}{\overline{\{d\alpha,\ i^*\alpha = 0,\ \alpha \in C_b^\infty(\Lambda^{k-1}T^*\Omega)\}}}\,,$$

où l'adhérence est pour la topologie L^2 et où i^* est l'application naturelle associée à l'inclusion $\partial\Omega \longrightarrow \Omega$. Lorsque l'espace métrique $(\bar{\Omega}, d_g)$ est complet, ces espaces ont une interprétation en terme de formes harmoniques:

Proposition 1.4.

$$H_2^k(\Omega) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*\Omega), d\alpha = \delta\alpha = 0,\ \mathrm{int}_{\vec{\nu}}\alpha = 0\}\ ;$$
$$H_2^k(\Omega, \partial\Omega) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*\Omega), d\alpha = \delta\alpha = 0,\ i^*\alpha = 0\}\ ;$$

où $\vec{\nu}$ est la normale intérieure à $\partial\Omega \subset \Omega$.

Ces égalités ont été montré par Duff-Spencer ([26]) et Connor ([15]) pour les variétés compactes à bord, ils ont aussi montré que ces espaces de formes harmoniques sont isomorphes au groupes de cohomologie absolue/relative de Ω. Les arguments de G. Duff, D.C. Spencer se généralisent aisément à notre cadre; ces résultats sont bien connus et ils sont, par exemple, assez explicites dans les articles de M. Lesch et J. Brüning ([8]) et de J. Lott ([34]). Soit maintenant (M, g) une variété riemannienne complète et $K \subset M$ un compact à bord lisse de M, on pose $\Omega = M - K$, il y a des applications naturelles entre $H_2^k(M)$, $H_2^k(\Omega)$, $H_2^k(\Omega, \partial\Omega)$: d'abord l'application restriction

$$j^*\,:\, H_2^k(M) \longrightarrow H_2^k(\Omega)$$

et puis l'application extension par zéro

$$e\,:\, H_2^k(\Omega, \partial\Omega) \longrightarrow H_2^k(M)\,.$$

Cette dernière application est bien définie car si $\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*\Omega)$ vérifie les équations $d\alpha = \delta\alpha = 0,\ i^*\alpha = 0$ alors si $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*M)$, alors grâce à la formule de Stockes on a

$$\int_M \langle d\alpha, \beta\rangle - \int_M \langle \alpha, \delta\beta\rangle = \int_{\partial\Omega} \langle i^*\alpha, \mathrm{int}_{\vec{\nu}}\beta\rangle = 0\,.$$

Ainsi l'extension par zéro de la forme α est faiblement fermée. Puis nous avons les deux faits suivants

i) $\mathrm{Im}\, j^*$ est de codimension finie dans $H_2^k(\Omega)$.

ii) $\mathrm{Im}\, e$ est de codimension finie dans $H_2^k(M)$.

Ces faits permettent de conclure la preuve du théorème.

D'abord, quite à passer au revêtement double, on peut supposé la variété orientée; en effet sur le revêtement double orienté d'une variété riemannienne non-orientable, l'automorphisme du revêtement anticommute avec l'opérateur de dualité de Hodge, i.e si $\pi : \bar{M} \longrightarrow M$ est un tel revêtement et si γ est l'automorphisme de ce revêtement alors $*\gamma^* + \gamma^* * = 0$. Ainsi si on note

$$\mathcal{H}_\epsilon(\bar{M}) = \{\alpha \in \mathcal{H}(\bar{M}),\, \gamma^*\alpha = \epsilon\alpha\}$$

ceci pour $\epsilon \in \{+1, -1\}$, on a $\mathcal{H}(\bar{M}) = \mathcal{H}_{+1}(\bar{M}) \oplus \mathcal{H}_{-1}(\bar{M})$ et $\mathcal{H}_{+1}(\bar{M})$ est isomorphe à $\mathcal{H}(M)$, ainsi puisque $*$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{H}_{+1}(\bar{M})$ et $\mathcal{H}_{+1}(\bar{M})$, on a

$$\dim \mathcal{H}(\bar{M}) = 2 \dim \mathcal{H}(M)\,.$$

On a une dualité de Hodge-Poincaré entre les espaces $H_2^k(\Omega)$ et $H_2^{n-k}(\Omega, \partial\Omega)$. Ainsi grâce au premier fait, si $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie alors $H_2^k(\Omega)$ est de dimension finie, ainsi que $H_2^{n-k}(\Omega, \partial\Omega)$. Puis le second fait montre que si $H_2^k(\Omega, \partial\Omega)$ est de dimension finie alors $\mathcal{H}^k(M)$ est de dimension finie. Ainsi on a

$$\dim \mathcal{H}^k(M) < \infty \Leftrightarrow \Big(\dim H_2^k(\Omega) < \infty,\ \dim H_2^{n-k}(\Omega) < \infty\Big)\,.$$

Le premier fait se prouve avec l'application cobord $b : H_2^k(\Omega) \longrightarrow H_c^{k+1}(K)$. Cette application est définie ainsi: si α est un représentant lisse de $[\alpha] \in H_2^k(\Omega)$, on étend α en une forme lisse $\bar{\alpha}$ sur M fermée au voisinage de Ω, alors $b[\alpha]$ est la classe de cohomologie de $d\bar{\alpha}$ dans $H_c^k(K)$; ceci est bien définie, i.e. cela ne dépend pas du choix de α et de l'extension. Une vérification simple montre que l'on a $\ker b = \mathrm{Im} j^*$. Cette égalité est un héritage de la suite exacte en cohomologie deRham associée à l'opérateur cobord. Cette égalité conclut le théorème puisque $\ker b$ est de codimension finie. Le second fait se prouve de même, en considérant l'application de restriction à K, $r : \mathcal{H}^k(M) \longrightarrow H^k(K)$, et de même, on a $\ker r = \mathrm{Im} e$. ∎

Ce théorème et sa preuve montrent que l'on peut espérer en général établir des liens entre la topologie de la variété, la géométrie à l'infini, et la L^2-cohomologie de la variété. Ceci nous amène au programme suivant

i) Quelles sont les géométries à l'infini qui imposent aux espaces de formes harmoniques L^2 d'être de dimension finie?

ii) Puis quelles sont les liens entre ces géométries à l'infini, la topologie et les espaces de L^2-cohomologie?

Nous allons maintenant donner des exemples où on sait que ces espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie et de ce qu'on sait à propos de la seconde question. Le but de cette partie n'est pas d'être exhaustif sur tous les résultats de nullité et de finitude pour les espaces de formes harmoniques L^2, le but est d'exposer les exemples qui débouchent ou qui peuvent déboucher, selon moi, sur une réponse à la seconde question.

2 – Des exemples

2.a. Le cas des formes de degré 0 et n.

Proposition 2.1. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne complete connexe alors*

$$\mathcal{H}^0(M) = \mathbf{R}\mathbf{1}_M \text{ si et seulement si } \operatorname{vol} M < \infty\,,$$

$$\mathcal{H}^0(M) = \{0\} \text{ si et seulement si } \operatorname{vol} M = \infty\,.$$

Ce résultat se prouve simplement en utilisant la définition de la L^2-cohomologie réduite, puisqu'une fonction L^2 faiblement fermé est en fait locallement constante. Ce résultat a deux corollaires l'un énonce un résultat similaire à propos des formes de degré n lorsque la variété et orientable. L'autre est que sur l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ il n'y a pas de forme harmonique L^2 non-nulle. On peut donner une autre preuve de ce résultat:

2.b. Cas des variétés produits.

Proposition 2.2. *Si (M,g) est une variété riemannienne complète isométrique au produit riemannien $\mathbf{R}\times N$ alors*

$$\mathcal{H}^k(M)=\{0\},\ \forall k\,.$$

Preuve. Une première preuve serait d'utiliser une formule de Künneth. La seconde preuve utilise la formule de Cartan. Soit $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs unitaires tangent à $\mathbf{R}\subset\mathbf{R}\times N$ et φ^t le groupe à un paramètre d'isométries qu'il engendre, i.e. $\varphi^t(s,x)=(t+s,x)$. Si α est une k-forme harmonique L^2 alors $(\varphi^t)^*\alpha$ est aussi une forme harmonique L^2 et on a la formule de Cartan

$$(\varphi^t)^*\alpha-\alpha=d\int_0^t \mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\varphi^s)^*\alpha\,ds\,.$$

On a évidement la majoration

$$\|\mathrm{int}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\varphi^s)^*\alpha\|_{L^2}\leq\|(\varphi^s)^*\alpha\|_{L^2}\,.$$

Donc la forme $(\varphi^t)^*\alpha$ est L^2-cohomologue à la forme α, comme α est l'unique représentant harmonique dans sa classe on a $(\varphi^t)^*\alpha=\alpha$, puis comme α est de carré sommable, α est nulle. □

La preuve de cette proposition s'étend aisément pour donner

Proposition 2.3. *Soit G un groupe de Lie dont la composante neutre du centre n'est pas compact alors pour tout k, on a $\mathcal{H}^k(G)=\{0\}$, ceci pour n'importe quelle métrique invariante à gauche.*

Preuve. La preuve est la même: soit Z un élement de l'algèbre de Lie de G, qui engendre un sous-groupe non-compact à un paramètre $(g^s)_{s\in\mathbf{R}}$, on note aussi L_{g^s} le difféomorphisme de G qui est la multiplication à gauche par g^s, c'est donc une isométrie. Si α est une k-forme harmonique L^2 alors $(L_{g^t})^*\alpha$ est aussi une forme harmonique L^2 et l'on a la formule de Cartan

$$L^*_{g^t}\alpha - \alpha = d\int_0^t \mathrm{int}_z L^*_{g^s}\alpha\, ds\,.$$

Où z est la champ de vecteur

$$z(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t.x\,.$$

On a la majoration

$$\|\mathrm{int}_z L^*_{g^s}\alpha\|_{L^2} \le \max_{x\in G}|z(x)|\,\|\alpha\|_{L^2}\,.$$

Or

$$|z(x)| = \left|x^{-1}.\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t.x\right| = |z(e)|\,,$$

car $x^{-1}g^t x = g^t$ puisque chaque g^t est un élement du centre de G. Donc $L^*_{g^t}\alpha = \alpha$ ceci pour tout $t\in\mathbf{R}$, ensuite le fait que le groupe g^t soit non compact assure que comme α est de carré sommable alors $\alpha = 0$. □

Je remercie ici C. Pittet avec lequel j'ai oralement prouvé ce résultat.

Corollaire 2.4. *Si G est un groupe nilpotent alors $\mathcal{H}^k(G) = \{0\}$, pour tout k.*

Nous décrirons plus loin les espaces de formes harmoniques L^2 des variétés qui sont euclidiennes à l'infini, i.e des variétés riemanniennes isométriques, hors d'un compact, au complémentaire d'une boule dans un espace euclidien. Mais je pose la question suivante à laquelle je ne sais répondre:

Si (M^n, g) est une variété riemannienne isométrique hors d'un compact au complémentaire d'un compact d'un groupe nilpotent (muni d'une métrique invariante à gauche) alors quelles sont les liens entre les espaces de formes harmoniques L^2 et la topologie de M? J'ignore même la réponse à cette question lorsque la géométrie à l'infini est celle du groupe de Heisenberg de dimension 3

$$\text{Heis}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix} (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \right\}.$$

2.c. Le cas des variétés de révolution. Dans [23], J. Dodziuk a calculé explicitement la cohomologie des variétés de révolution

Théorème 2.5. *Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse impaire, nulle uniquement en zéro telle que $f'(0) = 1$, alors on munit $\mathbf{R}^n$ avec la métrique qui en coordonnée polaire s'écrit $g_f = dr^2 + f^2(r)d\theta^2$ où $d\theta^2$ est la métrique usuelle de la sphère, alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(\mathbf{R}^n, g_f) &= \{0\} \text{ si } k \notin \{0, n/2, n\} \text{ ;} \\ \mathcal{H}^0(\mathbf{R}^n, g_f) &= \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^n, g_f) = \{0\} \text{ si } \int_0^\infty f^{n-1} = \infty \text{ ;} \\ \mathcal{H}^0(\mathbf{R}^n, g_f) &\simeq \mathcal{H}^n(\mathbf{R}^n, g_f) \simeq \mathbf{R} \text{ sinon ;} \\ \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbf{R}^n, g_f) &= \{0\} \text{ si } \int_1^\infty f^{-1} = \infty \text{ ;} \\ \dim \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(\mathbf{R}^n, g_f) &= \infty \text{ si } \int_1^\infty f^{-1} < \infty\,. \end{aligned}$$

Ainsi se pose la question du calcul des espaces de formes harmoniques L^2 pour une variété riemannienne qui, hors d'un compact, est isométrique à $(\mathbf{R}^n, g_f)$. Par exemple, le résultat de J. Dodziuk montre que pour l'espace hyperbolique réel, on a

si $2k \neq n$ alors $\mathcal{H}^k(\mathbf{H}^n) = \{0\}$.
Si $2k = n$ alors $\dim \mathcal{H}^k(\mathbf{H}^n) = \infty$.

R. Mazzeo a entièrement résolu cette question du calcul des espaces de L^2-cohomologie pour les variétés asymptotiquement hyperboliques ([35]):

Théorème 2.6. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne qui au dehors d'un compact est isométrique au produit tordu $(]0,\infty[\times\Sigma, dr^2 + e^{2r}g)$, où*

g est une métrique riemannienne sur la variété compact Σ alors

$$\begin{aligned}
&\text{si } k < n/2,\ \mathcal{H}^k(M) \simeq H^i(K, \partial K)\,,\\
&\text{si } k > n/2,\ \mathcal{H}^k(M) \simeq H^i(K),\\
&\text{si } k = n/2,\ \dim \mathcal{H}^k(M) = \infty\,.
\end{aligned}$$

De plus, R. Mazzeo détermine le spectre essentiel de l'opérateur de Hodge-Rham de ces variétés.

2.d. Le cas de la dimension moitié. Si (M^n, g) est une variété riemannienne de dimension n paire, alors la norme L^2 sur les formes différentielles de degré $n/2$ est un invariant conforme ainsi

Proposition 2.7. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne de dimension paire et si $f \in C^\infty(M)$ on a*

$$\mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(M, g) = \mathcal{H}^{\frac{n}{2}}(M, e^{2f}g)\,.$$

On peut ainsi déterminer l'espace des formes harmoniques L^2 de degré $\frac{n}{2}$ sur l'espace hyperbolique réel $\mathbf{H}^n$. Nous donnons ici un autre type d'application de cette invariance conforme, pour cela nous commençons par le résultat suivant:

Proposition 2.8. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et K un compact de M de capacité nulle alors*

$$\begin{aligned}
\{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^*(M - K)),\, d\alpha = \delta\alpha = 0 \text{ sur } M - K\}&\\
= \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ d\alpha = \delta\alpha = 0,\ \text{sur } M\}\,.&
\end{aligned}$$

Rappelons la définition de la capacité d'un compact K d'une variété riemannienne compact (M, g):

$$\operatorname{cap} K = \inf\Big\{ \int_M |du|^2,\ \int_M u = 0, u \geq 1 \text{ sur } K \Big\}\,.$$

Selon G. Courtois ([19]), si $H_0^1(M - K)$ le completé de $C_0^\infty(M - K)$ pour la norme H^1, $u \mapsto \sqrt{\|du\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2}$. Alors $\operatorname{cap} K = 0$ si et seulement si $H^1(M) = H_0^1(M - K)$. Ce qui implique que si $\operatorname{cap} K = 0$ alors $H_0^1(\Lambda^k T^*(M - K)) = H^1(\Lambda^k T^* M)$.

En effet, $H^1_0(\Lambda^k T^*(M-K))$ est le complètè de $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-K)$ muni de la norme $\alpha \mapsto \sqrt{\int_M |\nabla\alpha|^2 + |\alpha|^2}$. Montrons que $\alpha \in C^\infty(\Lambda^k T^* M)$ est dans $H^1_0(\Lambda^k T^*(M-K))$, ce qui conclura par densité. Si $\rho \in C^\infty(M)$ on a la formule d'intégration par parties

$$\int_M |\nabla(\rho\alpha)|^2 = \int_M |d\rho|^2|\alpha|^2 + \rho^2\langle\alpha, \nabla^*\nabla\alpha\rangle\,,$$

ceci montre que si ρ_k est une suite de fonctions de $C_0^\infty(M-K)$ tendant en norme H^1 vers la fonction constante 1, alors $(\rho_k\alpha)_k$ est une suite d'éléments de $C_0^\infty(\Lambda^k T^*(M-K))$ tendant en norme H^1 vers α.

Preuve. Par la loi du *qui peut le plus peut le moins* on a l'inclusion du second espace dans le premier. L'autre inclusion est évidente avec la définition de la capacité: soit α une k-forme harmonique L^2, alors on a $\langle\alpha, \delta\beta\rangle = 0$, pour tout $\beta \in C_0^\infty(\Lambda^{k+1}T^*(M-K))$. Or cette expression est continue par rapport à β pour la norme H^1, et donc elle est valide par densité pour tout $\beta \in H^1_0(\Lambda^k T^*(M-K))$, et donc pour toutes $(k-1)$-formes lisses sur M. Donc α est faiblement fermé sur M. Le même argument montre que α est faiblement cofermé et donc que α est harmonique sur M. ∎

Remarques.

i) Ceci montre que le complémentaire d'un compact de capacité nulle dans une variété connexe est connexe. En effet les fonctions localement constante sur le complémentaire sont constante. En fait, on peut trouver aussi une preuve avec le mouvement Brownien, puisque presque sûrement le mouvement Brownien évite les ensembles de capacité nulle.

ii) On a le même résultat sur les variétés non-compactes auxquelles on enlève un compact de capacité nulle relativement à un ouvert borné qui le contient.Ce résultat a quelques applications:

   1) Soit S une surface riemannienne tel que $\int_S |K| dA < \infty$ alors grâce au résultat de Huber ([31]) on sait que S est conformément équivalente à une surface riemannienne compacte $\bar{S}$ à laquelle on a enlevé un nombre fini de points, ainsi comme ces points sont de capacité nulle, si g est le genre de S et donc de $\bar{S}$ on a

$$\dim \mathcal{H}^1(S) = \mathrm{b}_1(\bar{S}) = 2g\,.$$

2) Un autre exemple géométriquement intéressant est le suivant: on considère l'espace projectif complexe muni de la métrique de Fubini-Study; soit $p_0 \in P^n(\mathbf{C})$, le cut-locus de p_0 est exactement l'espace projectif $P^{n-1}(\mathbf{C})$ situé à l'infini par rapport à p_0. De plus, en coordonnées exponentielles $(r,u) \in]0,\pi[\times \mathbf{S}^{2n-1}$, la métrique de Fubini-Study est exactement

$$dr^2 + r^2 g_{\pi - r}$$

où g_l est la métrique de Berger sur $\mathbf{S}^{2n-1}$ dont les fibres sont de longueur l, i.e on a la fibration totalement géodésique $l\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^{2n-1} \longrightarrow P^{n-1}(\mathbf{C})$. Or la codimension du cut locus est ici 2, ainsi sa capacité est nulle; les propositions précédentes montrent que si on munit $\mathbf{R}^{2n}$ de la métrique qui en coordonnée polaire s'écrit $dr^2 + r^2 g_{(1+r^2)^{-1}}$ alors cette métrique riemannienne est quasi-isométrique à une métrique conforme à la précédente, et donc cette variété riemannienne a une forme harmonique L^2 non-nulle en degré n. Pour $n = 2$, Escobar-Freire obtiennent, par le calcul, l'existence de cette forme harmonique de plus ils montrent que la courbure sectionnelle de cette variété est positive ([27]).

2.e. L^2 cohomologie et cohomologie deRham.

Proposition 2.9. *Si (M^n,g) est une variété riemannienne complete telle que* $\mathrm{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M)) \neq \{0\}$ *alors* $\mathcal{H}^k(M) \neq \{0\}$ *plus précisement* $\mathrm{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M))$ *s'injecte dans la cohomologie L^2.*

Preuve. On a évidement une application naturelle $H^k_c(M) \longrightarrow \mathcal{H}^k(M)$ qui à une forme fermée à support compacte associé sa classe de cohomologie L^2 ou sa projection orthogonale sur l'espace des formes harmoniques L^2. La proposition affirme que si α est une forme fermée à support compact qui est nulle en cohomologie L^2 alors elle est exacte, ceci découle de [dR, Théorème 24] pour toute forme $\beta \in L^2$, il y a une forme harmonique h, et deux courants S, T tels que $\beta = h + dS + \delta T$, de plus S et T sont lisses là où $\Delta\beta$ est lisse. On applique ceci à α une forme lisse fermée à support compact nul en cohomologie L^2, par hypothèse $T = 0$

puisque α est faiblement fermé, et $h(\alpha) = 0$ donc il existe une forme lisse T telle que $\alpha = dT$. □

Ce résultat a l'application suivante due à M. ANDERSON ([2]): Si (M^n, g) est une variété riemannienne dont la classe d'Euler est non-nulle, alors $\dim \mathcal{H}^n(TM) \geq 1$. En effet, la classe de Thom du fibré est non-nulle et donc $\mathrm{Im}(H^n_c(TM) \longrightarrow H^n(TM)) \neq \{0\}$. Par exemple, le fibré tangent à $\mathbf{S}^{2p}$, $T\mathbf{S}^{2p}$ a une forme harmonique L^2 non-nulle de degré $2p$. Prenons l'exemple du fibré tangent à $\mathbf{S}^2$, on ne sait pas déterminer ses espaces de L^2 cohomologie. Ce fibré a une géométrie intéréssante; en effet, lorsqu'on lui enlève la section nulle, ce fibré à un revêtement double isométrique à $(]0, \infty[\times \mathbf{S}^3, dr^2 + g_{2\pi r})$, où on a noté g_l la métrique de Berger sur $\mathbf{S}^3$ dont les fibres sont de longueur l. Il serait intéressant de comprendre le lien qu'il y a sur ces variétés entre L^2-cohomologie et la géométrie. Par exemple, je conjecture que sur cette variété, l'espace des formes harmoniques L^2 est de dimension finie.

Pour conclure cette partie et ce paragraphe, je vais citer le résultat de ATIYAH-PATODI-SINGER ([4]) qui est le premier résultat liant cohomologie et formes harmoniques L^2.

THÉORÈME 2.10. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne à bouts cylindriques, i.e au dehors d'un compact, elle est isométrique au produit riemannien $(]0, \infty[\times\Sigma, dr^2 + h)$, où h est une métrique riemannienne sur la variété compact Σ alors*

$$\mathcal{H}^k(M) \simeq \mathrm{Im}(H^k_c(M) \longrightarrow H^k(M))\,.$$

Ce résultat est fondamental pour obtenir la formule de la signature d'une variété compacte à bord. Nous allons ensuite montrer comment des outils d'analyse sur les variétés permettent d'obtenir des résultats à propos des questions que nous avons posé à propos des liens entre la géométrie à l'infini, la topologie et les espaces de L^2-cohomologie. Pour cela, nous commençons par décrire un peu les outils d'analyse que nous utiliserons.

3 – Inégalités de Sobolev sur les variétés riemanniennes non-compactes

Dans toute cette partie (M^n, g) est une variété riemannienne complète, non-compacte connexe.

3.a. Qu'est ce qu'une inégalité de Sobolev? Pour cela, il faut des espaces de Sobolev, pratiquement on se limite ici aux espaces L^p et à l'espace H_0^1. Les espaces L^p: ce sont les espaces $L^p(M, dv_g)$ construit à partir de la mesure riemannienne dv_g. Pour p fini, c'est aussi le complété de $C_0^\infty(M)$ pour la norme L^p. Remarquons que si pour une variété compacte ces espaces ne dépendent pas de la métrique, pour une variété non-compacte ce n'est plus le cas, par exemple on a

$$1 \in L^1(M, dv_g) \Leftrightarrow \operatorname{vol} M < \infty\,.$$

Et il est facile de construire sur $\mathbf{R}^2$ des métriques complètes à volume fini ou infini.

Définition 3.1. L'espace $H_0^1(M)$ est le complété de $C_0^\infty(M)$ pour la norme

$$u \mapsto \sqrt{\int_M |du|^2}\,.$$

C'est donc un espace de Hilbert. Remarquons que cet espace est bien défini, puisqu'une fonction à support compact de gradient nul est constante, donc nulle. Cependant cet espace n'est pas toujours un espace de fonctions; par exemple, sur $\mathbf{R}$ muni de la métrique euclidienne, si u est une fonction lisse à support compact qui vaut 1 sur un voisinage de 0 alors la suite de fonction $(t \mapsto u(t/k))_k$ converge vers 0 dans H_0^1 mais vers la fonction constante 1 dans L^1_{loc}; c'est à dire que l'inclusion $C_0^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}$ n'est pas continue pour la norme H_0^1.

Remarque. En fait, l'inclusion $C_0^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow L^1_{\mathrm{loc}}$ est continue si seulement si l'inclusion $C_0^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}$ est continue. En effet, si K est un compact à bord lisse de M et si $\lambda_1(K)$ est la première valeur propre non-nulle pour le problème de Neumann alors on a l'inégalité de Poincaré

$$\lambda_1(K) \int_K u^2 \le \int_K |du|^2 + \frac{1}{\operatorname{vol} K}\Big(\int_K u\Big)^2,\ \forall\, u \in C^\infty(M)\,.$$

D'où on a toujours

$$\|u\|_{L^2(K)} \leq C(K)(\|u\|_{H_0^1(M)} + \|u\|_{L^1(K)}),\ \forall\, u \in C_0^\infty(M)\,.$$

A. Ancona a donné plusieurs caractérisation pour cette continuité ([1]):

Théorème 3.2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) *l'inclusion* $C_0^\infty(\mathbf{R}) \longrightarrow H^1_{\mathrm{loc}}$ *se prolonge par continuité à* $H^1_0(M)$.

b) *Il existe un ouvert borné* U *de* M *et une constante strictement positive* C *telle que*

$$C\Big(\int_U |u|\Big)^2 \leq \int_M |du|^2,\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,.$$

c) *L'équation* $\Delta_y G_x(y) = \delta_x$ *a des solutions positives pour un* (*ou pour tout*) $x \in M$.

d) *Il existe une fonction strictement positive* f *telle que*

$$\int_M f|u|^2 \leq \int_M |du|^2,\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,.$$

Pour les surfaces simplement connexe, celles qui ne vérifient pas l'une de ces conditions sont conformément équivalentes à la sphère ou au plan. C'est pourquoi on nomme les variétés, qui satisfont à l'une des propriétés de ce théorème, non-paraboliques. Terme que l'on préfère à hyperbolique car si $n > 2$, l'espace euclidien vérifie les conditions du théorème. Par exemple, la fonction $\frac{C_n}{|x-y|^{n-2}}$ est une solution positive de l'équation aux dérivées partielles $\Delta_y G_x(y) = \delta_x$. On peut aussi le voir grâce à l'inégalité de Hardy

$$\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \int_{\mathbf{R}^n} u^2(x)\frac{dx}{\|x\|^2} \leq \int_{\mathbf{R}^n} |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\,,$$

i.e. l'inégalité d) est vrai pour la fonction $((n-2)/(2|x|))^2$. C'est pourquoi nous parlerons d'inégalité de Hardy à chaque fois que nous démontrerons une inégalité du type d). Ces inégalités exprime que l'espace $H_0^1(M)$ s'injecte continûment dans un espace L^2 à poids. Ainsi pour nous une inégalité (ou inclusion) de Sobolev est une injection continue de $H_0^1(M)$ dans un “bon” espace de fonctions. Le qualificatif “bon” dépend de l'usage que l'on désire avoir des inégalités. Il se trouve que les inégalités de Hardy sont très facile à obtenir.

3.b. Inégalités de Hardy. Dans [11], j'ai donné une méthode pour en obtenir; cette méthode fournit par exemple, l'inégalité suivante

Théorème 3.3. *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Hardy suivante*

$$\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \int_M \Big(\frac{u}{r}\Big)^2(x)\,dx \le \int_M |du|^2(x) + \frac{n-2}{2}\frac{|k|}{r}u^2\,dx,\ \ \forall u \in C_0^\infty(M)\,,$$

où on a noté $r(x) = \|x - x_0\|$, x_0 étant un point quelconque de $\mathbf{R}^N$.

Ce résultat est à rapprocher de celui de Hoffman-Spruck qui obtenaient une inégalité de Sobolev assez similaire à cette inégalité de Hardy ([30]):

Théorème 3.4. *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique dont le vecteur courbure moyenne est k, alors (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev suivante*

$$c_n\,\Big(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{n}} \le \int_M |dv|^2(x) + |k|^2|v|^2(x)dx,\ \ \forall v \in C_0^\infty(M)\,.$$

Ces deux résultats ont la conséquence suivante sur les sous-variétés minimales:

Corollaire 3.5. *Si $M^n \longrightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion isométrique minimale alors pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^N$, M^n vérifie les inégalités de Sobolev*

$$\Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \int_M \Big(\frac{u}{r}\Big)^2(x)\,dx \le \int_M |du|^2(x)\,dx,\ \ \forall u \in C_0^\infty(M)\,.$$

$$c_n\,\Big(\int_M |v|^{\frac{2n}{n-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{n}} \le \int_M |dv|^2(x),\ \ \forall v \in C_0^\infty(M)\,.$$

La dernière inégalité a été obtenu par MICHAEL-SIMON [36]. Remarquons qu'on ne peut retrouver l'inégalité de Hardy simplement à partir de l'inégalité de Sobolev et de l'inégalité de Hölder. Cette dernière inégalité de Sobolev de type euclidien, permet de faire de l'analyse sur le Laplacien comme on sait le faire sur $\mathbf{R}^n$.

3.c. INÉGALITÉS DE SOBOLEV DE TYPE EUCLIDIENNE. On connait assez bien les propriétés équivalentes à ces inégalités en terme de noyau de la chaleur, d'inégalité de Faber-Krahn...Nous donnons ici uniquement les outils d'analyse qu'implique une telle inégalité de Sobolev

THÉORÈME 3.6. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors pour tout $p > 1,\ s > 0$ tels que $2sp < \nu$ on a

$$C(\mu_\nu, s, p)\|u\|_{L^{\frac{p\nu}{\nu-2ps}}} \leq \|\Delta^s u\|_{L^p},\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,.$$

Et si $s > \nu/p$ alors on a les inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C(\nu, s, r)\mu^{-\theta}\|\Delta u\|^{\theta}_{L^{\frac{r}{2}}}\|u\|^{1-\theta}_{L^{\frac{s}{2}}},\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,,$$

où $\theta = \frac{\nu/s}{1-(\nu/r)+(\nu/s)}$.

Enfin si $(P(t,x,y))_{(t,x,y)\in\mathbf{R}^+\times M\times M}$ est le noyau de la chaleur de (M^n, g) (i.e. le noyau de l'opérateur $e^{-t\Delta}$) alors ce noyau vérifie

$$P(t,x,y) \leq \frac{C}{t^{\frac{\nu}{2}}}\Big(1 + \frac{d^2(x,y)}{t}\Big)^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{d^2(x,y)}{4t}},\ \forall (t,x,y) \in \mathbf{R}^+ \times M \times M\,.$$

La première propriété est due à N. VAROPOULOS dans [42], la seconde à T. COULHON dans [16], la majoration gaussienne du noyau de la chaleur est due à DAVIES-PANG [21], T. COULHON [17], et SIKORA [40].

4 – L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev

Le but de cette partie est de décrire comment on peut obtenir des résultats de finitude pour la dimension de l'espace des formes harmoniques L^2 grâce à une inégalité de Sobolev; et de donner un lien entre topologie, formes harmoniques L^2 et géométrie à l'infini. Tout ceci repose sur la formule de Bochner-Weitzenböck:

4.a. LA FORMULE DE BOCHNER-WEITZENBÖCK. Si $\Delta^k = d\delta + \delta d$ est le Laplacien de Hodge-Rham agissant sur les formes différentielles d'une variété riemannienne complète (M, g); alors nous avons

$$\mathcal{H}^k(M) = \{\alpha \in L^2(\Lambda^k T^* M),\ \Delta^k \alpha = 0\}\,,$$

de plus ce Laplacien admet la décomposition de Bochner-Weitzenbock suivante

$$\Delta^k = \bar{\Delta} + \mathcal{R}^k\,,$$

où $\bar{\Delta}$ est le Laplacien brut, c'est à dire c'est l'opérateur différentiel d'ordre deux symétrique construit à partir de la connexion de Leci-Civita ∇ et de la forme quadratique $\alpha \mapsto \int_M |\nabla \alpha|^2$; autrement dit $\bar{\Delta} = \nabla^* \nabla$, où ∇^* est l'opérateur adjoint à ∇. Et $\mathcal{R}^k$ est un endomorphisme symétrique de $\Lambda^k T^* M$, que l'on peut définir à l'aide de l'opérateur de courbure de (M^n, g) (cf. [28]); par exemple $\mathcal{R}^1$ est l'endomorphisme associé au tenseur de Ricci, et nous avons toujours la minoration $\mathcal{R}^k \geq k(n-k)\rho$, où ρ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de courbure; de plus, on a $|\mathcal{R}^k|(x) \leq c(n)|R|(x)$ où R est le tenseur de courbure de (M, g). Un corollaire de cette formule est le suivant:

PROPOSITION 4.1. *Si (M^n, g) est une variété riemannienne connexe complète de volume infini telle que $\mathcal{R}^k \geq 0$ alors $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.*

PREUVE. En effet, si α est une forme harmonique L^2 de degré k, on peut justifier la formule d'intégration par partie

$$0 = \langle \alpha, \Delta^k \alpha \rangle = \int_M |\nabla \alpha|^2 + \langle \mathcal{R}^k \alpha, \alpha \rangle\,.$$

Ce qui montre que cette forme est forcément parallèle et donc sa norme ponctuelle est constante, l'hypothèse sur le volume implique donc que cette norme est nulle. □

Lorsqu'on suppose que (M^n, g) vérifie une inégalité de Sobolev, on peut alors raffiner cette proposition:

PROPOSITION 4.2. *Si (M^n, g) vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et si on a

$$\|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}} < \mu_\nu^{-1}$$

alors $\mathcal{H}^k(M) = \{0\}$.

PREUVE. Ceci repose sur l'inégalité de Kato i.e. si α est une forme différentielle lisse alors

$$|\nabla\alpha|(x) \geq |d|\alpha||(x)\,.$$

Si α est une k-forme harmonique L^2, on se sert de la formule précédente

$$\int_M |d|\alpha||^2 \leq \int_M |\nabla\alpha|^2 = -\langle \mathcal{R}^k\alpha, \alpha\rangle\,.$$

On utilise alors l'inégalité de Sobolev pour minorer le premier terme et l'inégalité de Hölder pour majorer le dernier terme et on obtient

$$\mu_\nu(M)\|\alpha\|^2_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}} \leq \|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}}\|\alpha\|^2_{L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}}\,,$$

ce qui conclut la preuve de cette proposition. ∎

4.b. UN RÉSULTAT DE FINITUDE. Suivant la philosophie du résultat de J. Lott (th. 1.3), l'intuition laisse supposer que si la courbure est de norme $L^{\nu/2}$ finie et que la variété vérifie la même inégalité de Sobolev alors les espaces de L^2-cohomologie sont de dimension finie. On peut en fait justifier ce raisonement heuristique ([13]):

THÉORÈME 4.3. *Si (M, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

et dont la courbure vérifie

$$\int_M |\mathcal{R}^k|^{\frac{\nu}{2}} < \infty$$

alors l'espace des k-formes harmoniques L^2 est de dimension finie. De plus, on a

$$\dim \mathcal{H}^k(M) \leq \frac{C(\nu)}{\mu_\nu} \int_M |\mathcal{R}^k|^{\frac{\nu}{2}} \ .$$

Avant de commenter ce résultat, nous donnous des exemples de variétés qui satisfont aux hypothèses de ce théorème:

i) Une variété riemannienne complète à courbure nulle au dehors d'un compact et dont le volume des boules géodésiques a un comportement uniformément équivalent à la fonction $(r \mapsto r^n)$ vérifie nos hypothèses pour $\nu = n$; en effet, pour ces variétés notre hypothèse sur la courbure est bien vérifiée, de plus selon T. Coulhon et L. Saloff-Coste, nous savons que pour les variétés à courbure de Ricci positive ou nulle sur un voisinage de l'infini, ce comportement uniforme du volume des boules géodésiques implique cette inégalité de Sobolev (en fait il y a même une équivalence, cf. [18]). Une telle variété a en fait un nombre fini de bout chaqu'un isométrique à un cone $\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(r)/\Gamma$ où $\mathbf{B}^n(r)$ est la boule euclidienne de rayon r et où Γ est un sous-groupe fini de $O(n)$ agissant sans point fixe sur $\mathbf{S}^{n-1}$.

ii) On peut raffiner cet exemple, en supposant que la variété est quasi-isométrique à une telle variété et que la courbure est dans $L^{\frac{n}{2}}$.

iii) Une variété connexe, de volume infini, de dimension n isométriquement plongée dans un espace euclidien dont la seconde forme fondamentale de l'immersion est $n-$intégrable vérifie nos hypothèses pour $\nu = n$. En effet, dans [14], nous avons montré qu'une telle variété vérifie l'inégalité de Sobolev; de plus comme la courbure est majorée par un multiple universel de la seconde forme fondamentale, la courbure d'une telle variété est $n/2$-intégrable. Cependant remarquons que, appliquée à ce cadre, la majoration de la dimension de $\mathcal{H}^k(M)$ ne dit rien, puisque la constante de Sobolev n'est pas calculable à partir de $\int_M |II|^n$.

Les bornes sur la dimension reprennent essentiellement l'idée de P. BÉRARD et G. BESSON; dans [5], ils obtenaient une majoration d'invariants topologiques d'une variété compacte en fonction de la norme $L^{\frac{n}{2}}$ de la courbure. Ces estimées sont dit de CWICKEL-LIEB-ROSENBLJUM, car en 1972, ROSENBLJUM obtient le résultat suivant ([39])

THÉORÈME 4.4. *Soit V une fonction $L^{\frac{n}{2}}$ sur $\mathbf{R}^n$ alors le nombre de valeurs propres strictement négatives de l'opérateur de Schrödinger $\Delta+V$ est majoré par*

$$C_n \int_{\mathbf{R}^n} V_-^{\frac{n}{2}}(x)dx\,,$$

où $V_- = (|V| - V)/2$ est la partie négative de V.

La constante C_n est très importante en mécannique quantique, cf. [33]; elle fut successivement amélioré par CWICKEL ([20]), E. LIEB ([33]) et P. LI- S.T. YAU ([32]).

Je vais maintenant décrire la preuve du théorème 4.3: grâce à l'inégalité de Sobolev et l'inégalité de Kato, on montre que l'opérateur $\bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12}$ est un opérateur continu de L^2 dans lui-même. Où $\bar\Delta^{-\frac12}$ est l'opérateur de L^2 sur H_0^1 définit à l'aide de la formule $\int_M |\nabla\bar\Delta^{-\frac12}\alpha|^2 = \int_M |\alpha|^2$, ceci pour tout $\alpha \in L^2$. On rappelle que l'espace $H_0^1(\Lambda^k T^*M)$ est défini comme étant le complèté de l'espace $C_0^\infty(\Lambda^k T^*M)$ pour la norme $\alpha \mapsto \|\nabla\alpha\|_{L^2}$. De plus, on a la majoration de la norme de cet opérateur

$$\|\bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12}\|_{L^2\to L^2} \le \|\mathcal{R}^k\|_{L^{\frac{\nu}{2}}}/\mu_\nu\,.$$

Ainsi si $\mathbf{1}_R$ est la fonction caractéristique de la boule de centre x_0 fixé et de rayon R alors on a la limite en norme d'opérateur

$$\bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12} = \lim_{R\to\infty} \bar\Delta^{-\frac12}\mathbf{1}_R\mathcal{R}^k\mathbf{1}_R\bar\Delta^{-\frac12}\,.$$

On montre ensuite que les opérateurs $\bar\Delta^{-\frac12}\mathbf{1}_R\mathcal{R}^k\mathbf{1}_R\bar\Delta^{-\frac12}$ sont compacts. Ainsi l'opérateur $\bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12}$ est compact, et donc le noyau de $\mathrm{Id}_{L^2} + \bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12}$ est de dimension finie. On finit la preuve en montrant que l'application suivante

$$\sqrt{\bar\Delta}\,:\,\mathcal{H}^k(M) \longrightarrow \ker\{\mathrm{Id}_{L^2} + \bar\Delta^{-\frac12}\mathcal{R}^k\bar\Delta^{-\frac12}\}\,,$$

est bien définie et est injective.

4.c. Topologie et formes harmoniques L^2. Une fois ce théorème établi, on se pose la question de savoir comment les espaces de formes harmoniques L^2 sont reliés à la topologie de (M^n, g). Nous commençons par un résultat sur le nombre de bouts ([14]).

Proposition 4.5. *Si (M, g) est une variété riemannienne complète qui vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M),$$

alors l'application naturelle $H_c^1(M) \longrightarrow \mathcal{H}^1(M)$ est injective.

Ceci a le corollaire suivant

Corollaire 4.6. *Sous les hypothèses précédentes, si b est le nombre de bouts de M alors on a*

$$\dim \mathcal{H}^1(M) \geq b - 1\,.$$

En particulier, si

$$\int_M |\mathrm{ric}_-|^{\frac{\nu}{2}} < \infty$$

alors M a un nombre fini de bouts.

La preuve de la proposition est presque évidente: si α est une forme fermée à support compact dans D qui est nulle en cohomologie L^2, alors il existe une suite de fonctions $u_l \in C_0^\infty(M)$ telle que $\lim_{l\to\infty} \|\alpha - du_l\|_{L^2} = 0$, l'inégalité de Sobolev

$$\mu_\nu\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,,$$

implique que la suite u_l est de Cauchy dans $L^{\frac{2\nu}{\nu-2}}$ et donc converge vers une fonction u, mais cette fonction u doit vérifier $du = \alpha$. Comme α est à support compact, u est localement constante sur le complémentaire de D; mais le volume des boules géodésiques de la variété est uniformément minoré ([10]) et donc chaque bout de M^n a un volume infini et u est à suppport compact. Et α est cohomologue à 0 pour la cohomologie à support compact.

Remarque. Ceci redémontre le résultat de [9] qui affirme que si M est une sous-variété minimale d'un espace euclidien et si elle a au moins deux bouts elle posséde une fonction harmonique d'énergie de Dirichlet borné.

Ces arguments peuvent être poussés plus loin et l'on obtient ainsi le théorème suivant ([14])

Théorème 4.7. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète, qui pour un $\nu > 4$, vérifie l'inégalité de Sobolev*

$$\mu_\nu(M)\Big(\int_M |u|^{\frac{2\nu}{\nu-2}}(x)dx\Big)^{1-\frac{2}{\nu}} \leq \int_M |du|^2(x)dx,\ \forall u \in C_0^\infty(M)\,,$$

et telle que son tenseur de courbure vérifie $\int_M |R(x)|^{\frac{\nu}{2}}dx < \infty$, alors si D est un ouvert borné (à bord régulier) de M, nous avons la suite exacte

$$..\longrightarrow H^k(D,\partial D)\xrightarrow{\mathrm{i}}\mathcal{H}^k(M)\xrightarrow{\mathrm{j}^*}H^k_{(2)}(M-D)\xrightarrow{\mathrm{b}}H^{k+1}(D,\partial D)\longrightarrow ..$$

Décrivons un peu les homomorphismes i, j*, b: i est l'application naturelle qui à une forme fermée lisse à support compact dans D associe sa classe de L^2-cohomologie, si $[\alpha] \in H^k(D, \partial D)$ alors

$$\mathrm{i}[\alpha] = \alpha \text{ modulo } \overline{dC_0^\infty(\Lambda^{k-1}T^*M)}\,.$$

Puis j* est l'homomorphisme de L^2-cohomologie induit par l'application

$$\mathrm{j} : M - D \longrightarrow M\,.$$

L'homorphisme cobord L^2 est plus "compliqué" à définir: soit $\alpha \in Z_2^k(M-D) \cap C_c^\infty(\Lambda^k T^*(M-D)$, il existe alors une k-forme lisse sur M, $\bar\alpha$, telle que $\bar\alpha = \alpha$ sur $M - D$ et telle que $d\bar\alpha = 0$ sur un voisinage de $M - D$. Alors $d\bar\alpha$ est une forme fermé à support compact dans D et la classe de $d\bar\alpha$ dans $H^{k+1}(D, \partial D) \simeq H_c^{k+1}(D)$ ne dépend que de la classe de L^2 cohomologie de α. Ensuite si $\beta \in Z_2^k(M - D)$, alors on définit $\mathrm{b}[\beta] = [d\bar\alpha]$

où α est n'importe quel représentant lisse de la classe de L^2-cohomologie de β. Ainsi b est la composée de l'application naturelle $H_2^k(M-D) \longrightarrow H^k(M-D)$ et du morphisme de cobord en cohomologie deRham $H^k(M-K) \longrightarrow H_c^{k+1}(D)$.

Remarque. En fait, cette suite est toujours exacte pour la L^2-cohomologie non-réduite. En particulier, lorsque 0 n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham, alors cette suite est vrai, puisque dans ce cas L^2-cohomologie réduite et non-réduite coincident. Par exemple, selon Donnelly-Xavier ([25]), sur une variété à courbure -1 hors d'un compact, de volume fini et de dimension paire, zéro n'est pas dans le spectre essentiel du Laplacien de Hodge-deRham; et donc cette suite exacte a lieu. Cependant les variétés qui satisfont à nos hypothèses ont 0 dans le spectre esssentiel du Laplacien de Hodge-deRham (pourvu que le volume croisse polynômialement).
La preuve de ce théorème repose essentiellement sur deux ingrédients:

Le premier est l'existence d'un noyau de Green i.e. d'un opérateur continu
$$G : L^2(\Lambda T^*M) \longrightarrow H_0^1(\Lambda T^*M)\,,$$
tel que si $\alpha \in L^2(\Lambda T^*M)$ alors
$$\alpha = h(\alpha) + dG(\alpha) + \delta G(\alpha)\,.$$

Le second est le suivant si α est dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Lambda T^*M)$, qui vérifie
$$\Delta^k\alpha = \bar{\Delta}\alpha + \mathcal{R}^k\alpha \in C_0^\infty$$
alors α est L^2.

C'est pour prouver ce second fait que l'hypothèse sur la dimension de l'inégalité de Sobolev apparait. Cette condition est à rapprocher au fait que dans $\mathbf{R}^n$, $n > 4$, l'équation $(\Delta + V)u = 0$, pour V à support compact n'a pas de solution demi-borné. Autrement dit le pôle en $\zeta = 0$ de la résolvante $(\Delta + V - \zeta)^{-1}$ provient uniquement de fonctions propres L^2.

Le premier fait est une conséquence du fait que l'opérateur $(d+\delta)$: $H_0^1(\Lambda T^*M) \longrightarrow L^2(\Lambda T^*M)$ est Fredholm, i.e. son noyau est de dimension finie, son image est fermé et de codimension finie. Ce fait est le début d'une généralisation de ces travaux.

Il y a aussi un autre ingrédient: sous les hypothèses du théorème, la L^2-cohomologie réduite du complémentaire de D est de dimension finie. Pour cela, on identifie, cet espace à un sous-espace des formes harmoniques L^2 sur la variété double $(M-D)\#_{\partial D}(M-D)$. Plus exactement, on a

$$\mathcal{H}^k_n(M-D) \simeq \{\alpha \in \mathcal{H}^k((M-D)\#_{\partial D}(M-D)), \sigma^*\alpha = \alpha\}\,,$$

où σ est la symétrie par rapport à ∂D qui échange les deux parties. A priori, la somme connexe de ces deux copies de $(M-D)$ est uniquement muni d'une métrique Lipschitz, c'est suffisant pour définir l'opérateur δ et donc on peut parler de formes harmoniques. Et comme, les espaces de L^2-cohomologie sont des invariants de quasi-isométries, si on lisse la métrique dans un voisinage de ∂D, la dimension des espaces de formes harmoniques L^2 ne changent pas; la courbure de la variété riemannienne lisse obtenue sera toujours dans $L^{\frac{\nu}{2}}$, et selon [14], l'inégalité de Sobolev aura encore lieu sur cette variété, ainsi le théorème montre que la L^2-cohomologie de cette variété est de dimension finie.

4.d. Formules de Gauss-Bonnet. Cette suite exacte a de nombreuses applications, elles sont décrite dans [14]. La première est la formule suivante pour la caractéristique d'Euler L^2:

Théorème 4.8. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne complète qui vérifie les mêmes hypothèses qu'au théorème* (4.7) *alors si D est un ouvert borné de M on a*

$$\chi_{L^2}(M,g) = \chi(D,\partial D) + \chi_{L^2}(M-D,g)\,.$$

Et un corollaire de cette formule est un théorème de l'indice relatif

Corollaire 4.9. *Soient (M_1^n, g_1) et (M_2^n, g_2) deux variétés riemanniennes complètes qui vérifient les mêmes hypothèses qu'au théorème* (4.7) *alors s'il existe D_1 (resp. D_2) un domaine compact de M_1 (resp. M_2) tel que $(M_1 - D_1, g_1)$ soit isométrique à $(M_2 - D_2, g_2)$ alors*

$$\chi_{L^2}(M_1,g_1) - \chi_{L^2}(M_2,g_2) = \int_{D_1} \Omega^{g_1} - \int_{D_2} \Omega^{g_2}\,.$$

M. Gromov et B. Lawson avaient démontré un tel résultat pour des opérateurs de Dirac sur des variétés non-compactes, complètes dont le potentiel courbure, qui apparait dans la formule de Bochner-Weitzenbock, est uniformément strictement positif sur un voisinage de l'infini ([29]); en fait comme l'a montré H. Donnely, le fait que le bas du spectre essentiel de l'opérateur de Dirac soit strictement positif suffit pour avoir une formule de l'indice L^2-relatif ([24]). Cependant, d'une part les variétés que nous considèrons ont, généralement, un bas du spectre essentiel nul, et d'autre part, lorsque le bas du spectre essentiel du Laplacien de Hodge-Rham est strictement positif, on sait que cette suite est exacte. De ce résultat, nous pouvons en déduire la formule de Gauss-Bonnet L^2 suivante qui généralise les travaux de N. Borisov, W. Müller, R. Schrader et J. Brüning sur les variétés asymptotiquement euclidiennes ([6], [7]):

Théorème 4.10. *Soit* (M^n, g) *une variété riemannienne de dimension* $n \geq 5$ *dont le tenseur de courbure* R *vérifie*

$$\int_M |R(x)|^{\frac{n}{2}} dx < \infty \,,$$

et s'il existe un compact D *de* M *tel que chaque composante connexe de* $M - D$ *soient quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de* $\mathbf{R}^n$ *alors*

$$\chi_{L^2}(M, g) = \int_M \Omega^g \,.$$

En fait, ce résultat est aussi vrai pour $n \geq 3$. Pour prouver ce résultat, il suffit de montrer que si g est une métrique sur $\mathbf{R}^n$ quasi-isométrique à la métrique euclidienne et si $\int_{\mathbf{R}^n} |R^g|^{\frac{n}{2}} < \infty$ alors

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Omega^g = 0 \ .$$

Ceci est en fait une conséquence des travaux de K. Ulhenbeck; dans [41], elle montre que forcément cette intégrale est un entier et que l'on peut déformer "continûment" la connexion de Levi-Civita vers une connexion plate à l'infini; "continûment" veut dire continue pour une topologie qui assure que $\nabla \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \Omega(\nabla)$ est continue et donc reste constant ici.

4.e. Calcul d'espaces de L^2-cohomologie. Une telle suite exacte peut aussi être utile pour calculer la L^2-cohomologie des variétés dont on connait la cohomologie L^2 à l'infini, par exemple

Théorème 4.11. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne connexe de dimension $n \geq 3$ telle qu'il existe un compact D de M tel que chaqu'une des b composantes connexes de $M - D$ soit quasi-isométrique au complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ alors*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^k(M) &\simeq H_c^k(M) \text{ si } 0 \leq k \leq n-2 \\ \mathcal{H}^{n-1}(M) &\simeq H_c^{n-1}(M) \oplus \mathbf{R}^{b-1} \\ \mathcal{H}^n(M) &= \{0\}\,. \end{aligned}$$

Ceci est aussi vrai pour $n \geq 3$, et cela repose sur le calcul de la L^2-cohomologie du complémentaire d'une boule euclidienne de $\mathbf{R}^n$ ([13]):

Lemme 4.12. *Soit $R > 0$ alors si $*$ est l'opérateur de dualité de Hodge, on a*

$$\begin{aligned} H_2^k(\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(R)) &= \{0\} \text{ si } k \neq (n-1) \\ H_2^{n-1}(\mathbf{R}^n - \mathbf{B}^n(R)) &= \mathbf{R}\,\frac{*dr}{r^{n-1}}\,. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Ancona: *Théorie du potentiel sur des graphes et des variétés*, Lectures Notes, **1427**, 1990.

[2] M. Anderson: *L^2-harmonic forms on complete Riemannian manifolds*, Geometry and Analysis on manifolds (Katata/Kyoto, 1987), pp. 1-19, Lectures Notes in Math., **1339**, Springer Berlin-New-York, 1988.

[3] M.F. Atiyah: *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Soc. Math. France, Astérisque, **32, 33** (1976), 43-72.

[4] M.F. Atiyah – V.K. Patodi – I.M. Singer: *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **77** (1975), 43-69.

[5] P. Bérard – G. Besson: *Number of ground states and estimates on some geometric invariants*, J. Funct. Anal., **94**, n.2 (1990), 375-396.

[6] N.V. Borisov – W. Müller – R. Schrader: *Relative index theorems and supersymmetric scattering theory*, Comm. Math. Phys., **114** (1988), 475-513.

[7] J. Brüning: *L^2-index theorems on a certain complete manifold*, J. Differential Geometry, **32** (1990), 491-532.

[8] J. Brüning – M. Lesch: *Hilbert complexes*, J. Funct. Anal., **108** (1992), 88-132.

[9] H.D. Cao – Y. Shen – S. Zhu: *The structure of stable minimal hypersurfaces in* $\mathbf{R}^{n+1}$, Math. Res. Lett., **4** (1997), n° 5, 637-644.

[10] G. Carron: *Inégalités de Faber-Krahn et conséquences*, "Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de M. Berger", collection SMF Séminaires et Congrès, n° 1, 1994.

[11] G. Carron: *Inégalité de Hardy sur les variétés riemanniennes*, J. Math. Pures Appli., **76** (1997), 883-891.

[12] G. Carron: *Inégalités de Sobolev-Orlicz non-uniformes*, Colloq. Math., **77** (1998), n° 2, 163-178.

[13] G. Carron: *L^2-cohomologie et inégalités de Sobolev*, Math. Annalen, **314** (1999), 613-639.

[14] G. Carron: *Une suite exacte en L^2-cohomologie*, Duke Math. J., **95** (1998), no 2, 343-372.

[15] P.E. Connor: *The Neumann problem for differential forms on Riemannian manifold*, Mem. Amer. Math. Soc., n° 20 (1956).

[16] T. Coulhon: *Inégalités de Gagliardo-Nirenberg pour les semigroupes d'opérateurs et applications*, Potential Analysis, **1** (1992), 343-353.

[17] T. Coulhon: *Itération de Moser et estimation Gaussienne du noyau de la chaleur*, Jour. Oper. Th., **29** (1993), 157-165.

[18] T. Coulhon – L. Saloff-Coste: *Isopérimétrie pour les groupes et les variétés*, Rev. Mat. Iberoamericana, **9** (1993), n° 2, 293-314.

[19] G. Courtois: *Sperctrum of manifolds with holes*, J. Funct. Anal., **134** n° 2, (1995), 194-221.

[20] W. Cwikel: *Weak type of estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. Math., **106** (1977), 93-100.

[21] E.B. Davies – M. Pang: *Sharp heat kernel bounds for some Laplace operators*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **40** (1989), 281-290.

[22] G. deRham: *Variétés différentiables*, Herman, Paris, 1960.

[23] J. Dodziuk: *L^2-harmonic form on rotationnaly symmetric Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **77** (1979), 395-400.

[24] H. Donnely: *Essential spectrum and heat kernel*, J. Funct. Anal., **75** (1987), 362-381.

[25] H. Donnely – F. Xavier: *On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifold*, Amer. J. Math., **106** (1984), 169-185.

[26] G. Duff – D.C. Spencer: *Harmonic Tensors on Riemannian Manifolds with boundary*, Ann. of Math. Stud., **56** n° 1 (1952), 115-127.

[27] J.S. Escobar – A. Freire: *The differential form spectrum of manifold of positive curvature*, Duke J. Math., **69** (1993), 1-42.

[28] S. Gallot – D. Meyer: *Opérateur de courbure et laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne*, J. Math. Pures Appli., **54** (1975), 259-284.

[29] M. Gromov – H.B. Lawson. Jr: *Positive scalar curvature and the Dirac operator on a complete Riemannian manifold*, Publ. Math. I.H.E.S., **58** (1983), 83-196.

[30] D. Hoffman – J. Spruck: *Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974), 7156-727.

[31] A. Huber: *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13-72.

[32] P. Li – S.T. Yau: *On the schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Comm. Math. Phys., **88** (1983), n° 3, 309-318.

[33] E. Lieb: *The number of bound states of one-body schrödinger operator and the Weyl problem*, Proc. Sym. Pure Math., **36** (1980), 241-252.

[34] J. Lott: *L^2-cohomologie of geometrically infinite hyperbolic 3-manifolds*, Geom. Funct. Anal., **7** (1997), 81-119.

[35] R. Mazzeo: *The Hodge cohomology of a conformally compact metric*, J. Differential Geom., **28** n° 2 (1988), 309-339.

[36] J. Michael – L. Simon: *Sobolev and mean value inequalities on generalized submanifold of $\mathbf{R}^n$*, Comm. Pure Appl. Math., **26** (1973), 361-379.

[37] J. Musielak: *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, L. N. in Math n° 1034, Springer, 1983.

[38] J. Roe: *An index theorem on open manifolds I, II*, J. Differential Geometry, **27** (1988), 87-113, 115-136.

[39] G. Rosenbljum: *Distribution of the discrete spectrum of singular operator*, Dokl. Aka. Nauk SSSR, **202** (1972), 1012-1015.

[40] A. Sikora: *Sharp pointwise estimates on heat kernels*, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, **47** (1996), 371-382.

[41] K. Uhlenbeck: *The Chern-Classes of Sobolev connections*, Comm. Math. Phys., **101** (1985), 449-457.

[42] N. Varopoulos: *Hardy-Littlewood theory for semigroups*, J. Funct. Anal., **63** n° 2 (1985), 240-260.

Lavoro pervenuto alla redazione il 17 maggio 1999
ed accettato per la pubblicazione il 9 novembre 1999.
Bozze licenziate il 20 febbraio 2001

Indirizzo dell'Autore:

Carron Gilles – Département de Mathematiques, O.M.R. 6629 – Université de Nantes – BP 92208 – 2 rue de la Houssinière 44322 Nantes – Cedex 3 – France
E-mail: Gilles.Carron@math.univ.nantes.fr