Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 25, Roma (2005), 165-174

Approximation biharmonique globale dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ d'une fonction biharmonique au voisinage d'un compact

M. CHADLI– M. EL KADIRI

ABSTRACT: *Etant donnés un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et un compact K de Ω, nous nous proposons d'établir l'approximation uniforme sur K d'une fonction biharmonique au voisinage de K par une fonction biharmonique globale sur Ω tout entier.*

1 – Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et K est un compact de Ω. Dans [2] et [3] nous avons caractérisé les limites uniformes sur K des fonctions biharmoniques au voisinages de K. Dans ce travail nous poursuivons l'étude de ce type d'approximation en vue d'obtenir des résultats plus généraux analogues à ceux du cas harmoniques.

En ce qui concerne l'approximation harmonique, il est bien connu que toute fonction harmonique au voisinage de K est limite uniforme sur K de fonctions harmoniques sur Ω si $\Omega^* \setminus K$ est connexe, où $\Omega^* = \Omega \cup \{\mathcal{A}\}$, $\mathcal{A}$ étant le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat fut obtenu par J. L. Walsh [7] en 1929 dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^n$, et par S. J. Gardiner [4] pour un domaine quelconque de $\mathbb{R}^n$ (voir [4, Th. 1.7]). Nous allons établir un résultat analogue dans le cadre des fonctions biharmoniques. Nous obtenons l'approximation uniforme sur K de la fonction biharmonique au voisinage de

KEY WORDS AND PHRASES: *Fonction biharmonique, Approximation biharmonique.*
A.M.S. CLASSIFICATION: 31B30, 41B40.

celui-ci et aussi l'approximation de son Laplacien par le Laplacien de la fonction approximante.

Nous avons besoin de préciser certaines notations qui seront utilisées dans la suite. Si U est un domaine de Green de $\mathbb{R}^n$, on note G_U le noyau de Green de U normalisé de sorte que $\Delta G_U(.,y) = -\epsilon_y$ au sens des distributions. On note aussi V_U le noyau borélien sur Ω défini par

$$V_U f(x) = \int G_U(x,y) f(y) dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geq 0$ sur U. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont les composantes connexes sont des domaines de Green (on dira alors que U est un ouvert de Green), on note, pour toute fonction borélienne $f \geq 0$ sur U, $V_U f$ la fonction égale à $V_\omega(f_{|\omega})$ dans toute composante connexe ω de U. On remarquera que si l'ouvert U est borné et si f est mesurable au sens de Lebesgue et bornée alors $V_U f$ est bornée (en effet, on a $||V_U f||_\infty \leq ||f||_\infty \sup_{x\in U} \int_U G_U(x,y)dy < \infty$).

Il est clair que si f est une fonction mesurable au sens de Lebesgue ≥ 0 sur un ouvert de Green U de $\mathbb{R}^n$, telle que la fonction $V_U f$ est non identiquement égale à $+\infty$ dans chaque composante connexe, alors la fonction $V_U f$ est surharmonique dans U et on a $\Delta(V_U f) = -f$ au sens des distributions. Si Ω est ouvert de $\mathbb{R}^n$ on pose $\Omega^* = \Omega \cup \{\mathcal{A}\}$, où $\mathcal{A}$ est le point à l'infini du compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{R}^n$.

Dans toute la suite n est entier ≥ 2. On note $\mathcal{H}(A)$ (resp. $\mathcal{B}H(A)$) l'espace des fonctions harmoniques (resp. biharmoniques) au voisinage d'une partie A non vide de $\mathbb{R}^n$. On rappelle qu'une fonction h sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est dite biharmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^4$ et si elle vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta^2 h = \Delta(\Delta h) = 0.$$

La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est notée $|\ \ |$.

2 – Polynômes harmoniques homogènes et fonctions harmoniques dans une intersphère.

On note Φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\Phi_n(r) = -\ln r$ si $n = 2$ et $\Phi_n(r) = r^{2-n}$ si $n \geq 3$. La fonction $h_n(x) = \Phi_n(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^n$, est la solution fondamentale de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que si P est un polynôme harmonique sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire en les n variables réelles $x_1, ..., x_n$, alors les composantes homogènes de P sont aussi harmoniques. On note $\mathcal{H}_k$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes harmoniques de degé k des n variables réelles $x_1, ..., x_n$ (le polynôme nul est considéré comme homogène de tous les degrés). En coordonnées polaires un polynôme harmonique homogène P_k de degré k s'écrit sous la forme

$$P_k = P_k(x) = \rho^k Y_k(\theta)$$

où $\rho = |x|$ et $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ sont les cordonnées polaires de x, et les fonctions Y_k sont appelées les fonctions de Laplace ou les fonctions harmoniques sphériques d'ordre k.

Soit h une fonction harmonique dans une intersphère (couronne si $n = 2$) $\{x : r < |x - y| < R|\}$ de centre y, alors h admet le développement suivant, dit de Laurent (voir [1], Appendice, p. 203):

$$h(x) = a + b\Phi_n(|x - y|) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x - y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x - y|^{n-2+2k}} I_k(x - y),$$

où H_k et I_k sont des polynômes harmoniques homogènes de degrés k, ou encore, en cordonnées polaires,

$$h(x) = a + b\Phi_n(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k Y_k(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k^{(1)}(\theta)}{\rho^{n-2+k}},$$

où $\rho = |x - y|$ et Y_k, $Y_k^{(1)}$ sont des fonctions de Laplace d'ordre k. Les séries des modules des termes des sommes précédentes étant majorées par des séries numériques convergentes pour $\rho < R$ et $\rho > r$ respectivement. Si h est harmonique dans une boule de centre y (resp. dans le complémentaire d'un disque de centre y et bornée au voisinage de l'infini), alors le développement de h se réduit à

$$h(x) = a + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x - y)$$

(resp.

$$a + b\Phi_n(|x - y|) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x - y|^{n-2+2k}} I_k(x - y)$$

si $n > 2$ et

$$a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x - y|^{n-2+2k}} I_k(x - y)$$

si $n = 2$,) où H_k, $I_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout k.

3 – Polynômes biharmoniques et fonctions biharmoniques dans une intersphère

Pour tout $r > 0$ on pose

$$\Psi_2(r) = -\frac{1}{4}r^2(\ln r - 1),\ \Psi_3(r) = \frac{1}{2}r,\ \Psi_4(r) = \frac{1}{2}\ln r,$$

et

$$\Psi_n(r) = \frac{1}{(n-4)^2}r^{4-n}$$

pour tout $n \geq 5$.

On a

$$\frac{d^2\Psi_n}{d\rho^2} + \frac{n-1}{\rho}\frac{d\Psi_n}{d\rho} = \Phi_n.$$

La fonction k_n définie sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, par $k_n(x) = \Psi_n(|x|)$ sera appelée la fonction fondamentale d'ordre 2 (ou biharmonique). Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, la fonction $\Psi_n(|\cdot - y|)$ vérifie l'équation

$$\Delta\Psi_n(|\cdot - y|) = \Phi_n(|\cdot - y|),$$

de sorte que $\Psi_n(|\cdot - y|)$ est une fonction biharmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$.

On appelle polynôme biharmonique sur $\mathbb{R}^n$ tout polynôme $P = P(x)$ vérifiant l'équation $\Delta^2 P = 0$. Comme pour les polynômes harmoniques, les composantes homogènes d'un polynôme biharmonique sont biharmoniques. Pour tout entier k on note $\mathcal{BH}_k$ l'espace des polynômes biharmoniques homogènes de degré k. On a évidemment $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{BH}_k$.

On a vu que tout polynôme harmonique homogène H_k de degré k dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme

$$H_k(x) = \rho^k Y_k(\theta)$$

où $\rho = |x|$ et $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ sont les coordonnées polaires de $x \in \mathbb{R}^n$, et Y_k est une fonction harmonique sphérique d'ordre k.

Rappelons qu'en coordonnées sphériques le Laplacien d'une fonction $f(x) = f(\rho, \theta)$ s'écrit

$$\Delta f(\rho,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}(\rho,\theta) + \frac{n-1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_1 f(\rho,\theta)$$

où Δ_1 est un opérateur differentiel linéaire d'ordre 2 en $\theta_1, ..., \theta_{n-1}$ (voir [6], chap. VI, à ce sujet lorsque $n = 3$). On rappelle aussi que pour tout k la fonction Y_k est une fonction propre de l'opérateur Δ_1 correspondante à la valeur propre $\lambda_k = -k(k + n - 2)$ (voir [6], chap. VI).

Soit $H_k = \rho^k Y_k(\theta)$ un polynôme harmonique homogène de degré k. Considérons le polynôme homogène de degré $k + 2$ défini par

$$P_{k+2} = \rho^{k+2} Y_k(\theta).$$

On a

$$\begin{aligned}\Delta P_{k+2} &= (k+2)(k+1)\rho^k Y_k(\theta)+\\ &\quad + (k+2)(n-1)\rho^k Y_k(\theta) - k(k+n-2)\rho^k Y_k(\theta) =\\ &= 2(2k+n)\rho^k Y_k(\theta),\end{aligned}$$

soit

$$\Delta \frac{P_{k+2}}{2(2k+n)} = H_k,$$

ou encore

$$\Delta \frac{\rho^2 H_k}{2(2k+n)} = H_k.$$

Posons

$$J_{k+2} = \frac{\rho^2 H_k}{2(2k+n)};$$

on a donc

$$\Delta J_{k+2} = H_k.$$

Pour tout entier k, munissons l'espace vectoriel $\mathcal{BH}_k$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle_k = \int_{S^{n-1}} P(\theta)Q(\theta)d\theta$$

où S^{n-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons caractériser le polynôme J_{k+2} comme étant l'unique polynôme de $\mathcal{BH}_{k+2}$ tel que $\Delta J_{k+2} = H_k$ et qui soit orthogonal à $\mathcal{H}_{k+2}$ pour le produit scalaire $\langle , \rangle_{k+2}$. En effet, si Z est un élément de $\mathcal{BH}_{k+2}$ vérifiant ces deux propriétés, on a $Z = J_{k+2}$ car $Z - J_{k+2} \in \mathcal{H}_{k+2}$ et il est orthogonal à $\mathcal{H}_{k+2}$. Nous dirons que J_{k+2} est le polynôme biharmonique (de degré $k+2$) associé à H_k.

Lemme 3.1. *Soit (H_k) une suite de polynômes harmoniques tels que $H_k \in \mathcal{H}_k$ pour tout k. Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} H_k$ est normalement convergente dans un disque ouvert U (borné) de $\mathbb{R}^n$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} J_{k+2}$ converge normalement dans U et on a $\Delta(\sum_{k=0}^{\infty} J_{k+2}) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k$, où J_{k+2} est le polynôme biharmonique associé à H_k.*

Démonstration. En effet, on a, d'après ce qui précède, $|J_{k+2}| \leq C|H_k|$ dans U, où C est une constante > 0, d'où le résultat. □

Lemme 3.2. *Avec les notations précédentes, si la série* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} H_k$ *est localement normalement convergente dans le complémentaire* U *d'un disque fermé de* $\mathbb{R}^n$ *de centre 0, alors on peut trouver des polynômes biharmoniques* L_k, $k = 2, \ldots$, *tels que la série* $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} L_k$ *soit normalement localement convergente dans* U *et que*

$$\Delta(\phi_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} L_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} H_k,$$

où ϕ_n *est un polynôme biharmonique homogène de degré 3 si* $n \geq 3$ *et* $\phi_2 = C\rho \ln \rho$ *telle que* $\Delta\phi_2 = \frac{H_1}{\rho^n}$.

Démonstration. Il suffit de prendre, pour tout $k \geq 2$, $L_k = C_k J_{k+2}$ pour une constante convenable $C_k > 0$, de sorte que $\Delta \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} L_k = \frac{1}{\rho^{n-2+2k}} H_k$ et raisonner comme pour le lemme précédent. □

Théorème 3.3. *Soit* h *une fonction biharmonique dans l'intersphère* $\{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - y| < R\}$. *Alors* h *s'écrit sous la forme*

$$\begin{aligned} h(x) &= a + b\Phi_n(|x-y|) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x-y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{n-2+2k}} I_k(x-y) + c|x-y|^2 \\ &\quad + d\Psi_n(|x-y|) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x-y) \\ &\quad + \phi_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{n-2+2k}} L_k(x-y), \end{aligned}$$

où $H_k, I_k \in \mathcal{H}_k$ *et* $J_k, L_k \in \mathcal{B}H_k$ *pour tout* k, *et* ϕ_n *comme dans le lemme précédent.*

Démonstration. La fonction Δh est harmonique dans l'intersphère $\{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - y| < R\}$, donc on peut l'écrire sous la forme

$$\Delta h(x) = 4c + d\Phi_n(|x-y|) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x-y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2k}} I_k(x-y),$$

où $H_k, I_k \in \mathcal{H}_k$. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = c\rho^2 + d\Psi_n(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x-y) + \phi_n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{n-2+2k}} L_k(x-y),$$

où $\rho = |x-y|$ et, pour tout $k \geq 1$, $J_k, L_k \in \mathcal{BH}_k$ et ϕ_n sont comme dans le lemme 3.2. Alors on a $\Delta h = \Delta g$, de sorte que $h - g$ est une fonction harmonique dans $\{x : r < |x-y| < R\}$. Le théorème s'obtient maintenant en appliquant le développement de Laurent à la fonction $h - g$. ∎

Remarque. Si dans le théorème précédent h est biharmonique (resp. biharmonique bornée) dans la boule de centre y (resp. dans $\{x : |x-y| > R\}$), le développement de $h(x)$ prend la forme

$$\begin{aligned} h(x) = a + b|x-y|^2 &+ \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x-y) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x-y) \end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned} h(x) =& a + b\Phi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n-2k}} I_k(x-y) \\ &+ c\Psi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n+2k}} L_k(x-y) \end{aligned}$$

si $n > 4$,

$$\begin{aligned} h(x) = a &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n-2k}} I_k(x-y) \\ &+ b\Psi_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n+2k}} L_k(x-y) \end{aligned}$$

si $3 \leq n \leq 4$, et

$$\begin{aligned} h(x) = a &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n-2k}} I_k(x-y) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x-y|^{2-n+2k}} L_k(x-y), \end{aligned}$$

si $n = 2$), où $I_k, H_k \in \mathcal{H}_k$ et $J_k, L_k \in \mathcal{BH}_k$ pour tout $k \geq 1$.

4 – Approximation par une fonction biharmonique globale.

Rappelons d'abord le résultat suivant:

Théorème 4.1. ([4], *Theorem* 1.7.) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit K un compact de Ω tel que $\Omega^* \setminus K$ soit connexe. Alors pour toute fonction $u \in \mathcal{H}(K)$, et tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction v dans $\mathcal{H}(\Omega)$ telle que $|v - u| < \epsilon$ sur K.*

Maintenant nous pouvons établir l'analogue de ce théorème pour les fonctions biharmoniques, à savoir le

Théorème 4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit K un compact de Ω tel que $\Omega^* \setminus K$ soit connexe. Alors pour toute fonction $u \in \mathcal{BH}(K)$, et tout $\epsilon > 0$, on peut trouver une fonction v dans $\mathcal{BH}(\Omega)$ telle que $|v - u| + |\Delta u - \Delta v| < \epsilon$ sur K.*

La démonstration que nous allons donner de ce théorème est une adaptation aux fonctions biharmoniques de la démonstration donnée dans [4] du théorème précédent.

Lemme 4.3. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, et soient $u \in \mathcal{BH}(K)$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe des points $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n \setminus K$ et des constantes $a_1, ..., a_m$ tels que, pour tout $x \in K$,*

$$|u(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k \Psi_k(|x - y_k|)| < \epsilon.$$

Démonstration. Fixons un ouvert δ tel que $K \subset \delta \subset \overline{\delta} \subset \Omega$ et soit $\epsilon > 0$. La fonction Δu est harmonique au voisinage de K, d'après ([4], Lemma 1.8.) on peut trouver des points $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n \setminus K$ et des constantes $a_1, \dots, a_m$ tels que

$$|\Delta u(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi_k(|x - y_k|)| < \frac{\epsilon}{2||V_\delta 1||_\infty}, \ \forall x \in K.$$

L'inégalité a lieu dans un voisinage ouvert $\omega \subset \overline{\omega} \subset \delta$ de K puisque la fonction $\Delta u(x) - \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi_k(|\cdot - y_k|)$ est continue au voisinage de K. Soit ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que $K \subset \omega_1 \subset \overline{\omega_1} \subset \omega$ et $u \in \mathcal{B}H(\omega)$. Notons V_1 le noyau V_{ω_1}. On a alors

$$V_1(\Delta u - \sum_{k=1}^{m} a_k \Phi_k(|\cdot - y_k|)| < \frac{\epsilon}{2}$$

sur K. D'autre part, la fonction $u-\sum_{k=1}^{m} a_k\Psi_k(|\cdot-y_k|)+V_1(\Delta u-\sum_{k=1}^{m} a_k\Phi_k(|\cdot-y_k|))$ est harmonique dans ω_1, on peut trouver des points $z_1,...,z_l$ de $\mathbb{R}^n\setminus K$ et des réels $b_1,...,b_l$ tels que

$$|u-\sum_{k=1}^{m} a_k\Psi_k(|\cdot-y_k|)+V_1(\Delta u-\sum_{k=1}^{m} a_k\Phi_k(|\cdot-y_k|))-\sum_{k=1}^{m} b_k\Phi_k(|\cdot-z_k|)|<\frac{\epsilon}{2}$$

sur K. D'où

$$|u-\sum_{k=1}^{m} a_k\Psi_k(|\cdot-y_k|)-\sum_{k=1}^{m} b_k\Phi_k(|\cdot-z_k|)|<\epsilon.$$

□

Lemme 4.4. *Soit h est une fonction biharmonique dans $\mathbb{R}^n\setminus\overline{B(y,r)}$ et soit $R>r$. Alors il existe une fonction $H\in\mathcal{BH}(\mathbb{R}^n\setminus\{y\})$ telle que $|H-h|+|\Delta H-\Delta h|<\epsilon$ dans $\mathbb{R}^n\setminus\overline{B(y,R)}$.*

Démonstration. En tronquant convenablement la deuxième série du théorème 3.4 on obtient le résultat désiré. □

Démonstration du théorème 4.2. En vertu du lemme 4.3 et du théorème 4.1 il suffit de montrer que si $y\in\mathbb{R}^n\setminus K$, la fonction $h=\Psi_n(|\cdot-y|)$ peut étre uniformément approchée sur K par des fonctions de $\mathcal{B}H(\Omega)$. Considérons d'abord le cas où y appartient à une composante connexe bornée de $\mathbb{R}^n\setminus K$. Comme $\Omega^*\setminus K$ est connexe, il existe un point $z\in V\setminus\Omega$. Il existe des boules $\overline{B(y_1,r_1)},\ldots,\overline{B(y_m,r_m)}$ dans V où $y_m=z$ telles que $y_{k-1}\in B(y_k,r_k)$ pour tout $k\in\{1,2...,m\}$. Par application répétée du lemme 4.4 on obtient une fonction $v\in\mathcal{B}H(\mathbb{R}^n\setminus\{z\})$ telle que $|v-h|+|\Delta v-\Delta h|<\epsilon$ dans K. Considérons maintenant le cas où y appartient à la composante non bornée ω_∞ de $\mathbb{R}^n\setminus K$. Il existe une suite $(\overline{B(y_k,r_k)})$ de boules fermées dans ω_∞ telles que $y_0=y$, $r_k\le 1$ pour tout k, et $|y_k|\to\infty$ quand $k\to\infty$ et que $y_{k-1}\in B(y_k,r_k)$ pour tout $k\ge 1$. Le résultat découle encore d'une application répétée du lemme 4.4 avec ϵ remplacé par $2^{-k}\epsilon$. □

REFERENCES

[1] M. Brelot: *Eléments de la théorie classique du Potentiel*, C.D.U., Paris, 1965.

[2] Ch. Bensouda – M. El Kadiri: *Approximation biharmoniques sur les compacts*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **133** (2003), 7–19.

[3] M. Chadli – M. El Kadiri: *Approximation of continuous functions on compact sets by biharmonic functions*, Comment. Math. Univ. Carol., **44** (2003), 427–435.

[4] S. J. Gardiner: *Harmonic Approximation*, London Mathematical Society, Lecture Note Series 221, Cambridge University Press, 1995.

[5] L. L. Helms: *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[6] V. Smirnov: *Cours de Mathématiques supérieures*, Tome 3, (Ed. Mir), Moscou, 1970.

[7] J. L. Walsh: *The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions*, Bull. Amer. Math. Soc., (2) **35** (1929), 499–544.

Lavoro pervenuto alla redazione il 21 novembre 2003
ed accettato per la pubblicazione il 25 ottobre 2004.
Bozze licenziate il 1 settembre 2005

Indirizzo degli Autori:

Mustapha Chadli – Ecole Normale Supérieure – Fes, Morocco

Mohamed El Kadiri – B.P. 726 – Salé-Tabriquet – Salé, Morocco – E-mail: elkadiri@fsr.ac.ma