Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 23, Roma (2003), 131-161

Fonctions finement biharmoniques dans un espace biharmonique

C. BENSOUDA – M. EL KADIRI – I. ROUCHDI

ABSTRACT: *We define and study a theory of finely biharmonic functions in a fine domain of a biharmonic space in the sense of Smyrnelis satisfying the axion D*

1 – Introduction

En théorie classique du Potentiel dans $\mathbb{R}^n$, la topologie fine a été définie par H. Cartan en 1940 comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions surharmoniques. Cette topologie a été ensuite étendue au cadre des diverses théories axiomatiques du Potentiel et aux théories du Potentiel des processus de Markov.

La théorie du balayage des mesures a permis à FUGLEDE de développer et étudier dans [12] une théorie des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin (i.e., ouvert au sens de la topologie fine) d'un espace harmonique de Bauer X vérifiant l'axiome de domination (ou Axiome (D)), généralisant la notion classique de fonction harmonique dans un ouvert ordinaire de X.

SMYRNELIS [19], [20] a développé une théorie axiomatique des fonctions biharmoniques s'appliquant à un opérateur obtenu par couplage de

KEY WORDS AND PHRASES: *Harmonic and biharmonic space – Finely harmonic and superharmonic function – Finely biharmonic function – Fine open set.*
A.M.S. CLASSIFICATION: 31B30 – 31D05

deux opérateurs différentiels L_1 et L_2 du second ordre elliptiques ou paraboliques dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, et a montré qu'on peut étendre à ce nouveau cadre les méthodes et les résultats de la théorie classique ou axiomatique des fonctions harmoniques. Dans cette théorie un espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ est la donnée d'un espace localement compact X muni d'un faisceau d'espaces vectoriels de couples de fonctions réelles continues sur les ouverts de X vérifiant certains axiomes. A un tel espace sont associés deux espaces harmoniques de Bauer $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$.

Bouleau [4] a ensuite montré que dans la théorie de Smyrnelis les couples hyperharmoniques ≥ 0 sont exactement les couples excessifs d'une résolvante triangulaire de noyaux boréliens sur l'espace de base. Boboc et Bucur [2] ont montré que ces couples s'identifient aussi aux fonctions excessives d'une famille résolvante de noyaux sur l'espace $X \oplus X$.

Dans [11], le deuxième auteur a introduit et étudié la notion de fonction finement biharmonique dans un ouvert fin de la théorie classique du Potentiel dans $\mathbb{R}^n$. Outre le fait qu'elle soit l'extension naturelle de la notion de fonction biharmonique aux ouverts fins, l'intérêt de cette notion réside aussi dans le problème d'approximation des fonctions continues sur un compact K par les restrictions à K de fonctions biharmoniques aux voisinages de K.

Notre but dans ce travail est d'étendre les résultats de [11] au cadre d'un espace biharmonique de Smyrnelis dont les espaces harmoniques associés admettent la même topologie fine.

Les notations utilisées dans tout ce travail seront identiques à celles des travaux de Fuglede et Smyrnelis cités dans la bibliographie, auxquels on renvoie pour plus de détails.

2 – Mesures biharmoniques

Tout au long de ce travail nous utilisons la théorie locale des fonctions biharmoniques telle qu'elle est présentée par Smyrnelis dans [19] et [20], dont nous rappelons ici quelques résultats nécessaires aux développements qui suivent.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique au sens de [19] d'espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$. On note $\mathcal{U}^+(X)$ le cône des couples hyperharmoniques positifs sur X. Par le mot fonction on entendra toujours, sauf mention expresse du contraire, une fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'ordre sur l'ensemble des couples de fonctions sur un ensemble M est l'ordre produit usuel:

$$(f, g) \leq (h, k) \iff f \leq h \text{ et } g \leq k,$$
$$(f, g) < (h, k) \iff f < h \text{ et } g < k;$$

on écrira aussi $(h, k) \geq (f, g)$ (resp. $(h, k) > (f, g)$) au lieu de $(f, g) \leq (h, k)$ (resp. $(f, g) < (h, k)$). Si $(f, g) \geq (0, 0)$, (resp. $(f, g) > (0, 0)$) on écrira tout simplement $(f, g) \geq 0$ (resp. $(f, g) > 0$). Soient $F = (f, g)$ et $G = (h, k)$ deux couples de fonctions; on pose $\min(F, G) = (\min(f, h), \min(g, k))$ (resp. $\max(F, G) = (\max(f, h), \max(g, k))$), où, pour deux fonctions u et v, la fonction habituellement notée $\min(u, v)$ (resp. $\max(u, v)$) est définie par $\min(u, v)(x) = \min(u(x), v(x))$ (resp. $\max(u, v)(x) = \max(u(x), v(x))$).

Pour tout couple $\Phi = (f, g)$ de fonctions sur X, et toute partie E de X, on note Φ^E le couple réduit du couple Φ sur E. On rappelle que ce couple est défini par

$$\Phi^E = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}^+(X); (u, v) \geq \Phi \text{ sur } E\},$$

où l'inf est pris au sens de l'ordre produit. Le couple balayé de Φ sur E est noté $\widehat{\Phi}^E$ et défini par $\widehat{\Phi}^E = (\widehat{\Phi}_1^E, \widehat{\Phi}_2^E)$, où, pour une fonction h sur X, $\widehat{h}$ désigne la régularisée s.c.i. de h, i.e. la plus grande minorante s.c.i. de h dans X. On remarquera que l'on a $\Phi^E = (\Phi^+)^E$, où $\Phi^+ = \max(\Phi, 0)$.

Si f est une fonction définie sur une partie A de X, on note ${}^jR_f^A$ et ${}^j\widehat{R}_f^A$, $j = 1, 2$, respectivement la réduite et la balayée de f sur A dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.

Si A est une partie de X, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans le compactifié d'Alexandroff de X.

Comme en théorie des espaces harmoniques, c'est la notion de balayée d'un couple de mesures qui va nous permettre de définir la notion de couples finement hyperharmoniques, surharmoniques ou harmoniques. A cet effet, nous rappelons le résultat suivant [20, Théorème 7.11 et Théorème 7.12]:

Théorème 2.1. *Pour tout couple (σ, τ) de mesures de Radon positives sur X et toute partie E de X, il existe trois mesures de Radon* *positives σ^E, ς^E et τ^E sur X telles que, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, on ait*

$$\int^* \widehat{P}_1^E d\sigma = \int^* p d\sigma^E + \int^* q d\varsigma^E,$$
$$\int^* \widehat{P}_2^E d\tau = \int^* q d\tau^E,$$

où $\widehat{P}^E = (\widehat{P}_1^E, \widehat{P}_2^E)$.

Lorsque $\sigma = \tau = \epsilon_x, x \in X$, on notera les mesures σ^E, ς^E et τ^E correspondantes dans le théorème précédent par $\sigma_x^E, \varsigma_x^E$ et τ_x^E respectivement. Ce sont ces mesures qui permettent de définir les notions de couples finement harmoniques et finement hyperharmoniques.

On note $\mathcal{P}(X)$ (resp. $\mathcal{P}_1(X)$, resp. $\mathcal{P}_2(X)$) le cône des $\mathcal{H}$- (resp. $\mathcal{H}_1$-, resp. $\mathcal{H}_2$-) potentiels et on pose

$$\mathcal{P}_2'(X) = \{q \in \mathcal{P}_2(X) | \exists p \in \mathcal{P}_1(X) : (p, q) \in \mathcal{P}(X)\}.$$

Lemme 2.2. *Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort. Alors, tout $\mathcal{H}_2$-potentiel q est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{P}_2'(X)$.*

Démonstration. Soit (p', q') un $\mathcal{H}$-potentiel tel que $p' > 0$ et $q' > 0$. Il est facile de vérifier que la suite (q_n) définie par $q_n = \min(q, nq')$ répond aux conditions du lemme.

Dans toute la suite de ce travail $(X, \mathcal{H})$ est un espace biharmonique fort au sens de Smyrnelis dont les espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ vérifient l'axiome (D) et admettent la même topologie fine, qu'on appelera topologie fine de X. Les ouverts de cette topologie seront appelés les ouverts fins de X. On utilisera le mot fin (finement) pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celle relatives à la topologie initiale. Pour toute partie A de X, on note $\widetilde{A}$ et $\partial_f A$ l'adhérence fine de A et la frontière fine de A, c'est-à-dire au sens de la topologie fine.

Exemple. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On note $\mathcal{H}_\Delta$ le faisceau biharmonique défini sur Ω par le Laplacien:

$$\mathcal{H}_\Delta(\omega) = \{(u, v) \in [\mathcal{C}^2(\omega)]^2 : \Delta u = -v, \Delta v = 0\},$$

pour tout ouvert ω de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est un espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont identiques à l'espace harmonique classique défini par l'opérateur de Laplace sur Ω. On rappelle d'après [10] que l'espace biharmonique $(\mathbb{R}^n, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort si et seulement si $n \geq 5$. Par contre, si Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort pour tout $n \geq 1$.

PROPOSITION 2.3. *Pour tout ouvert fin ω de X, et tout $x \in \omega$, on a $\sigma_x^{C\omega} = \epsilon_x^{1,C\omega}$ et $\tau_x^{C\omega} = \epsilon_x^{2,C\omega}$, où $\epsilon_x^{j,C\omega}$, $j = 1, 2$, est la balayée de la mesure ϵ_x sur $C\omega$ dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.*

DÉMONSTRATION. En appliquant le théorème précédent aux couples $P = (p, 0)$, où p est un $\mathcal{H}_1$-potentiel quelconque sur X, on voit que $\sigma_x^{C\omega} = \epsilon_x^{1,C\omega}$. Pour établir l'égalité $\tau_x^{C\omega} = \epsilon_x^{2,C\omega}$, il suffit d'utiliser le lemme précédent en observant que pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, la fonction $\widehat{P}_2^E$ n'est autre que la balayée de q sur E dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_2)$.

REMARQUE. Plus généralement, si σ et τ sont deux mesures de Radon ≥ 0 sur X et si $E \subset X$, les mesures σ^E et τ^E ne sont autres que les balayées des mesures σ et τ relativement aux espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$.

Il est bien connu que pour tout ouvert fin ω de X, les mesures $\epsilon_x^{1,C\omega}$ et $\epsilon_x^{2,C\omega}$ sont portées par $\partial_f \omega$ (voir [12]). Donc, d'après la proposition précédente, les mesures $\sigma_x^{C\omega}$ et $\tau_x^{C\omega}$, $x \in \omega$, sont portées par $\partial_f \omega$.

Soit ω un ouvert fin de X. Pour tout $x \in \omega$, on pose $\mu_x^\omega = \sigma_x^{C\omega}$, $\nu_x^\omega = \varsigma_x^{C\omega}$ et $\lambda_x^\omega = \tau_x^{C\omega}$.

DÉFINITION 2.4. Soient ω un ouvert fin de X. Pour tout $x \in \omega$, le triplet de mesures $(\mu_x^\omega, \nu_x^\omega, \lambda_x^\omega)$ est appelé le triplet des mesures biharmoniques de ω au point x.

REMARQUE. Si ω est un ouvert $\mathcal{H}$-régulier de X et si $x \in \omega$, les mesures μ_x^ω, ν_x^ω et λ_x^ω, ne sont rien d'autres que les mesures biharmoniques habituelles de ω au point x (voir [19]).

Pour quelques propriétés des mesures biharmoniques, utiles pour la suite, nous avons besoin de rappeler deux résultats dûs à BOULEAU [4]:

Théorème 2.5. *Il existe un noyau borélien unique $\mathcal{V}$ sur X ayant les propriétés suivantes*:

i) *Pour toute fonction finie continue $\varphi \geq 0$ à support compact sur X, la fonction $\mathcal{V}(\varphi)$ est $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0, finie, continue et $\mathcal{H}_1$-harmonique dans le complémentaire du support de φ.*

ii) *Pour toute fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ sur X, $\mathcal{V}(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.*

On rappelle (voir [21]) que la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ dans X est la plus petite fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique $u \geq 0$ telle que le couple $(u, v) \in \mathcal{U}^+(X)$; elle est donnée par

$$u = \widehat{\inf}\{s : (s, v) \in \mathcal{U}^+(X)\}.$$

Remarque. Si f est une fonction borélienne ≥ 0 sur X, alors $\mathcal{V}(f)$ est $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0 dans X.

Théorème 2.6. *Avec les notations du théorème précédent, on a, pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{U}^+(X)$,*

$$\mathcal{V}(v) \prec u,$$

i.e. il existe une fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique $t \geq 0$ telle que $u = \mathcal{V}(v) + t$.

On va maintenant appliquer les Théorèmes 2.5 et 2.6 pour le calcul du couple balayé sur une partie A de X d'un couple $\Phi = (u, v) \in \mathcal{U}^+(X)$ au moyen du balayage relativement aux espaces harmoniques $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$.

Dans la suite, si s et t sont deux fonctions $\mathcal{H}_1$- surharmoniques ≥ 0 telles que $s \prec t$, on note $t - s$ la fonction u $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0 telle que $t = u + s$.

Proposition 2.7. *Pour tout couple $\mathcal{H}$-surharmonique $(s, t) \geq 0$ dans X et toute partie A de X, on a*

$$\widehat{(s,t)}^A = ({}^1\widehat{R}^A_{s-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}^A_t)} + \mathcal{V}({}^2\widehat{R}^A_t), {}^2\widehat{R}^A_t).$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'on a

$$\widehat{(s,t)}^A = (\widehat{\inf}\{u : u \geq s \text{ sur } A, (u, {}^2\widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)\}, {}^2\widehat{R}_t^A).$$

Or, pour tout couple $(u, {}^2\widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)$, on a, d'après le Théorème 2.6,

$$u = \mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A) + r$$

où r est une fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0. D'autre part, comme $(s, {}^2\widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)$, on a, d'après le Théorème 2.6,

$$s = \mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A) + k,$$

où k est une fonction $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0 dans X. On en déduit que

$$\widehat{(s,t)}^A = (\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A) + {}^1\widehat{R}_k^A, {}^2\widehat{R}_t^A)\,,$$

d'où le résultat.

Corollaire 1. *Pour tout couple $\mathcal{H}$-surharmonique $(s,t) \geq 0$ dans X et toutes les parties A et B de X telles que $A \subset B$, on a*

$$\widehat{(\widehat{(s,t)}^A)}^B = \widehat{(s,t)}^A.$$

Démonstration. On a, d'après la Proposition 2.7,

$$\widehat{(s,t)}^A = ({}^1\widehat{R}^A_{s-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A)} + \mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A), {}^2\widehat{R}_t^A).$$

En utilisant les relations ${}^1\widehat{R}^B_{{}^1\widehat{R}_u^A} = {}^1\widehat{R}_u^A$ et ${}^2\widehat{R}^B_{{}^2\widehat{R}_v^A} = {}^2\widehat{R}_v^A$ pour u $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0 et v $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 qui découlent aussitôt du Théorème 9.1.1 et du Corollaire 9.2.3 de [7], on obtient

$$\widehat{(\widehat{(s,t)}^A)}^B = \widehat{(s,t)}^A.$$

Corollaire 2. *Soient ω un ouvert fin de X et $x \in \omega$. Alors la mesure ν_x^ω est portée par la base $b(C\omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème 2.1, on a, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$ dans X et tout $x \in \omega$,

$$\widehat{P}_1^{C\omega}(x) = \int^* p d\mu_x^\omega + \int^* q d\nu_x^\omega.$$

Comme $\widehat{\widehat{P}^{C\omega}}^{C\omega} = \widehat{P}^{C\omega}$, on a aussi, toujours d'après le Théorème 2.1,

$$\widehat{P}_1^{C\omega}(x) = \int^* \widehat{P}_1^{C\omega} d\mu_x^\omega + \int^* \widehat{P}_2^{C\omega} d\nu_x^\omega.$$

Comme $\widehat{P}_2^{C\omega} = {}^2\widehat{R}_q^{C\omega}$ en vertu du corollaire précédent, on en déduit que

$$\int (q - {}^2\widehat{R}_q^{C\omega}) d\nu_x^\omega = 0,$$

soit

$$\int^* q d\nu_x^\omega = \int^* {}^2\widehat{R}_q^{C\omega} d\nu_x^\omega,$$

pour tout $q \in \mathcal{P}'_2(X)$. D'où, d'après le Lemme 2.2,

$$\int^* q d\nu_x^\omega = \int^* {}^2\widehat{R}_q^{C\omega} d\nu_x^\omega$$

pour tout $\mathcal{H}_2$-potentiel q dans X. En prenant q strict, ceci montre bien que ν_x^ω est portée par $b(C\omega)$, grâce à [7, Proposition 7.2.2].

Comme $b(C\omega) \subset \partial_f \omega$, on déduit du corollaire précédent que, pour tout $x \in \omega$, la mesure ν_x^ω est portée par $\partial_f \omega$.

Proposition 2.8. *Soit ω un ouvert fin de X. Alors, pour tout $x \in \omega$, la mesure ν_x^ω ne charge pas les ensembles $\mathcal{H}$-polaires.*

Démonstration. Soit $x \in \omega$. Comme la mesure ν_x^ω est portée par $\partial_f \omega$, il suffit de montrer que ν_x^ω ne charge pas les $\mathcal{H}$-polaires contenus dans $\partial_f \omega$. Soit A un ensemble $\mathcal{H}$-polaire $\subset \partial_f \omega$, on peut trouver un $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$ dans X tel que $p = q = +\infty$ sur A et $p(x) < +\infty$. On a alors $\int q d\nu_x^\omega \leq p(x) < +\infty$, d'où $\nu_x^\omega(A) \leq \nu_x^\omega(\{q = +\infty\}) = 0$.

3 – Couples finement hyperharmoniques et couples finement biharmoniques

On désigne par f-lim et f-lim inf respectivement les limites fine et fine inférieure, c'est-à-dire au sens de la topologie fine. Pour un couple $F = (u, v)$ de fonctions sur U, on note f-lim $\inf_{x\to y} F(x)$ le couple (f-lim $\inf_{x\to y} u(x)$,f-lim $\inf_{x\to y} v(x)$).

On rappelle d'abord qu'une fonction u sur un ouvert fin U de X est dite $\mathcal{H}_j$-finement hyperharmonique dans U, $j = 1, 2$, si u est finement s.c.i., à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si la topologie fine induite sur U admet une base $\mathcal{B}$ formée d'ouverts fins ω tels que $\widetilde{\omega} \subset U$ et

$$u(x) \geq \int^* u d\epsilon_x^{j,C\omega}$$

pour tout $x \in \omega$ ([12, p. 67]).

Par analogie avec cette définition on pose la

DÉFINITION 3.1. Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est dit finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U si u et v sont finement s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si on peut trouver une base $\mathcal{B}$ d'ouverts de la topologie fine dans U formée d'ouverts fins ω de X tels que $\widetilde{\omega} \subset U$ et

$$u(x) \geq \int^* u d\mu_x^\omega + \int^* v d\nu_x^\omega, \ v(x) \geq \int^* v d\lambda_x^\omega$$

pour tout $x \in \omega$.

Ces inégalités sont appelées inégalités de la moyenne.

La définition a bien un sens puisque, pour tout $x \in \omega$, les mesures μ_x^ω, ν_x^ω et λ_x^ω sont portées par $\partial_f\omega$ et ne chargent pas les polaires.

On note $\mathcal{U}_f(U)$ l'ensemble des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques dans un ouvert fin U de X, et $\mathcal{U}_f^+(U)$ celui des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U.

Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est dit finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U si le couple $(-u, -v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

DÉFINITION 3.2. Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dit finement $\mathcal{H}$-harmonique (ou simplement finement biharmonique) dans U si (u, v) est à la fois finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique et finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique.

On dit qu'un $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$ dans X est semi-borné si les potentiels p et q sont semi-bornés.

Théorème 3.3. *Soit (f, g) un couple de fonctions finement s.c.i. sur $\widetilde{U}$ et finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U. Si de plus il existe un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné $P = (p_1, p_2)$ dans X tel que $(f, g) \geq -P$, alors on a $(f(x), g(x)) \geq (\int^* f d\mu_x^U + \int^* g d\nu_x^U, \int^* g d\lambda_x^U)$ pour tout $x \in U$ où P est fini.*

Démonstration. Il suffit d'adapter aux couples la démonstration du Théorème 9.4 de [12].

Corollaire 1. *Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U si et seulement si u et v sont finement s.c.i. $> -\infty$, et si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\widetilde{\omega} \subset U$, sur lequel u et v sont bornées inférieurement, et tout $x \in \omega$, on a*

$$u(x) \geq \int^* u d\mu_x^\omega + \int^* v d\nu_x^\omega, \ v(x) \geq \int^* v d\lambda_x^\omega.$$

Corollaire 2. *Un couple (u, v) de fonctions finement continues sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ est finement harmonique dans U si et seulement si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\widetilde{\omega} \subset U$, sur lequel u et v sont bornées, et tout $x \in \omega$, on a*

$$u(x) = \int u d\mu_x^\omega + \int v d\nu_x^\omega, \ v(x) = \int v d\lambda_x^\omega.$$

On déduit aussi du Théorème 3.3 les propriétés suivantes des couples finement hyperharmoniques:

1. L' ensemble $\mathcal{U}_f(U)$ est un cône convexe de sommet 0:

i) $\forall u, v \in \mathcal{U}_f(U)$, $u + v \in \mathcal{U}_f(U)$,

ii) $\forall u \in \mathcal{U}_f(U), \forall \lambda \geq 0$ fini, $\lambda u \in \mathcal{U}_f(U)$.

iii) De plus, le cône $\mathcal{U}_f(U)$ est inf-stable, c'est à dire,

$$\forall F, G \in \mathcal{U}_f(U), \min(F, G) \in \mathcal{U}_f(U).$$

$\mathcal{U}_f^+(U)$ a les mêmes propriétés.

2. Si U_1 et U_2 sont des ouverts fins de X tels que $U_1 \subset U_2$ et si $F = (u, v) \in \mathcal{U}_f(U_2)$, alors $F|_{U_1} = (u|_{U_1}, v|_{U_1}) \in \mathcal{U}_f(U_1)$.
3. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts fins de X et si F est un couple de fonctions sur $U = \cup_{i\in I} U_i$ tel que $F|_{U_i} \in \mathcal{U}_f(U_i)$ pour tout $i \in I$, alors $F \in \mathcal{U}_f(U)$.

Ces propriétés de faisceau en topologie fine, vraies aussi pour les couples finement biharmoniques, permettent, quitte à se restreindre aux composantes finement connexes de l'ouvert fin U, de se ramener au cas où U est un domaine fin que l'on fixera dans la suite. On rappelle que la topologie fine est localement connexe (voir [12, corollaire du Théorème 9.11]). Quitte à ajouter à U l'ensemble polaire des points irréguliers de sa frontière fine, on le supposera, grâce au principe de prolongement par continuité fine, régulier (donc un K_σ de X).

Lemme 3.4. *Soit (h, k) un couple biharmonique ≥ 0 dans X et ω un ouvert fin relativement compact de X. Alors on a*

$$h(x) = \int h d\mu_x^\omega + \int k d\nu_x^\omega,$$

et

$$k(x) = \int k d\lambda_x^\omega,$$

pour tout $x \in \omega$.

Démonstration. D'après la Proposition 2.7, on a

$$\widehat{(h,k)}^{C\omega} = ({}^1\widehat{R}^{C\omega}_{h-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}^{C\omega}_k)} + \mathcal{V}({}^2\widehat{R}^{C\omega}_k), {}^2\,\widehat{R}^{C\omega}_k).$$

Or les fonctions $h - \mathcal{V}(k)$ et k sont respectivement $\mathcal{H}_1$-harmonique et $\mathcal{H}_2$-harmonique dans X, donc ${}^2\widehat{R}^{C\omega}_k = k$ et ${}^1\widehat{R}^{C\omega}_{h-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}^{C\omega}_k)} = h - \mathcal{V}(k)$, d'où $\widehat{(h,k)}^{C\omega} = (h, k)$ et le lemme découle alors du Théorème 2.1 et de la Proposition 2.3.

Corollaire. *Soit (h, k) un couple biharmonique dans un ouvert Ω de X pour la topologie initiale. Alors (h, k) est finement biharmonique dans Ω.*

Théorème 3.5. *Soient Ω un ouvert de X pour la topologie initiale et (u, v) un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω. Alors (u, v) est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω.*

Démonstration. Les fonctions u et v sont s.c.i., donc finement s.c.i. dans Ω. Ces fonctions sont aussi localement bornées inférieurement. Quitte à se placer localement on peut donc supposer qu'il existe un couple biharmonique $(h, k) > 0$ dans Ω tel que $(u, v) + (h, k) \geq 0$. Soit ω un ouvert fin tel que $\widetilde{\omega} \subset \Omega$ et sur lequel u et v sont bornées inférieurement et soit $x \in \omega$, alors on a

$$\begin{aligned} u(x) + h(x) = \int^* (u+h) d\epsilon_x \geq \\ \geq \int^* (u+h) d\mu_x^\omega + \int^* (v+k) d\nu_x^\omega. \end{aligned}$$

Or on a d'après le lemme précédent

$$h(x) = \int h d\mu_x^\omega + \int k d\nu_x^\omega,$$

et

$$k(x) = \int k d\lambda_x^\omega,$$

d'où

$$u(x) \geq \int^* u d\mu_x^\omega + \int^* v d\nu_x^\omega.$$

La fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique d'après [12, Théorème 9.8]. On en déduit que le couple (u, v) est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans Ω.

Les quatres propositions qui suivent résultent immédiatement de la Définition 3.1 et de celle des fonctions finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques.

Proposition 3.6. *Soit $\{(u_n, v_n)\}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U}_f(U)$. Alors $(\sup_n u_n, \sup_n v_n) \in \mathcal{U}_f(U)$.*

Proposition 3.7. *Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$, et soit v' une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans U. Si $v' \leq v$, alors $(u, v') \in \mathcal{U}_f(U)$.*

Proposition 3.8. *Soient u et v deux fonctions respectivement finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique et $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. Alors $(u,0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $(+\infty, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.*

Proposition 3.9. *Soit $(u,v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$. Alors les fonctions u et v sont respectivement finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique et $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans U. En particulier le couple $(u,0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.*

Corollaire. *Pour tout couple $(u,v) \in \mathcal{U}_f(U)$, les fonctions u et v sont finement continues dans U.*

Démonstration. Quitte à se placer finement localement et ajouter à (u,v) un couple biharmonique $(h,k) > 0$, on peut supposer $(u,v) \geq 0$. D'après la Proposition 3.9, les fonctions u et v sont respectivement finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique et $\mathcal{H}_2$- hyperharmonique, donc finement continues.

Proposition 3.10. *Soient V un ouvert fin contenu dans U, $(u_1, v_1) \in \mathcal{U}_f(U)$ et $(u_2, v_2) \in \mathcal{U}_f(V)$ tels que*

$$\mathrm{f-}\liminf_{x \to y} (u_2, v_2)(x) \geq (u_1(y), v_1(y)), \forall y \in \partial_f V \cap U.$$

Alors le couple (u,v) défini par

$$(u,v)(x) = \begin{cases} \min((u_1, v_1), (u_2, v_2))(x) \text{ si } x \in V, \\ (u_1, v_1)(x) \text{ si } x \in U \setminus V \end{cases}$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Démonstration. On adapte aux couples la démonstration du Lemme 10.1 de [12].

Soit $\mathcal{S}_2'(U)$ le cône des fonctions finement $\mathcal{H}_2$-surharmoniques positives majorées par un élément de $\mathcal{P}_2'(X)$.

Lemme 3.11. *Tout $v \in \mathcal{S}_2'(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante $(p_n - {}^2\widehat{R}_{p_n}^{CU})$, où (p_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}_2'(X)$.*

Démonstration. Le lemme résulte immédiatement du Théorème 3 de [14].

Lemme 3.12. *Toute fonction v finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans U est l'enveloppe supérieure d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}_2'(U)$.*

Proposition 3.13. *Pour toute fonction v finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans U et tout ouvert fin $\omega \subset \widetilde{\omega} \subset U$, le couple $(\int^* v d\nu_\cdot^\omega, \int^* v d\lambda_\cdot^\omega)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans ω.*

Démonstration. D'après les lemmes précédents, il suffit de démontrer la proposition lorsque v est de la forme $(q - {}^2\widehat{R}_q^{CU})$ où q est un élément de $\mathcal{P}_2'(X)$. Soit $q \in \mathcal{P}_2'(X)$ et p un $\mathcal{H}_1$-potentiel fini continu tel que $P = (p, q)$ soit un $\mathcal{H}$-potentiel fini continu dans X. On a, dans ω,

$$(\widehat{\widehat{P}_1^{CU}, \widehat{P}_2^{CU}})^{C\omega} = \left(\int^* \widehat{P}_1^{CU} d\mu_\cdot^\omega + \int^* \widehat{P}_2^{CU} d\nu_\cdot^\omega, \int^* \widehat{P}_2^{CU} d\lambda_\cdot^\omega\right).$$

Pour compléter la preuve, il suffit d'utiliser les identités $(\widehat{\widehat{P}_1^{CU}, \widehat{P}_2^{CU}})^{C\omega} = (\widehat{P}_1^{C\omega}, \widehat{P}_2^{C\omega})$ et $\widehat{P}_2^{CU} = {}^2\widehat{R}_q^{CU}$, et le fait que ${}^2\widehat{R}_q^{CU}$ est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans ω.

Corollaire 1. *Soient $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et ω un ouvert fin régulier tel que $\widetilde{\omega} \subset U$. Alors le couple de fonctions*

$$\left(\int^* u d\mu_\cdot^\omega + \int^* v d\nu_\cdot^\omega, \int^* v d\lambda_\cdot^\omega\right)$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans ω.

Corollaire 2. *Soient $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et ω un ouvert fin régulier tel que $\widetilde{\omega} \subset U$. Alors le couple de fonctions $(u, v)_\omega$ défini par*

$$(u, v)_\omega = \begin{cases} \left(\int^* u d\mu_\cdot^\omega + \int^* v d\nu_\cdot^\omega, \int^* v d\lambda_\cdot^\omega\right) & \text{dans } \omega, \\ (u, v) & \text{dans } U \setminus \omega \end{cases}$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Démonstration. Comme le couple (u, v) est ≥ 0, les fonctions u et v sont finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U d'après la Proposition 3.9. Il en résulte alors d'après [12, Théorème 14.6 et Théorème 14.7] que l'on a $f\!-\!\liminf_{x\to y}(\int^* u d\mu_x^\omega + \int^* v d\nu_x^\omega) \geq u(x)$ et $f\!-\!\liminf_{x\to y}(\int^* v d\lambda_x^\omega) \geq v(y)$ pour tout $y \in \partial_f\omega$ (on rappelle que $\mu_x^\omega = \epsilon_x^{1,C\omega}$ et $\lambda_x^\omega = \epsilon_x^{2,C\omega}$), d'où le résultat en vertu du Corollaire 1 et de la Proposition 3.10.

4 – Réduction et balayage des couples finement hyperharmoniques

Si f une fonction sur U, on note $\widehat{f}$ sa régularisée finement s.c.i. C'est la plus grande minorante de f qui soit finement s.c.i. dans U, et elle est donnée par

$$f(x) = \mathrm{f} - \liminf_{y\to x} f(y),\ \forall x \in U.$$

Si $F = (f, g)$ est un couple de fonctions sur U, on note $\widehat{F}$ le couple $(\widehat{f}, \widehat{g})$. Ce couple est applelé le couple régularisé finement s.c.i. de F dans U.

Définition 4.1. Soient $A \subset U$ et $F = (f, g)$ un couple de fonctions sur U. Le couple réduit de F sur A, noté F^A, est le couple défini par

$$F^A = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U); (u, v) \geq (f, g) \text{ sur } A\}.$$

Le couple balayé de F sur A est le couple $\widehat{F}^A$ régularisé finement s.c.i. de F^A.

Proposition 4.2. *Soient $A \subset U$ et $F = (f, g)$ un couple de fonctions sur U. Alors le couple $\widehat{F}^A$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.*

Pour toute partie A de U, on note ${}^{j,U}\widehat{R}_f^A$, $j = 1, 2$, la balayée sur A d'une fonction f relativement à U dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.

Proposition 4.3. *Soient (f, g) un couple de fonctions sur U, et $A \subset U$. Posons $\widehat{F}^A = (\widehat{F}_1^A, \widehat{F}_2^A)$. On a alors $\widehat{(f,0)}^A = ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$ et $\widehat{F}_2^A = {}^{2,U}\widehat{R}_g^A$.*

Démonstration. Le couple $({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 dans U et majore $(f, 0)$ q.p. sur A, donc $({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0) \geq \widehat{(f,0)}^A$. D'autre part si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore le couple $(f, 0)$ sur A, alors u est une fonction finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0 qui majore f sur A, donc $\widehat{(f,0)}^A \geq ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$, et par suite $\widehat{(f,0)}^A = ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$. Soit maintenant v une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 sur U telle que $v \geq g$ sur A. Alors le couple $(+\infty, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 et majore (f, g) sur A, d'où ${}^{2,U}\widehat{R}_g^A \geq \widehat{F}_2^A$. L'inégalité inverse découle facilement du fait que pour tout couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique $(u, v) \geq 0$ tel que $(u, v) \geq (f, g)$ sur A, la fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 et majore g sur A.

Proposition 4.4. *Soient $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et $A \subset U$. Alors on a $\widehat{(u,v)}^A = (u, v)$ q.p. sur A.*

Démonstration. Cela résulte en effet du fait que, pour tout couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique $(u, v) \geq 0$, les fonctions u et v sont respectivement finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique et $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique positives et de [12, Théorème 11.8].

Remarque. Si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore q.p. un couple F de fonctions sur $A \subset U$, alors $(u, v) \geq \widehat{F}^A$.

5 – Ordre spécifique dans $\mathcal{U}_f^+(U)$

Remarquons d'abord que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ est réticulé pour l'ordre naturel, ce qui se démontre comme en théorie des fonctions finement harmoniques.

L'ordre spécifique, noté $\prec$, est défini sur $\mathcal{U}_f^+(U)$ par

$$(u, v) \prec (s, t) \iff \exists (u_1, v_1) \in \mathcal{U}_f^+(U) : (s, t) = (u_1, v_1) + (u, v).$$

Proposition 5.1. *Soient $F_1 = (u_1, v_1), F_2 = (u_2, v_2) \in \mathcal{U}_f^+(U)$. On a alors $[\widehat{(F_1 - F_2)^+}]^U \prec F_1$.*

Démonstration. La proposition se démontre exactement comme dans le cas des fonctions finement hyperharmoniques (voir [12], p.p. 129, 130 et 131).

Corollaire (Propriété de décomposition de Riesz). *Soient F, G et H trois couples de $\mathcal{U}_f^+(U)$ tels que $F \leq G + H$. Il existe alors deux couples $F_1, F_2 \in \mathcal{U}_f^+(U)$ tels que $F = F_1 + F_2$, $F_1 \leq G$ et $F_2 \leq H$.*

Théorème 5.2. *Soient $S, T \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et $A \subset U$. On a alors $\widehat{(S+T)}^A = \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$.*

Démonstration. L'inégalité $\widehat{(S+T)}^A \leq \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$ découle immédiatement de la définition du balayage; l'inégalité inverse s'en déduit en appliquant le corollaire précédent et en utilisant les propriétés des couples et des fonctions finement hyperharmoniques.

On déduit aussi de la Proposition 5.1 que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ vérifie les axiomes du Chapitre 4 de [7] quand U est muni de la topologie fine, d'où le résultat suivant:

Proposition 5.3. *Le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ est un treillis complètement réticulé pour l'ordre spécifique.*

Si $F, G \in \mathcal{U}_f^+(U)$, on note $F \vee G$ et $F \wedge G$ respectivement le max et le min au sens de l'ordre spécifique. Si $\{F_i; i \in I\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on note $\bigwedge_i F_i$ (resp. $\bigvee_i F_i$) l'enveloppe inférieure (resp. supérieure) au sens de l'ordre spécifique de la famille $\{F_i; i \in I\}$.

Remarquons que, comme dans le cas harmonique, on a

$$F \wedge G + F \vee G = F + G$$

et, pour une famille filtrante croissante (resp. décroissante), au sens de l'ordre spécifique, $\{F_i; i \in I\}$, d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on a

$$\bigwedge_i F_i = \widehat{\inf_i} F_i \quad \left(\text{resp.} \bigvee_i F_i = \sup_i F_i\right).$$

6 – Couples finement surharmoniques et couples potentiels fins

Dans ce paragraphe on va se contenter d'énoncer seulement les définitions et quelques propriétés essentielles des couples finement surharmoniques et des couples potentiels fins.

Définition 6.1. Un couple (u, v) finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans un ouvert fin V de X est dit finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans V si les fonctions u et v sont finies sur un ensemble dense dans V.

Il n'est pas difficile de voir que, d'après [12, Théorème 12.9], pour qu'un couple $(u, v) \in \mathcal{U}_f(V)$ soit finement $\mathcal{H}$-surharmonique, il faut et il suffit que les fonctions u et v soient finies en au moins un point de chaque composante finement connexe de V.

On note $\mathcal{S}_f(U)$ l'ensemble des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques dans U. Il est clair que cet ensemble est un cône convexe. On note également $\mathcal{S}_f^+(U)$ le sous-cône de $\mathcal{S}_f(U)$ formé des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques ≥ 0, et $\mathcal{S}_f^{j,+}(U)$, $j = 1, 2$, le cône des fonctions finement $\mathcal{H}_j$-surharmoniques ≥ 0 dans U.

Définition 6.2. Un couple $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ est appelé un $\mathcal{H}$-potentiel fin si tout couple (u, v) finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U qui le minore au sens de l'ordre naturel produit est ≤ 0.

On note $\mathcal{P}_f(U)$ l'ensemble des $\mathcal{H}$-potentiels fins dans U. Alors $\mathcal{P}_f(U)$ est un sous-cône de $\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$, i.e.,

$$\forall P, Q \in \mathcal{S}_f^+(U) : P + Q \in \mathcal{P}_f(U) \Rightarrow P, Q \in \mathcal{P}_f(U).$$

Proposition 6.3. *Soit (s_1,s_2) un couple finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U de X. Alors*

i) *si $s_2 \geq 0$, la fonction s_1 est finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique;*
ii) *le couple (s_1, s_2) est un potentiel fin si et seulement si, pour tout $j = 1, 2$, s_j est un $\mathcal{H}_j$-potentiel fin.*

Démonstration. Le i) résulte aussitôt de la Définition 6.1 et de celle des fonctions finement $\mathcal{H}_2$-surharmoniques. Montrons le ii). Supposons que s_j soit un $\mathcal{H}_j$-potentiel fin dans U pour tout $j = 1, 2$, et soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U tel que $(u, v) \leq (s_1, s_2)$. Comme v est finement $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique dans U, on a $v \leq 0$, il résulte alors de la définition des couples finement $\mathcal{H}$-hypoharmoniques que u est finement $\mathcal{H}_1$-hypoharmonique dans U, et donc $u \leq 0$. Inversement, supposons que le couple (s_1, s_2) soit un $\mathcal{H}$-potentiel fin. Si u est une fonction finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U, telle que $u \leq s_1$, alors le couple $(u, 0)$ est finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique $\leq (s_1, s_2)$, d'où $(u, 0) \leq 0$, et par suite $u \leq 0$. Donc s_1 est un $\mathcal{H}_1$-potentiel fin dans U. De même, si v est une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique dans U telle que $v \leq s_2$, le couple $(-\infty, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique et on a $(-\infty, v) \leq (s_1, s_2)$, d'où $v \leq 0$. Donc s_2 est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin dans U.

Proposition 6.4 (Principe du maximum). *Soient ω un ouvert fin $\subset U$ et $(u, v) \in \mathcal{U}_f(\omega)$ tel que* $\liminf_{x \in \omega, x \to y}(u, v)(y) \geq 0$, *pour tout $y \in \partial_f \omega \cap U$. S'il existe un $\mathcal{H}$-potentiel fin P dans U tel que $(u, v) \geq -P$ dans ω, alors on a $(u, v) \geq 0$ dans ω.*

On signale que la réstriction de l'ordre spécifique dans $\mathcal{U}_f^+(U)$ à $\mathcal{S}_f^+(U)$ fait de ce dernier un treillis complètement réticulé.

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, un couple $H \in \mathcal{S}_f^+(U)$ sera dit $\mathcal{H}$-invariant (ou tout simplement invariant) s'il est orthogonal, pour l'ordre spécifique, à la bande des $\mathcal{H}$-potentiels fins. On note $\mathcal{H}_i(U)$ l'ensemble des couples $\mathcal{H}$-invariants. Il est facile de voir que $\mathcal{H}_i(U)$ est un cône convexe. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$. On a donc,

$$\forall S \in \mathcal{S}_f^+(U), \exists! P \in \mathcal{P}_f(U), \exists! H \in \mathcal{H}_i(U) : S = P + H.$$

Il est clair aussi que tout couple finement biharmonique est invariant, mais la réciproque est fausse en général. En effet, si h une fonction invariante dans U qui ne soit pas finement $\mathcal{H}_1$-harmonique, le couple $(h, 0)$ est invariant qui n'est pas finement biharmonique.

Question. Le problème de savoir si une fonction invariante dans U est la somme d'une suite de fonctions finement harmoniques positives dans U a été posé par Fuglede dans [17]. A notre connaissance ce problème demeure toujours ouvert. Par analogie avec ce problème on peut poser la question suivante:

Est-ce que tout couple invariant dans U est la somme d'une suite de couples finement $\mathcal{H}$-harmoniques ≥ 0?

Même si la réponse au problème de Fuglede est positive, il semble qu'il n'est pas évident qu'il en soit de même pour les couples $\mathcal{H}$-invariants. En effet, comme on va le voir dans la suite, si $H = (h, k)$ est un couple $\mathcal{H}$-invariant, on a $h = h_1 + \mathcal{V}(k)$, où $\mathcal{V}$ est un noyau borélien sur U, et h_1 est invariante. On voit donc que, même si h_1 et k sont des sommes de suites de fonctions finement $\mathcal{H}_1$-harmoniques ≥ 0 et $\mathcal{H}_2$-harmoniques ≥ 0 respectivement, il ne semble pas facile d'affirmer que le couple $(\mathcal{V}(k), k)$ est la somme d'une suite de couples finement biharmoniques dans U.

7 – Couples finement hyperharmoniques purs

Proposition 7.1. *Soit v une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans un ouvert fin V de X. Alors la fonction*

$$u_v = \widehat{\inf}\{u \geq 0; (u, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)\}$$

est finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique dans V et l'on a $(u_v, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)$.

Comme en théorie des fonctions biharmoniques, nous adoptons la définition suivante:

Définition 7.2. La fonction u_v de la proposition précédente est appelée la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. On dit que ce couple est pur si u est la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Pour alléger les écritures, on notera dans la suite $\mathcal{V}_0(v)$ la fonction finement hyperharmonique d'ordre 2 associée à une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ dans U. Cette notation sera justifiée par la suite.

Proposition 7.3. *Soit $(u,v)\in\mathcal{S}_f^+(U)$ un couple pur. Si la fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans un ouvert fin $V\subset U$, et si u est finie dans V, alors le couple (u,v) est finement biharmonique dans V.*

Démonstration. Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\widetilde{\omega}\subset V$; alors le couple $(u,v)_\omega$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U d'après le Corollaire 2 de la Proposition 3.13, et l'on a

$$(u,v)_\omega=\Big(\int u d\mu_\cdot^\omega+\int v d\nu_\cdot^\omega, v\Big)$$

dans ω, d'où $u\le\int u d\mu_\cdot^\omega+\int v d\nu_\cdot^\omega$, et, par suite, $u=\int u d\mu_\cdot^\omega+\int v d\nu_\cdot^\omega$ dans ω. Comme le couple (u,v) est finement continu, on en déduit qu'il est finement biharmonique dans V.

Proposition 7.4. *Soient v_1,v_2 deux fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U. Alors, si $v_1\le v_2$, on a $\mathcal{V}_0(v_1)\le\mathcal{V}_0(v_2)$.*

Démonstration. La proposition résulte immédiatement de la Définition 7.2 et de la Proposition 3.7.

Proposition 7.5. *Soit $(s_1,s_2)\in\mathcal{S}_f^+(U)$. On a alors $\mathcal{V}_0(s_2)\prec s_1$, i.e. il existe $t\in\mathcal{S}_f^{1,+}(U)$ tel que $\mathcal{V}_0(s_2)+t=s_1$.*

Démonstration. Posons $s=\mathcal{V}_0(s_2)$. Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\overline{\omega}\subset U$ et soient $v\in-\mathcal{S}_f^{1,+}(\omega)$, bornée supérieurement, et $u\in\mathcal{S}_f^{1,+}(\omega)$, bornée inférieurement, telles que $\text{f-}\limsup_{x\to y,x\in\omega}v(x)\le s_1(y)$ et $\text{f-}\liminf_{x\to y,x\in\omega}u(x)\ge s(y)$ pour tout $y\in\partial_f\omega$. Considérons la fonction

$$w=\begin{cases}\inf(s_1+u-v,s) & \text{dans } \omega,\\ s & \text{dans } U\setminus\omega.\end{cases}$$

Alors, d'après les conditions ci-dessus sur u et v et la Proposition 3.10, le couple (w,s_2) est finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U. On en déduit $s_1+u-v\ge s$ dans ω. Les fonctions u et v étant arbitraires, on en déduit donc d'après [12, Théorème 14.6] que, pour tout $x\in\omega$, tel que $s(x)<+\infty$, on a

$$s_1(x)-s(x)\ge\int(s_1-s)d\epsilon_x^{1,C\omega}.$$

Le théorème de prolongement par continuité fine [12, Théorème 9.14] nous assure alors que la fonction $s_1 - s$ se prolonge en une fonction finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique $t \geq 0$ dans U et l'on a donc $s_1 = s + t$.

Proposition 7.6. *Pour tout $j = 1, 2$, soit v_j une fonction finement $\mathcal{H}_j$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. On a alors*

$$\mathcal{V}_0(v_1 + v_2) = \mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_0(v_2).$$

Démonstration. L'inégalité $\mathcal{V}_0(v_1 + v_2) \leq \mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_0(v_2)$ découle simplement de la Définition 7.1 et du fait que le couple $(\mathcal{V}_0(v_1)+\mathcal{V}_0(v_2), v_1+v_2) = (\mathcal{V}_0(v_1), v_1)+(\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. Montrons l'inégalité inverse. Le résultat est trivial si $\mathcal{V}_0(v_1) \equiv +\infty$ ou $\mathcal{V}_0(v_2) \equiv +\infty$. Supposons donc que les fonctions $\mathcal{V}_0(v_1)$ et $\mathcal{V}_0(v_2)$ soient finement $\mathcal{H}_1$-surharmoniques (on rappelle que l'ouvert fin U est supposé finement connexe). Alors, d'après la propriété de décomposition de Riesz des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques ≥ 0 appliquée à l'inégalité $(\mathcal{V}_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) \leq (\mathcal{V}_0(v_1), v_1) + (\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$, on peut trouver deux couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques dans U, $(s_1, t_1) \geq (0, 0)$ et $(s_2, t_2) \geq (0, 0)$, tels que $(\mathcal{V}_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) = (s_1, t_1) + (s_2, t_2)$, et $(s_1, t_1) \leq (\mathcal{V}_0(v_1), v_1)$ et $(s_2, t_2) \leq (\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$, ce qui entraîne $t_1 = v_1$ et $t_2 = v_2$ et donc $s_1 = \mathcal{V}_0(v_1)$ et $s_2 = \mathcal{V}_0(v_2)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 7.7. *Soient (v_n) une suite croissante de fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U, et soit $v = \sup_n v_n$. On a alors $\mathcal{V}_0(v) = \sup_n \mathcal{V}_0(v_n)$.*

Démonstration. On a $(\mathcal{V}_0(v), v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $v \geq v_n$, donc $(\mathcal{V}_0(v), v_n) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ pour tout n d'après la Proposition 7.4, donc $\mathcal{V}_0(v) \geq \mathcal{V}_0(v_n)$ pour tout n, et par suite $\mathcal{V}_0(v) \geq \sup_n \mathcal{V}_0(v_n)$. D'autre part, on a $(\sup_n \mathcal{V}_0(v_n), \sup_n v_n) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ pour tout n, d'après la Proposition 3.6, donc $(\sup_n \mathcal{V}_0(v_n), v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, d'où $\mathcal{V}_0(v) \leq \sup_n \mathcal{V}_0(v_n)$.

Pour toute fonction $\mathcal{H}_1$-surharmonique $s \geq 0$ sur X, la fonction $s - {}^1\widehat{R}_s^{CU}$, est bien définie et finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans le complémentaire dans U d'un ensemble $\mathcal{H}_1$-polaire. Elle se prolonge donc, en vertu du principe du prolongement par continuité fine, en une fonction de $\mathcal{S}_f^{1,+}(U)$, notée s_U.

Soit $\mathcal{V}_U$ le noyau borélien sur U défini par

$$\mathcal{V}_U(f) = \mathcal{V}(\overline{f}) - {}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(\overline{f})}|_U$$

pour toute fonction borélienne $f \geq 0$ sur U, où $\overline{f}$ est le prolongement de f à X, nul dans CU, et $\mathcal{V}$ est le noyau du Théorème 2.5. On remarquera que si $U = X$, alors $\mathcal{V}_U = \mathcal{V}$.

Si ω est un ouvert fin de U, on notera $\mathcal{V}_\omega$ le noyau égal à $\mathcal{V}_\delta$ dans chaque composante finement connexe δ de ω.

On note $\mathcal{S}_j^+(X)$, $j = 1, 2$, le cône des fonctions $\mathcal{H}_j$-surharmoniques ≥ 0.

Posons

$$\mathcal{S}_2'(X) = \{t \in \mathcal{S}_2^+(X) : \mathcal{V}(t) \in \mathcal{S}_1^+(X)\}.$$

Remarquons que si $t \in \mathcal{S}_2'(X)$, alors $\mathcal{V}(t)_U = \mathcal{V}_U(t|_U)$.

Proposition 7.8. *Soit $t \in \mathcal{S}_2'(X)$. Alors la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à la restriction de t à U est égale à $\mathcal{V}(t)_U$.*

Démonstration. Soit q_0 un $\mathcal{H}_2$-potentiel > 0 tel que $\mathcal{V}(q_0) < +\infty$. On a $\mathcal{V}(t)_U = \sup_n \mathcal{V}(t \wedge nq_0)_U$. D'après la Proposition 7.7, il suffit de montrer que la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $(t \wedge nq_0)|_U$ est égale à $\mathcal{V}(t \wedge nq_0)_U$, ce qui permet de se ramener au cas où $\mathcal{V}(t)$ est finie. Le couple $(\mathcal{V}(t)_U, t)$ est $\mathcal{H}$-finement hyperharmonique ≥ 0 dans U. En effet, on a, pour tout ouvert fin $\delta \subset \overline{\delta} \subset U$ et tout $x \in \delta$,

$$\begin{aligned}\int \mathcal{V}(t)_U d\mu_x^\delta + \int t d\nu_x^\delta \leq \mathcal{V}(t)(x) - \int {}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(t)}|_U d\mu_x^\delta &= \\ = (\mathcal{V}(t) - {}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(t)})(x),&\end{aligned}$$

car le couple $(\mathcal{V}(t), t)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U et la fonction ${}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(t)}$ est finement $\mathcal{H}_1$-harmoniques dans U d'après [12, Théorème 10.2]. Soit u une fonction finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0 dans U

telle que le couple (u,t) soit finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U, et soit u_1 la fonction définie par

$$u_1 = \begin{cases} \min(u + {}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(t)}, \mathcal{V}(t)) & \text{dans } U, \\ \mathcal{V}(t) & \text{dans } X \setminus U. \end{cases}$$

Alors, d'après le Théorème 3.10, le couple (u_1, t) est finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans X. Or, comme $t \geq 0$, la fonction u_1 est finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans X, donc elle est $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans X en vertu du Théorème 9.8 de [12]. Il en résulte, d'après la définition des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques que (u_1, t) est $\mathcal{H}$-surharmonique dans X, d'où $u + {}^1\widehat{R}^{CU}_{\mathcal{V}(t)} \geq \mathcal{V}(t)$ et donc le résultat.

Lemme 7.9. *Pour toute fonction $s \in \mathcal{S}_f^{2,+1}(U)$ majorée par un élément de $\mathcal{S}_2'(X)$, il existe une suite croissante (t_n) de fonctions de $\mathcal{V}(X)$ telle que $s = \sup_n (t_n)_U$.*

Démonstration. Le lemme résulte aussitôt du Théorème 3 de [14].

Théorème 7.10. *Pour toute fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ dans U, $\mathcal{V}_U(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.*

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{S}_2'(X)$. On a alors

$$s|_U = s_U + {}^2\widehat{R}^{CU}_t|_U,$$

d'où, d'après la Proposition 7.6,

$$\mathcal{V}_0(s|_U) = \mathcal{V}_0(s_U) + \mathcal{V}_0({}^2\widehat{R}^{CU}_s|_U),$$

et, par suite, d'après la Proposition 7.8,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(s_U) &= \mathcal{V}_0(s|_U) - \mathcal{V}_0({}^2\widehat{R}^{CU}_s|_U) = \\ &= \mathcal{V}(s)_U - \mathcal{V}({}^2\widehat{R}^{CU}_s)_U, \end{aligned}$$

q.p. dans U. D'autre part, un calcul facile donne

$$\mathcal{V}(s)_U - \mathcal{V}({}^2\widehat{R}^{CU}_s)_U = \mathcal{V}_U(s_U) \text{ q.p.},$$

d'où $\mathcal{V}_0(t_U) = \mathcal{V}_U(t_U)$. En vertu de la Proposition 7.7, le théorème découle maintenant du Lemme 7.9 et du fait que tout élément de $\mathcal{U}_f^{2,+}(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{S}_f^{2,+}(U)$ majorées par des éléments de $\mathcal{S}_2'(X)$.

Remarque. Si v est une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans un ouvert fin ω de U, alors la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v est égale à $\mathcal{V}_\omega(v)$.

Le théorème suivant est une application du précédent:

Théorème 7.11. *Si (u, v) est un couple finement $\mathcal{H}$-surharmonique localement borné inférieurement dans X, alors (u, v) est un couple surharmonique dans X.*

Démonstration. Quitte à se placer localement, on peut supposer que $(u, v) \geq 0$ dans X. Alors la fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0, donc $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique dans X d'après [12, Théorème 9.8]. D'autre part on a, d'après ce qui précède, $u = \mathcal{V}(v) + t$, où t est une fonction finement harmonique ≥ 0, donc hyperharmonique dans X toujours d'après [12, Théorème 9.8]. Maintenant le théorème résulte du fait que, dans le cas où $U = X$, le noyau $\mathcal{V}_U$ coïncide avec le noyau $\mathcal{V}$ du Paragraphe 2.

Proposition 7.12. *Soit $(u, v) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ un couple pur. Si v est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin, alors (u, v) est un $\mathcal{H}$-potentiel fin.*

Démonstration. Soit (h, k) un couple finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U tel que $0 \leq (h, k) \leq (u, v)$. Alors k est finement $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique ≥ 0 et minore v, donc $k = 0$. On en déduit que h est finement $\mathcal{H}_1$-hypoharmonique, donc le couple $(u-h, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0, de sorte que $u - h \geq u$, et par suite $h = 0$.

Maintenant on peut donner également quelques applications de la Proposition 7.13. aux couples invariants.

Proposition 7.13. *Si (h, k) est un couple invariant dans U, alors k est une fonction $\mathcal{H}_2$-invariante dans U.*

Démonstration. En effet, si p est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin qui minore spécifiquement k, alors le couple (h,p) est finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U et donc le couple $(\mathcal{V}_0(p),p)$ est, d'après la proposition précédente, un $\mathcal{H}$-potentiel fin qui minore spécifiquement (h,k) d'après la Proposition 7.5, donc il est nul.

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, nous avons la

Proposition 7.14. *Soit $H=(h,k)$ un couple invariant dans U. Alors H est finement $\mathcal{H}$-harmonique dans le domaine fin $\omega=\{x\in U; h(x)+k(x)<+\infty\}$.*

Démonstration. En effet, comme la fonction k est $\mathcal{H}_2$-invariante d'après la Proposition 7.13, elle est finement harmonique dans ω d'après [12, Théorème 10.2]. La proposition découle maintenant de la Proposition 7.3. appliquée au couple $(\mathcal{V}(k),k)$ et du fait que la fonction finement $\mathcal{H}_1$-hyperhamonique $u\geq 0$ dans U telle que $h=u+\mathcal{V}(k)$, qui est évidemment $\mathcal{H}_1$-invariante, est finement $\mathcal{H}_1$-harmonique dans ω puisqu'elle est finie dans ω.

Proposition 7.15. *Soit $(u,v)\in\mathcal{S}_f^+(U)$ un couple pur. Alors, si v est $\mathcal{H}_2$-invariante dans U, le couple (u,v) est $\mathcal{H}$-invariant. En particulier si v est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans U, et si u est finie dans U, alors le couple (u,v) est finement $\mathcal{H}$-harmonique dans U.*

Démonstration. Soit (p,q) un $\mathcal{H}$-potentiel fin tel que $(p,q)\prec(u,v)$. On a alors $q\prec v$, et comme v est $\mathcal{H}_2$-invariante et q est un $\mathcal{H}$-potentiel fin, on a $q=0$, et par suite $(u,v)=(u_1,v)+(p,0)$, où $(u_1,v)\in\mathcal{S}_f^+(U)$. Mais alors on aura $u_1\geq u$ et donc $p=0$ et le couple (u,v) est invariant. Le reste de la proposition est évident.

8 – Problème de Riquier fin

Soit ω un ouvert fin de X. On note $\mathcal{U}_f^i(\omega)$ l'ensemble des couples finement hyperharmoniques (u,v) dans ω tels qu'il existe un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné fini $P=(p,q)$ tel que $(u,v)\geq -P$.

Si (f,g) un couple de fonctions sur $\partial_f\omega$, on pose

$$\overline{H}^{\omega}_{(f,g)}=\inf\{(u,v)\in\mathcal{U}_f^i(\omega):\mathrm{f}-\liminf_{x\in\omega,x\to y}(u,v)(x)\geq(f(y),g(y)),\forall y\in\partial_f(\omega)\}.$$

On pose aussi $\overline{H}^{\omega}_{(f,g)}=(\overline{H}^{\omega,1}_{(f,g)},\overline{H}^{\omega,2}_{(f,g)})$ et $\underline{H}^{\omega}_{(f,g)}=-\overline{H}^{\omega}_{(-f,-g)}$.

Il est clair que le couple $\overline{H}^{\omega}_{(f,g)}$ (resp. $\underline{H}^{\omega}_{(f,g)}$) est un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique (resp. finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique) dans ω.

On dit qu'un couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif (pour le problème de Riquier fin) si on a $\underline{H}^{\omega}_{(f,g)} = \overline{H}^{\omega}_{(f,g)}$ et si ces couples sont finement $\mathcal{H}$-harmoniques dans ω; on les notera alors par $H^{\omega}_{(f,g)}$.

Pour tout $j=1,2$, et toute fonction f sur $\partial_f\omega$, on note ${}^{j}\overline{H}^{\omega}_{f}$ (resp. ${}^{j}\underline{H}^{\omega}_{f}$) la sursolution (la sousolution) du problème de Dirichlet fin dans l'espace harmonique $(X,\mathcal{H}_j)$ pour la donnée frontière f sur $\partial_f\omega$.

Il résulte de la définition et des propriétés des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques que l'on a $\overline{H}^{\omega,1}_{(f,0)} = {}^{1}\overline{H}^{\omega}_{f}$ et $\overline{H}^{\omega,2}_{(f,g)} = {}^{2}\overline{H}^{\omega}_{g}$, avec les notations de [12], p. 173, relatives au problème de Dirichlet fin.

Théorème 8.1. *Soit (f,g) un couple de fonctions sur $\partial_f\omega$. On a alors*

$$\overline{H}^{\omega,1}_{(f,g)} = \int^{*} f d\mu^{\omega}_{\cdot} + \int^{*} g d\nu^{\omega}_{\cdot} \text{ et } \overline{H}^{\omega,2}_{(f,g)} = \int^{*} g d\lambda^{\omega}_{\cdot}.$$

Démonstration. Le théorème se démontre comme dans le cas finement harmonique ([12], preuve du Théorème 14.6), en utilisant le Théorème 3.3.

Corollaire 1. *Pour tout couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$, on a*

$$\overline{H}^{\omega}_{(f,g)} = ({}^{1}\overline{H}^{\omega}_{f} + \overline{H}^{\omega,1}_{(0,g)}, {}^{2}\overline{H}^{\omega}_{g}).$$

Corollaire 2. *Un couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif si, et seulement si, pour tout $x \in \omega$, f est μ^{ω}_{x}-intégrable et g est ν^{ω}_{x}-intégrable et λ^{ω}_{x}-intégrable.*

Corollaire 3. *Soit $(u,v) \in \mathcal{U}^{+}_{f}(U)$ et ω un ouvert fin de X tel que $\widetilde{\omega} \subset U$, alors on a*

$$\overline{H}^{\omega}_{(u,v)} = (u,v)_{\omega}|_{\omega}.$$

On dit qu'un couple (f,g) de fonctions sur une partie A de X est borné par un $\mathcal{H}$-potentiel P si on a $(|f|,|g|)\leq P$ sur A.

Corollaire 4. *Soit (f,g) un couple de fonctions boréliennes, borné sur $\partial_f\omega$ par un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné fini. Alors (f,g) est résolutif.*

Théorème 8.2. *Supposons que l'ouvert fin ω est $\mathcal{H}$-régulier et soit (f,g) un couple de fonctions finement continues sur $\partial_f\omega$, borné par un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné fini. On a alors*

$$\text{f}-\lim_{x\in\omega\to y} H^{\omega}_{(f,g)}(x)=(f(y),g(y))$$

pour tout $y\in\partial_f\omega$.

Démonstration. Quitte à ajouter à (f,g) un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné fini, on peut supposer que le couple (f,g) est ≥ 0. D'après le théorème précédent et le Théorème 14.6 de [12], on a $H^{\omega}_{(f,g)}=({}^1H^{\omega}_f+H^{\omega,1}_{(0,g)},{}^2H^{\omega}_g)$. Or, on sait d'après [12, Théorème 14.7], que pour tout $y\in\partial_f\omega$, $\text{f-lim}_{x\in\omega,x\to y}\,{}^1H^{\omega}_f(x)=f(y)$ et $\text{f-lim}_{x\in\omega,x\to y}\,{}^2H^{\omega}_g(x)=g(y)$, donc $\text{f-lim}\inf_{x\in\omega,x\to y}H^{\omega}_{(f,g)}(x)\geq(f(y),g(y))$. Soit sirt P un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné fini tel que $(f,g)\leq P$ sur $\partial_f\omega$, alors en appliquant ce qui précède au couple $P-(f,g)$, on obtient $\text{f-lim}\sup_{x\in\omega,x\to y}H^{\omega}_{(f,g)}(x)\leq(f(y),g(y))$, et le théorème est donc démontré.

Proposition 8.3. *Si g est une fonction ≥ 0 sur $\partial_f\omega$, alors $\overline{H}^{\omega,1}_{(0,g)}$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à ${}^2\overline{H}^{\omega}_g$ dans ω.*

Démonstration. Si $(u,v)\in\mathcal{U}^i_f(\omega)$ tel que $\text{f-lim}\inf(u,v)\geq(0,g)$ sur $\partial_f\omega$, alors $v\geq{}^2\overline{H}^{\omega}_g$, et donc $u\geq\mathcal{V}_\omega({}^2\overline{H}^{\omega}_g)$, d'où l'inégalité $\overline{H}^{\omega,1}_{(0,g)}\geq\mathcal{V}_\omega({}^2\overline{H}^{\omega}_g)$. D'autre part, on peut trouver une suite décroissante (v_n) de fonctions de $\mathcal{S}^{2,+}_f(\omega)$ telle que $\inf_n v_n={}^2\overline{H}^{\omega}_g$. On a alors $\overline{H}^{\omega}_{(0,g)}\leq\inf_n(\mathcal{V}_\omega(v_n),v_n)=(\mathcal{V}_\omega({}^2\overline{H}^{\omega}_g),{}^2\overline{H}^{\omega}_g)$, donc $\overline{H}^{\omega,1}_{(0,g)}\leq\mathcal{V}_\omega({}^2\overline{H}^{\omega}_g)$.

Théorème 8.4. *Soient ω un ouvert fin régulier tel que $\widetilde{\omega}\subset U$, et $(u,v)\in\mathcal{U}^+_f(U)$. On a alors $(u,v)_\omega=\widehat{(u,v)}^{C\omega}$.*

Démonstration. Soit $(s,t) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ tel que $(s,t) \geq (u,v)$ sur $C\omega$. Alors, pour tout $x \in \omega$, on a, d'après le Théorème 3.3, $s(x) \geq \int^* s d\mu_x^\omega + \int^* t d\nu_x^\omega$ et $t(x) \geq \int^* t d\lambda_x^\omega$, et donc $s(x) \geq \int^* u d\mu_x^\omega + \int^* v d\nu_x^\omega$ et $t(x) \geq \int^* v d\lambda_x^\omega$, car les mesures μ_x^ω, ν_x^ω et λ_x^ω sont portées par $\partial_f \omega$. Donc $\widehat{(u,v)}^{C\omega} \geq (u,v)_\omega$. L'inégalité inverse résulte du Corollaire 2 de la Proposition 3.13.

9 – Fonctions finement biharmoniques

Lemme 9.1. *Pour tout ouvert fin ω de X tel que $\overline{\omega} \subset X$ et tout $x \in \omega$, on a $\int d\nu_x^\omega > 0$.*

Démonstration. D'après le Théorème 8.1, le couple $(\int d\nu_\cdot^\omega, 1)$ est finement surharmonique ≥ 0, non identiquement nul dans toute composante finement connexe de ω, donc $\int d\nu_x^\omega > 0$ pour tout $x \in \omega$.

Considérons maintenant la famille $D(U)$ des fonctions f finies finement continues sur U telles que la limite

$$Lf(x) = \lim_{\omega \downarrow x} \frac{f(x) - \displaystyle\int f(y) d\mu_x^\omega(y)}{\displaystyle\int d\nu_x^\omega(y)}$$

existe et soit finie pour tout $x \in U$ (la fraction $\frac{f(x) - \int f(y) d\mu_x^\omega(y)}{\int d\nu_x^\omega(y)}$ est bien définie lorsque $\overline{\omega} \subset X$ d'après le lemme précédent).

Definition 9.2. Une fonction f finement continue sur U est dite finement $\mathcal{H}$-biharmonique (ou simplement finement biharmonique) dans U si $f \in D(U)$ et si Lf est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans U.

La proposition suivante met en évidence le lien qui existe entre la notion de fonction finement harmonique au sens de la Définition 9.1 et la notion de couple finement biharmonique:

Proposition 9.3. *Soit (u,v) un couple finement biharmonique dans un ouvert fin U. Alors $u \in D(U)$ et $Lu = v$.*

Démonstration. Soient $x \in U$ et $\epsilon > 0$. Comme v est finement continue, il existe un ouvert fin $\omega_0 \subset U$, $x \in \omega_0$, tel que $|v(x) - v(y)| < \epsilon$ pour tout $y \in \omega_0$. Alors, pour tout ouvert fin $\omega \subset \overline{\omega} \subset \omega_0$, $x \in \omega$, on a

$$|u(x) - \int u d\mu_x^\omega - v(x) \int d\nu_x^\omega| < \epsilon \int d\nu_x^\omega,$$

donc $u \in D(U)$ et $Lu = v$.

Corollaire. *Soit (u, v) un couple finement biharmonique dans un ouvert fin U. Alors u et finement biharmonique dans U.*

REFERENCES

[1] N. Boboc – Gh. Bucur – A. Cornea: *Order and convexity in Potential theory: H-cones*, Lecture Notes in Math., **853** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.

[2] N. Boboc – Gh. Bucur: *Perturbations in excessive structures*, Lecture Notes in Math., **1014** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983), 155-187.

[3] A. Boukricha: *Espaces biharmoniques*, Lecture Notes in Math., **1096** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983), 116-148.

[4] N. Bouleau: *Espaces biharmoniques et couplages de processus de Markov*, J. Math. Pures Appl., **58** (1979), 187-204.

[5] M. Brelot: *Éléments de la théorie classique du potentiel*, C.D.U, 1969.

[6] G. Choquet: *Lectures on Analysis, Vol. 2*, Mathematics Lect. Notes Series, Benjamen, Inc. New York, 1969.

[7] C. Constantinescu – A. Cornea: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[8] C. Dellacherie – P.A. Meyer: *Probabilités et Potentiel*, chap. I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[9] C. Dellacherie – P.A. Meyer: *Probabilités et Potentiel*, Chap. XII à XVI, Hermann, Paris, 1987.

[10] M. El Kadiri: *Représentation intégrale dans le cadre de la théorie des fonctions biharmoniques*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (1997), 579-589.

[11] M. El Kadiri: *Fonctions finement biharmoniques*, Rend. Accad. Sci., **40** (5) (2000), 43-61.

[12] B. Fuglede: *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math., **289** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[13] B. Fuglede: *Sur la fonction de Green dans un domaine fin*, Ann. Inst. Fourier, **25** (1975), 201-206.

[14] B. Fuglede: *Localization in Fine Potential Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Functions*, J. Funct. Anal., **49** (1982), 52-72.

[15] B. Fuglede: *Integral Representation of Fine Potential*, Math. Ann., **262** (1983), 191-214.

[16] B. Fuglede: *Représentation intégrale des potentiels fins*, C.R. Acad. Sci. Paris, **300** Série I, (1985), 129-132.

[17] B. Fuglede: *On the Riesz representation of finely superharmonic functions*, Lecture Notes in Math., **1344** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1987), 199-201.

[18] R.M. Hervé: *Rechreches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, **12** (1962), 415-517.

[19] E.P. Smyrnelis: *Axiomatique des fonctions biharmoniques*, 1e section, Ann. Inst. Fourier, **25** (1975), 35-97.

[20] E.P. Smyrnelis: *Axiomatiques des fonctions biharmoniques*, 2e section, Ann. Inst. Fourier, **26** (1976), 1-47.

[21] E.P. Smyrnelis: *Sur les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2*, Lecture Notes in Math., **681** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[22] E.P. Smyrnelis: *Support biharmonique et support harmonique associé*, Lecture Notes in Math., **787**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1980.

Lavoro pervenuto alla redazione il 4 novembre 2002
ed accettato per la pubblicazione il 9 giugno 2003.
Bozze licenziate il 4 settembre 2003

Indirizzo degli Autori:

Charaf Bensouda – Département de Mathématiques – Faculté des Sciences – Kénitra (Marocco)

Mohamed El Kadiri – B.P. 726 – Salé-Tabriquet – Salé (Marocco)
E-mail: elkadiri@fsr.ac.ma

Ilham Rouchdi – Département de Mathématiques – Faculté des Sciences – Rabat (Marocco)