Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 26, Roma (2006), 351-365

Extensions multiples de catégories

GEORGES HOFF

Abstract: *Keeping an historical and unifying point of view, the cohomology of (small) categories in higher orders is interpreted by extensions of categories: double extensions and n-fold extensions.*

1 – Introduction

Dans la seconde partie de [7], en reprenant notre thèse, nous avons présenté une cohomologie des petites catégories qui généralise celle classique des groupes. Les coefficients y sont des modules. C'est alors que nous avons défini la notion d'extension de catégories (par un module) pour décrire la 2-cohomologie.

Dans [10] nous avons étendu l'interprétation en termes d'extensions à des cohomologies non nécessairement abéliennes et à coefficients non nécessairement fonctoriels. De plus, à l'aide des relations avec les catégories fibrées de Grothendieck, nous élargissions (au niveau des fibres) notre notion d'extensions et les cohomologies ainsi décrites.

Entre temps [3] a généralisé notre première cohomologie en prenant des systèmes naturels (voir ci-dessous) pour coefficients. La 2-cohomologie y est aussi décrite par des extensions (les extensions linéaires).

Dans [11] nous avons adopté un point de vue unificateur et généralisateur: en considérant différentes notions de noyaux pour des foncteurs quotients, on a différents types d'extensions. Dans chaque contexte on voit comment les 2-co-

Key Words and Phrases: *Double extension – Multiple extension – Cohomology of categories.*
A.M.S. Classification: 18G99 (primary) – 18G60 – 18D05 – 18D30 – 18A22 (secondary)

cycles apparaissent naturellement. Les 2-cohomologies classiques de Hochschild-Mitchell ([14] dont nous étudions au passage le besoin de commutativité), de Baues-Wirsching ([3]) et bien sûr de [7] sont des cas particuliers.

Par ailleurs [1] et [2] ont donné une interprétation en termes d'extensions de la cohomologie d'ordre supérieur de [3]. Ceci avait été étudié au paravant par [5] et [6] pour la cohomologie de [7].

Il s'agit ici de définir des extensions doubles qui donnent de la 3-cohomologie (sans avoir à passer par les 2-catégories comme dans [1] et [2]) puis des extensions multiples pour la cohomologie d'ordre supérieur (ce qui unifiera les travaux de [5], [6] et [2] mais aussi ceux de [12] et [16]). On entreverra alors les notions liées de longueur et d'épaisseur des extensions/noyaux.

Les différentes structures d'extensions de catégories interviennent souvent en homotopie, homologie ou K-théorie algébrique. Nos extensions de [7] ont servi à Porter pour l'étude des modules croisés et des catégories internes comme à Wojtkowiak dans son étude sur les limites homotopiques (voir références dans [10]). Nos extensions larges de [10] ont servi à [4] pour classifier des constructions algébriques, les produits croisés, que l'on trouve dans différents contextes comme les monoïdes, les systèmes de Clifford ou les "twisted group rings". L'apparition naturelle ci-dessous de catégories supérieures s'insère dans le débat très actuel sur les n-catégories. Signalons enfin que l'aspect homotopique des extensions de catégories monoïdales (e.g. [15]) permet d'envisager les extensions d'objets dans des catégories à homotopie et de rejoindre ainsi certains autres de nos travaux (e.g. [8] et [9]).

Comme dans nos articles précédents, nous pratiquons la cohomologie ($\mathbf{C}_0$-) normalisée (ci-dessous les conditions 3.2.2 et 5.1.2) contrairement à [3]. On peut voir dans [1] 1.9, et nous disions ceci à la fin de la première partie de [7], que les cohomologies normalisées ou non coïncident.

Hormis $\mathcal{G}r$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{C}at$, $\mathcal{N}at$, $\dots$, les catégories considérées sont petites. Si $\mathbf{C}$ est une catégorie, nous noterons $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2, \dots$ les ensembles de ses objets, de ses morphismes, de ses couples de morphismes composables, ... Si A et $B \in \mathbf{C}_0$ sont des objets, nous noterons $\mathbf{C}\ (A, B)$ l'ensemble des morphismes c de source $\alpha(c) = A$ et de but $\beta(c) = B$.

Définition 1.1 ([3]). Etant donnée une catégorie $\mathbf{C}$, la **catégorie des factorisations** de $\mathbf{C}$, notée $F\mathbf{C}$, est la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathbf{C}$ et ou les morphismes $c \to c'$ sont les couples (u, v) de morphismes de $\mathbf{C}$ tels que $c' = ucv$, la composition étant définie par $(u, v)(u', v') = (uu', v'v)$.

Définition 1.2 ([3]). Un **C-système naturel** est un foncteur $K : F\mathbf{C} \to \mathcal{A}b$ à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens.

Si K et K' sont des $\mathbf{C}$-systèmes naturels, une transformation naturelle $q : K \to K'$ est constituée d'homomorphismes de groupes $q(c) : K(c) \to K'(c)$ notés parfois simplement q. De plus, pour $k \in K(c)$ et $(u, v) : c \to c'$ nous noterons ${}^u k^v = K(u, v)(k) \in K(c')$ comme dans [11].

Les $\mathbf{C}$-systèmes naturels et les transformations naturelles entre tels forment une catégorie abélienne $\mathcal{N}at_{\mathbf{C}}$ qui généralise $\mathcal{M}od_{\mathbf{C}}$ de [7]. Un foncteur $p : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ définit un $\mathbf{H}$-système naturel tel que ${}^{h}k^{h'} = {}^{p(h)}k^{p(h')}$.

Dans [11] sont définies les (pan)extensions de $\mathbf{C}$ par K comme cas particuliers de panextensions de $\mathbf{C}$ par un groupoïde $\mathbf{K} = \coprod_{c \in \mathbf{C}_1} \mathbf{K}_c$. Ce sont exactement les extensions linéaires de [3].

Définition 1.3 ([3] et [11]). Une **extension** de la catégorie $\mathbf{C}$ par le $\mathbf{C}$-système naturel K est une suite $\mathbf{E}$: $K \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ où p est un foncteur quotient (i.e. plein et bijectif sur les objets) et où $\coprod_{c \in \mathbf{C}_1} K(c)$ opère sur $\mathbf{H}$ par

$$K(c) \times p^{-1}(c) \to p^{-1}(c) \;:\; (k, h) \mapsto k[h]$$

de sorte que l'on ait:

$$\text{(i)} \qquad k'k[h] = k'[k[h]] \;\text{ et }\; 1_{K(c)}[h] = h$$

pour $c \in \mathbf{C_1},\; h \in p^{-1}(c)$ et $k, k' \in K(c)$;

$$\text{(ii)} \qquad k'[h']k[h] = k''[h'h] \;\text{ avec }\; k'' = {}^{c'}k \cdot k'^{c} \;(= k'^{c} \cdot {}^{c'}k)$$

si $k' \in K(c'),\; k \in K(c),\; k'' \in K(c'c),\; h' \in p^{-1}(c'),\; h \in p^{-1}(c),\; (c', c) \in \mathbf{C_2}$;

$$(\star) \qquad p(h) = p(h') \Longleftrightarrow \exists!\; k \in K(p(h)), k[h] = h'\,.$$

Par commodité, on peut dire que les catégories $\mathbf{C}$ et $\mathbf{H}$ ont les mêmes objets.

L'auteur remercie A. de P. pour sa bienveillance et le referee pour sa très utile analyse.

2 – Extensions doubles

On considère une catégorie $\mathbf{C}$ et un $\mathbf{C}$-système naturel K.

Définition 2.1. Une **extension double** de $\mathbf{C}$ par K est une suite

$$\mathbf{E} :\; K \xrightarrow{i} L \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$$

définie par une extension $M \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ de $\mathbf{C}$ par un $\mathbf{C}$-système naturel M et une suite courte exacte de $\mathbf{C}$-systèmes naturels $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{q} M \to 1$, l'action $L \dashrightarrow \mathbf{H}$ étant la composée $L \xrightarrow{q} M \dashrightarrow \mathbf{H} :\; l[h] = q(l)[h]$.

On identifiera les éléments des groupes $K(c)$ à des éléments de $L(c)$ avec l'inclusion $i(c)$.

Dans le cas où K est un $\mathbf{C}$-module $\mathbf{C} \to \mathcal{A}b$ et avec des $\mathbf{C}$-modules L et M, on retrouve les extensions doubles de [5] et [6]. Si $\mathbf{C}$ est un groupe, on retrouve les suites exactes de longueur 4 qui interprètent aussi de la 3-cohomologie (voir [12] et [16] par exemple).

La démarche de [5] et [6] convient quand on a une extension de $\mathbf{C}$ par un K dont les composantes sont indexées par $\mathbf{C_0}$ (quand on a un $\mathbf{C}$-module). Mais si dans 2.1 on prenait une extension de catégories $K \dashrightarrow \coprod_{c\in\mathbf{C_1}} L(c) \to \coprod_{c\in\mathbf{C_1}} M(c)$, on augmenterait le nombre de groupes composant K qui serait $>$ card$\mathbf{C_1}$ et K ne pourrait pas être un $\mathbf{C}$-système naturel.

Comme on l'a vu dans 1.2, on a des $\mathbf{H}$-systèmes naturels définis par K, L, M et p. Quand on voudra envisager des extensions non fonctorielles, resp. non abéliennes, ce sont directement des $\mathbf{H}$-systèmes naturels, resp. des foncteurs $F\mathbf{C} \to \mathcal{G}r$, qu'il faudra considérer (voir [11] et [10]).

Définition 2.2. Si l'on a $h, h' \in \mathbf{H_1}$ tels que $p(h) = p(h') = c$, de par 1.3. il existe un unique $m \in M(c)$ tel que $m[h] = h'$; on notera alors $\mathcal{L}(h, h') = q(c)^{-1}(m) \subset L(c)$.

On peut dire que $\mathcal{L}(h, h) = K(c)$ car alors $m = 1_{M(c)}$ et l'image de l'inclusion $i(c)$ est le noyau de $q(c)$ de par l'exactitude.

Nous devons relier notre définition des extensions doubles avec les structures de [1] et [2] qui donnent de la 3-cohomologie: les track extensions.

Définition 2.3 ([2]). Une **track extension linéaire** de $\mathbf{C}$ par K est une suite

$$K \dashrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$$

telle que

(1) $\mathcal{H}$ est une 2-catégorie de catégorie sous-jacente $\mathbf{H}$ où tout 2-morphisme est inversible; l'ensemble des 2-morphismes entre $h, h' \in \mathbf{H}(A, B)$ est noté $\mathcal{H}(h, h')$, la composition verticale est notée "." et la composition horizontale est notée "$*$";

(2) $\mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ est un foncteur plein et identique sur les objets et on a

$$p(h) = p(h') \Longleftrightarrow \mathcal{H}(h, h') \neq \emptyset\,;$$

(3) l'action de K sur $\mathcal{H}$ est donnée par des isomorphismes de groupes

$$\sigma_h : \ K(p(h)) \to \mathcal{H}(h, h)$$

tels que

$$l.\sigma_h(k) = \sigma_{h'}(k).l \quad \text{pour} \quad l \in \mathcal{H}(h, h')\,,$$

$$\sigma_h(k) * 1_{h'} = \sigma_{hh'}(k^{c'}) \;\; \text{et} \;\; 1_h * \sigma_{h'}(k') = \sigma_{hh'}({}^{c}k')$$

pour $(h, h') \in \mathbf{H_2},\ c = p(h),\ c' = p(h')$.

Les track extensions linéaires de $\mathbf{C}$ par K sont les objets d'une catégorie dont l'ensemble des composantes connexes est noté $Text^2(\mathbf{C}, K)$.

Proposition 2.4. *Une extension double* $\mathbf{E}: \ K \xrightarrow{i} L \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ *définit une track extension linéaire* $\mathrm{Bau}(\mathbf{E}): \ K \dashrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$.

Preuve. a) On définit $\mathcal{H}(h,h')=\emptyset$ si $p(h) \neq p(h')$, sinon on pose $\mathcal{H}(h,h') = \mathcal{L}(h,h')$ défini en 2.1. La composition verticale est celle des $L(c)$: pour $m, m' \in M(c)$, on a

$$l \in q(c)^{-1}(m) \ \text{ et } \ l' \in q(c)^{-1}(m') \Rightarrow ll' \in q(c)^{-1}(mm')$$

car $q(c)$ est un homomorphisme de groupes. La composition horizontale $L(c) \times L(c') \to L(cc')$, pour $(c,c') \in \mathbf{C_2}$, est donnée par $(l,l') \mapsto l * l' = l^{c'}.^{c}l'$. On vérifie alors que l'on a bien une 2-catégorie:

i) pour $(c,c',c'') \in \mathbf{C_3}$ et $l \in L(c)$, $l' \in L(c')$, $l'' \in L(c'')$, on a

$$\begin{aligned} l * (l' * l'') &= l^{c'c''} \cdot^{c} (l' * l'') = l^{c'c''} \cdot^{c} (l'^{c''} \cdot^{c'} l'') = \\ &= l^{c'c''} \cdot^{c} l'^{c''} \cdot^{cc'} l'' = (l * l') * l'' \end{aligned}$$

de par la fonctorialité de ${}^{c}(\ )$ et $(\ )^{c''}$;

ii) la fonctorialité de ${}^{c}(\ )^{c'}$ donne $1_{L(c)} * l' =^{c} l'$ et $l * 1_{L(c')} = l^{c'}$;

iii) on a $l[h]l'[h'] = l * l'[hh']$ car, de par la définition de $L \dashrightarrow \mathbf{H}$ via q et $M \dashrightarrow \mathbf{H}$, on a

$$\begin{aligned} l * l'[hh'] &= (l^{c'} \cdot^{c} l')[hh'] = q(c)(l)^{c'} \cdot^{c} q(c')(l')[hh'] = \\ &= q(c)(l)[h]q(c')(l')[h'] = l[h]l'[h']\,; \end{aligned}$$

iv) la relation d'interchange $(l * l') \cdot (l_1 * l'_1) = (l \cdot l_1) * (l' \cdot l'_1)$ est alors donnée par la commutativité et la fonctorialité:

$$\begin{aligned} (l * l') \cdot (l_1 * l'_1) &= (l^{c'} \cdot^{c} l') \cdot (l_1^{c'} \cdot^{c} l'_1) = l^{c'} \cdot l_1^{c'} \cdot^{c} l' \cdot^{c} l'_1 = \\ &= (l \cdot l_1)^{c'} \cdot^{c} (l' \cdot l'_1) = (l \cdot l_1) * (l' \cdot l'_1)\,. \end{aligned}$$

b) On a bien p plein et identique sur les objets avec $p(h) = p(h')$ si et seulement si $\mathcal{H}(h,h') = \mathcal{L}(h,h') \neq \emptyset$.

c) Pour $h \in \mathbf{H_1}$ et $p(h) = c$ on a vu en 2.2 que

$$\mathcal{H}(h,h) = \mathcal{L}(h,h) = q(c)^{-1}(1_{M(c)}) = i(c)(K(c)) = K(c)\,.$$

On posera donc $\sigma_h(k) = k$ quand $k \in K(p(h))$. De par la commutativité des $L(c)$ et la propriété ii) ci-dessus, on a bien les relations de 2.3(3). ∎

Ceci est un premier lien entre nos extensions doubles (de longueur 4 dans $\mathcal{C}at$) et les track extensions (de longueur 3 avec une 2-catégorie).

Définition 2.5. Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ deux extensions doubles de $\mathbf{C}$ par K. Un **morphisme d'extensions doubles** $\Lambda: \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est la donnée d'une transformation naturelle $\lambda: L \to L'$ et d'un foncteur $\eta: \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ tels que:

$$p'\eta = p, \quad \lambda i = i', \quad \lambda(l)[\eta(h)] = \eta(l[h]) .$$

On remarque qu'en posant $\mu(m) = q'\lambda(l)$ avec $l \in q(c)^{-1}(m)$, on a une transformation naturelle $\mu: M \to M'$ telle que $q'\lambda = \mu q$ et $\mu(m)[\eta(h)] = \eta(m[h])$.

Définition 2.6. On appelle **congruence** la relation d'équivalence entre extensions doubles de $\mathbf{C}$ par K engendrée par l'existence d'un morphisme $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$. On notera $\mathrm{Ext}_2(\mathbf{C}, K)$ l'ensemble des classes de congruence d'extensions doubles de $\mathbf{C}$ par K.

Les extensions doubles de $\mathbf{C}$ par K et les morphismes d'extensions doubles forment une catégorie dont $\mathrm{Ext}_2(\mathbf{C}, K)$ est l'ensemble des composantes connexes.

3 – Cocycles

Considérons une extension double $\mathbf{E}: K \xrightarrow{i} L \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$.

Définition 3.1. Une **section** de l'extension double $\mathbf{E}$ est la donnée (s, t) d'applications

$s: \mathbf{C_1} \to \mathbf{H_1}$ telle que $ps = 1_{\mathbf{C_1}}$ et $s(\mathbf{C_0}) = \mathbf{H_0}$,
$t: \mathbf{C_2} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} L(f)$ telle que $t(c, c') \in \mathcal{L}(s(cc'), s(c)s(c'))$ est l'identité si c ou c' est dans $\mathbf{C_0}$.

L'application s est une section de l'extension $M \dashrightarrow \mathbf{H} \xrightarrow{p} \mathbf{C}$ au sens de [8] et on a $s(c)s(c') = t(c, c')[s(cc')]$. Comme $p(s(c)s(c')) = p(s(cc')) = cc'$ on a:

$${}^{s(c)s(c')}m = {}^{s(cc')}m = {}^{cc'}m, \quad {}^{s(c)s(c')}l = {}^{s(cc')}l = {}^{cc'}l \dots$$

Il en irait autrement si l'extension de $\mathbf{C}$ était le fait d'un $\mathbf{K} = \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} \mathbf{K}_f$ qui ne serait pas défini par un $\mathbf{C}$-système naturel (voir [11]).

Proposition 3.2. *Une section (s, t) de $\mathbf{E}$ définit une application*

$$\psi: \mathbf{C_3} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} K(f)$$

telle que

1) $\psi(c,c',c'') \in K(cc'c'')$,
2) $\psi(c,c',c'') = 1_{K(cc'c'')}$ *si* c *ou* c' *ou* $c'' \in \mathbf{C_0}$,
3) ${}^{c}\psi\,(c',c'',c''')\,\psi\,(cc',c'',c''')^{-1}\,\psi\,(c,c'c'',c''')\,\psi\,(c,c',c''c''')^{-1}\,\psi\,(c,c',c'')^{c'''} = 1_{K(cc'c''c''')}\quad \forall (c,c',c'',c''') \in \mathbf{C_4}$.

La dernière propriété est une relation pentagonale de cocycle du type $\delta\psi$ $(c,c',c'')=1_{K(cc'c'')}$. Dans le cas non commutatif $\psi(c,c',c'')$ mesurera la différence de ${}^{s(c)}({}^{s(c')}({}^{s(c'')}k))$ et ${}^{s(cc'c'')}k$ et la même chose à droite. Le lecteur verra comment, généralisant (comme [16]) ce que l'on a dans [13], ψ apparaît comme une obstruction à l'extension de $\mathbf{C}$ par K.

Preuve. 1) De par les définitions, on a:

$$\begin{aligned}
\exists! m_1,\ \ s(c)s(c') &= m_1[s(cc')] \quad \text{et} \quad m_1 = q(t(c,c'))\,,\\
\exists! m_2,\ \ s(c)s(c'c'') &= m_2[s(cc'c'')] \quad \text{et} \quad m_2 = q(t(c,c'c''))\,,\\
\exists! m_3,\ \ s(cc')s(c'') &= m_3[s(cc'c'')] \quad \text{et} \quad m_3 = q(t(cc',c''))\,,\\
\exists! m_4,\ \ s(c')s(c'') &= m_4[s(c'c'')] \quad \text{et} \quad m_4 = q(t(c',c''))\,.
\end{aligned}$$

Ayant ${}^{c}m_4 = q({}^{c}t(c',c''))$ et $m_1^{c''} = q(t(c,c')^{c''})$, car q est un morphisme de systèmes naturels (une transformation naturelle), considérons

$$q({}^{c}t(c',c'')t(c,c'c'')t(cc',c'')^{-1}(t(c,c')^{-1})^{c''}) = {}^{c}m_4 m_2 m_3^{-1}(m_1^{-1})^{c''}\,. \tag{1}$$

Par ailleurs, on a selon les calculs de [11]:

$$\begin{aligned}
s(c)s(c')s(c'') = m_1[s(cc')]s(c'') = m_1^{c''}[s(cc')s(c'')] &= m_1^{c''}\cdot m_3[s(cc'c'')]\\
= s(c)m_4[s(c'c'')] = {}^{c}m_4[s(c)s(c'c'')] &= {}^{c}m_4 m_2[s(cc'c'')]
\end{aligned}$$

et l'unicité dans $(\star)$ de 1.3 nous dit que ${}^{c}m_4 m_2 = m_1^{c''}\cdot m_3$ et donc

$$ {}^{c}m_4 m_2 m_3^{-1}(m_1^{c''})^{-1} = 1_{M(cc'c'')}\,. \tag{2}$$

Ayant (1) et (2) dans la suite courte exacte de systèmes naturels $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 1$, il existe un unique $\psi(c,c',c'') \in K(cc'c'')$ tel que

$$i(\psi(c,c',c'')) = {}^{c}t(c',c'')t(c,c'c'')t(cc',c'')^{-1}(t(c,c')^{-1})^{c''}\,.$$

On peut considérer $K \overset{i}{\hookrightarrow} L$ et omettre de l'écrire dans la suite.

2) Si $c \in \mathbf{C_0}$, on a $t(c,c'c'') = 1_{L(cc'c'')}$, $t(c,c') = 1_{L(cc')}$, ${}^{c}t(c',c'') = t(c',c'')$ et $t(cc',c'') = t(c',c'')$ d'où $\psi(c,c',c'') = t(c',c'')t(c',c'')^{-1} = 1_{L(cc'c'')}$.

Si $c' \in \mathbf{C_0}$, on a $t(c',c'') = 1_{L(c'c'')}$, $t(c,c'c'') = t(c,c'')$, $t(cc',c'') = t(c,c'')$ et $t(c,c') = 1_{L(cc')}$ d'où $\psi(c,c',c'') = t(c,c'')t(c,c"")^{-1} = 1_{L(cc'c'')}$.

Si $c'' \in \mathbf{C_0}$, on a $t(c',c'') = 1_{L(c'c'')}$, $t(c,c'c'') = t(c,c')$, $t(cc',c'') = 1_{L(cc'c'')}$ et $t(c,c')^{c''} = t(c,c')$ d'où $\psi(c,c',c'') = t(c,c')t(c,c')^{-1} = 1_{L(cc'c'')}$.

3) Comme on a:

$$\begin{aligned}
{}^{c}\psi(c',c'',c''') &= {}^{c}({}^{c'}t(c'',c''')t(c',c''c''')t(c'c'',c''')^{-1}(t(c',c'')^{-1})^{c'''}) = \\
&= {}^{cc'}t(c'',c''') \cdot{}^{c} t(c',c''c''') \cdot{}^{c} t(c'c'',c''')^{-1} \cdot{}^{c} (t(c',c'')^{-1})^{c'''} ;\\
\psi(cc',c'',c''')^{-1} &= ({}^{cc'}t(c'',c''')t(cc',c''c''')t(cc'c'',c''')^{-1}(t(cc',c'')^{-1})^{c'''})^{-1} = \\
&= t(cc',c'')^{c'''} \cdot t(cc'c'',c''') \cdot t(cc',c''c''')^{-1} \cdot{}^{cc'} t(c'',c''')^{-1} ;\\
\psi(c,c'c'',c''') &= {}^{c}(c'c'',c''')t(c,c'c''c''')t(cc'c'',c''')^{-1}(t(c,c'c'')^{-1})^{c'''} ;\\
\psi(c,c',c''c''')^{-1} &= ({}^{c}t(c',c''c''')t(c,c'c''c''')t(cc',c''c''')^{-1}(t(c,c')^{-1})^{c''c'''})^{-1} = \\
&= t(c,c')^{c''c'''} \cdot t(cc',c''c''') \cdot t(c,c'c''c''')^{-1} \cdot{}^{c} t(c',c''c''')^{-1} ;\\
\psi(c,c',c'')^{c'''} &= ({}^{c}t(c',c'')t(c,c'c'')t(cc',c'')^{-1}(t(c,c')^{-1})^{c''})^{c'''} = \\
&= {}^{c}t(c',c'')^{c'''} \cdot t(c,c'c'')^{c'''} \cdot (t(cc',c'')^{-1})^{c'''} \cdot (t(c,c')^{-1})^{c''c'''} ;
\end{aligned}$$

en effectuant le produit de ces cinq expressions et en utilisant la commutativité dans $L(cc'c''c''')$, on a le résultat. ∎

Définition 3.3. L'application ψ est appelée le **3-cocycle associé** à l'extension double $\mathbf{E}$ par la section (s,t).

Proposition 3.4. *Soient ψ et ψ' les 3-cocycles associés à $\mathbf{E}$ par des sections (s,t) et (s',t') respectivement. Il existe une application*

$$\tau : \mathbf{C_2} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} K(f)$$

telle que

1) $\tau(c,c') \in K(cc')$.
2) $\psi'(c,c',c'') = {}^{c}\tau(c',c'')\tau(c,c'c'')\psi(c,c',c'')\tau(cc',c'')^{-1}(\tau(c,c')^{-1})^{c''}$ $\forall (c,c',c'') \in \mathbf{C_3}$.

Ceci fournit une relation de cohomologie entre les cocycles et ψ est cohomologue à $\{1_{K(cc'c'')}\}$ si ψ est un cobord $\delta\tau$. La 2-cochaîne τ n'est pas un 2-cocycle car on n'a pas $\delta\tau = 0$.

Preuve. 1) De par $(\star)$ de 1.3, on a une application $u : \mathbf{C_1} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} M(f)$ telle que $s'(c) = u(c)[s(c)]$. Suivant les notations de la proposition précédente, on a $s(c)s(c') = m_1[s(cc')]$ avec $m_1 = q(t(c,c'))$ et $s'(c)s'(c') = m'_1[s'(cc')]$ avec $m'_1 = q(t'(c,c'))$. Utilisant (ii) de 1.3, on a

$$\begin{aligned} s'(c)s'(c') &= u(c)[s(c)]u(c')[s(c')] = \\ &= u(c)^{c'} \cdot {}^{c} u(c')[s(c)s(c')] = u(c)^{c'} \cdot {}^{c} u(c') \cdot m_1[s(cc')]\,, \end{aligned}$$

or on a: $s'(c)s'(c') = m'_1[s(cc')] = m'_1 u(cc')[s(cc')]$, et de par l'unicité dans $(\star)$ de 1.3, il vient:

$$m'_1 = u(c)^{c'} \cdot {}^{c} u(c') m_1 u(cc')^{-1} \quad \text{ou} \quad m_1 = {}^{c}u(c')^{-1}(u(c)^{c'})^{-1} m'_1 u(cc')\,.$$

Pour chaque $c \in \mathbf{C_1}$, choisissons $v(c) \in q^{-1}(u(c))$ et posons

$$\tau(c,c') = {}^{c}v(c')^{-1}(v(c)^{c'})^{-1} t'(c,c') v(cc') t(c,c')^{-1} \in L(cc')\,.$$

Il vient alors

$$q(\tau(c,c')) = {}^{c}u(c')^{-1}(u(c)^{c'})^{-1} m'_1 u(cc') m_1^{-1} = m_1 m_1^{-1} = 1_{M(cc')}\,.$$

Et de par l'exactitude de $1 \to K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{q} M \to 1$, on a alors $\tau(c,c') \in K(cc')$.

2) Revenant aux définitions de ψ, ψ' et τ on a:

$$\begin{aligned} \psi(c,c',c'') &= {}^{c}t(c',c'')t(c,c'c'')t(cc',c'')^{-1}(t(c,c')^{-1})^{c''}\,, \\ \psi'(c,c',c'') &= {}^{c}t'(c',c'')t'(c,c'c'')t'(cc',c'')^{-1}(t'(c,c')^{-1})^{c''}\,, \\ {}^{c}\tau(c',c'') &= {}^{cc'}v(c'')^{-1} \cdot ({}^{c}v(c')^{c''})^{-1} \cdot^{c} t'(c',c'') \cdot^{c} v(c'c'') \cdot^{c} t(c',c'')^{-1}\,, \\ \tau(c,c'c'') &= {}^{c}v(c'c'')^{-1}(v(c)^{c'c''})^{-1} t'(c,c'c'') v(cc'c'') t(c,c'c'')^{-1}\,, \\ \tau(cc',c'')^{-1} &= t(cc',c'').v(cc'c'')^{-1} \cdot t'(cc',c'')^{-1} \cdot v(cc')^{c''} \cdot^{cc'} v(c'')\,, \\ (\tau(c,c')^{-1})^{c''} &= t(c,c')^{c''} \cdot (v(cc')^{c''})^{-1}(t'(c,c')^{c''})^{-1} \cdot v(c)^{c'c''} \cdot^{c} v(c')^{c''}\,. \end{aligned}$$

En reportant ceci dans la relation on a bien l'égalité. □

4 – Cohomologie

La cohomologie d'une catégorie $\mathbf{C}$ à coefficients dans un $\mathbf{C}$-système naturel K a été définie dans [3] et généralise, via les foncteurs d'oubli $F\mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{C}$, la cohomologie à coefficients dans un $\mathbf{C}$-bimodule de [14] et celle à coefficients dans un $\mathbf{C}$-module de [7].

Définition 4.1. Un **3-cocycle** de $\mathbf{C}$ vers K est la donnée d'une application

$$\psi : \mathbf{C}_3 \to \coprod_{f \in \mathbf{C}_1} K(f)$$

vérifiant les propriétés de 3.2.

Définition 4.2. Deux 3-cocycles ψ et ψ' de $\mathbf{C}$ vers K sont dits **cohomologues** s'il existe une application

$$\tau : \mathbf{C}_2 \to \coprod_{f \in \mathbf{C}_1} K(f)$$

vérifiant les propriétés de 3.3.

La relation de cohomologie ainsi définie est une relation d'équivalence sur l'ensemble des 3-cocycles de $\mathbf{C}$ vers K.

Définition 4.3. L'ensemble des classes de cohomologie de 3-cocycles de $\mathbf{C}$ vers K est appelé l'ensemble de **cohomologie de dimension** 3 de $\mathbf{C}$ vers K et est noté $H^3(\mathbf{C}, K)$.

Proposition 4.4. *Soient* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *deux extensions doubles de* $\mathbf{C}$ *par* K *congrues. Si* ψ *est un* 3*-cocycle associé à* $\mathbf{E}$*, alors* ψ *est cohomologue à un* 3*-cocycle associé à* $\mathbf{E}'$*.*

Preuve. a) Soit (s, t) la section qui associe ψ à $\mathbf{E}$. Si on a un morphisme $\Lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, on pose $s'(c) = \eta(s(c))$ et $t'(c, c') = \lambda(t(c, c'))$. De par 2.5, (s', t') est une section de $\mathbf{E}'$ et comme λ est une transformation naturelle, on a

$$\begin{aligned}
i(\psi(c, c', c'')) &= {}^{c}t(c', c'')t(c, c'c'')t(cc', c'')^{-1}(t(c, c')^{c''})^{-1}\,,\\
\lambda i(\psi(c, c', c'')) &= {}^{c}\lambda t(c', c'')\lambda t(c, c'c'')\lambda t(cc', c'')^{-1}(\lambda t(c, c')^{c''})^{-1}\,,\\
i'(\psi(c, c', c'')) &= {}^{c}t'(c', c'')t'(c, c'c'')t'(cc', c'')^{-1}(t'(c, c')^{c''})^{-1}\,,
\end{aligned}$$

i.e. la section (s', t') associe ψ à $\mathbf{E}'$.

b) Si $\Lambda : \mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ est un morphisme et ψ' est un 3-cocycle associé à $\mathbf{E}'$, on montre, comme en a), que ψ' est un 3-cocycle associé à $\mathbf{E}$. Les cocycles ψ et ψ' sont cohomologues de par 3.4.

c) En appliquant a) et/ou b) un nombre fini de fois, on a le résultat. ∎

Théorème 4.5. *L'application qui à chaque extension double de* $\mathbf{C}$ *par* K *associe la classe de cohomologie de ses* 3*-cocycles associés définit une bijection*

$$\omega : \ \mathrm{Ext}_2(\mathbf{C}, K) \to H^3(\mathbf{C}, K)\,.$$

Preuve. a) De par 3.2, 3.4 et 4.4, l'application ω est bien définie.

b) L'application ω est surjective. En effet si ψ est un 3-cocycle de $\mathbf{C}$ vers K, nous allons construire une extension double à laquelle ψ est associée. Pour $f \in \mathbf{C}_1$, on considère le groupe abélien $T(f)$ défini par les générateurs $\{t(c,c')^{c''};\ (c,c',c'') \in \mathbf{C}_3,\ cc'c'' = f\}$ et les relations $t(1,c')^{c''} = t(c,1)^{c''} = 1_{T(f)}$. On pose alors $L(f) = K(f) \times T(f)$ qui donne une structure de $\mathbf{C}$-système naturel avec celle de K et en posant:

$$^{d}(t(c,c')^{c''})^{d'} = \psi(d,c,c')^{c''d'} \cdot t(d,c)^{c'c''d'} \cdot t(dc,c')^{c''d'} \cdot (t(d,cc')^{c''d'})^{-1}\,.$$

Remarquons que l'on a une application $t:\ \mathbf{C}_2 \to \coprod_{f\in\mathbf{C}_1} L(f):\ (c,c') \mapsto t(c,c')^1$. Si l'on considère $M = L/K$, alors t fournit un 2-cocycle $\overline{t}$ de $\mathbf{C}$ vers M. En reprenant [11] page 35, on construit alors une (pan)extension $M \dashrightarrow \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ de $\mathbf{C}$ par M dont $\overline{t}$ est le 2-cocycle associé à une section s. On a ainsi construit une extension double

$$\varepsilon(\psi):\quad K \to L \dashrightarrow \mathbf{H} \to \mathbf{C}$$

dont ψ est le 3-cocycle associé par la section (s,t).

c) On a l'injectivité de ω en montrant que l'application ε définie en b) est inverse de ω. On a vu que $\omega\varepsilon = 1_{H^3(\mathbf{C},K)}$, il reste $\varepsilon\omega = 1_{\mathrm{Ext}_2(\mathbf{C},K)}$. Soit $\mathbf{E}$ une extension double de 3-cocycle ψ associé par la section (t',s'). On a un morphisme d'extensions doubles $\varepsilon(\psi) \to \mathbf{E}$ en posant

$$\lambda(k,t(c,c')^{c''}) = k \cdot t'(c,c')^{c''},\ \ \eta(c,\overline{(k,t(c,c')^{c''})}) = k \cdot t'(c,c')^{c''}[s'(c)]\,,$$

les extensions doubles $\mathbf{E}$ et $\epsilon(\psi)$ sont donc congrues. □

Corollaire 4.6. *L'application de* 2.4 *définit une bijection*

$$\overline{\mathrm{Bau}}:\ \mathrm{Ext}_2(\mathbf{C},K) \to \mathrm{Text}^2(\mathbf{C},K)\,.$$

Preuve. Un morphisme d'extensions doubles $\Lambda:\ \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ définit un morphisme de track extensions $\mathrm{Bau}(\Lambda):\ \mathrm{Bau}(\mathbf{E}) \to \mathrm{Bau}(\mathbf{E}')$, l'application $\overline{\mathrm{Bau}}$ est donc bien définie. La même donnée (s,t) définit un 3-cocycle de $\mathbf{E}$ vers K comme en 3.2 et le même 3-cocycle de $\mathrm{Bau}(\mathbf{E})$ vers K comme en [1]4.4. La bijection ω de 4.5 se factorise par $\overline{\mathrm{Bau}}$ suivie de la bijection $\mathrm{Text}^2(\mathbf{C},K) \to H^3(\mathbf{C},K)$ de [2]. □

5 – Extensions multiples

Conformément à [3], et à [1] pour l'aspect normalisé, nous considérons la cohomologie suivante que nous allons interpréter en termes d'extensions.

Définition 5.1. La **cohomologie de la catégorie C** à coefficients dans un **C**-système naturel K est la cohomologie du complexe dont les n-cochaînes sont les applications

$$\psi : \mathbf{C_n} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} K(f)$$

telles que

1) $\psi(c_1, \dots, c_n) \in K(c_1 \dots c_n)$,
2) $\psi(c_1, \dots, c_n) = 1_{K(c_1 \dots c_n)}$ si $c_i \in \mathbf{C_0}$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$,
3) le cobord $\delta\psi$ est défini par:

$$\begin{aligned}(\delta\psi)(c_1, \dots, c_{n+1}) = \; & {}^{c_1}\psi(c_2, \dots, c_{n+1})\psi(c_1c_2, \dots, c_n)^{-1} \\ & \dots \psi(c_1, \dots, c_ic_{i+1}, \dots c_n)^{(-1)^i} \\ & \dots \psi(c_1, \dots, c_nc_{n+1})^{(-1)^n}[\psi(c_1, \dots, c_n)^{c_{n+1}}]^{(-1)^{n+1}} .\end{aligned}$$

Pour $n = 2$, respectivement 3, on retrouve les 2-cocycles de [11] et les 3-cocycles de 4.1 respectivement. Cela généralise la cohomologie à coefficients dans un **C**-module de [7].

Définition 5.2. Une **extension n-uple** de **C** par K est la donnée d'une suite

$$\mathbf{E}: \quad K \overset{i}{\to} L_{n-1} \overset{l_{n-2}}{\to} \dots \overset{l_3}{\to} L_2 \overset{l_1}{\to} L_1 \dashrightarrow \mathbf{H} \overset{p}{\to} \mathbf{C}$$

définie par une suite exacte dans $\mathcal{N}\mathrm{at}_{\mathbf{C}}$

$$1 \to K \to L_{n-1} \to \dots \to L_2 \to M_1 \to 1$$

et une extension double $M_1 \to L_1 \dashrightarrow \mathbf{H} \to \mathbf{C}$.

L'exactitude de la suite de $\mathcal{N}at_{\mathbf{C}}$ peut s'exprimer, pour $j > 2$, par des factorisations $L_j \to M_{j-1} \to L_{j-1}$ où un monomorphisme suit un épimorphisme. Ceci montre que, dans le cas où l'on considère des **C**-modules à la place des **C**-systèmes naturels, on retrouve exactement les extensions n-uples de [5] et [6].

Définition 5.3 ([2]). Une **track extension n-uple** de **C** par K est la donnée d'une suite

$$K \to D_{n-1} \to \dots \to D_2 \to D_1 \dashrightarrow \mathcal{H} \to \mathbf{C}$$

définie par une suite exacte dans $\mathcal{N}\mathrm{at}_{\mathbf{C}}$

$$1 \to K \to D_{n-1} \to \dots \to D_1 \to 1$$

et une track extension linéaire $D_1 \dashrightarrow \mathcal{H} \to \mathbf{C}$.

Les track extensions n-uples sont les objets d'une catégorie dont l'ensemble des composantes connexes est noté $\mathrm{Text}^n(\mathbf{C}, K)$.

Proposition 5.4. *Une extension n-uple* $\mathbf{E}$ *de* $\mathbf{C}$ *par* K *définit une track extension* $\mathrm{Bau}(\mathbf{E})$ *de* $\mathbf{C}$ *par* K*.*

Preuve. En posant $D_j = L_j$ pour $n-1 \geq j \geq 2$ et $D_1 = M_1$ dans 5.2, on a la suite exacte $1 \to K \to D_{n-1} \to \ldots \to D_1 \to 1$. De par 2.4, l'extension double $M_1 \to L_1 \dashrightarrow \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ définit une track extension linéaire $D_1 \dashrightarrow \mathcal{H} \to \mathbf{C}$. ∎

Cela explique pourquoi $D_2 \to D_1$ est un épimorphisme dans 5.3: dans la "suite exacte" $\mathbf{E}$ de systèmes naturels qui se termine à droite par deux catégories, c'est en fait la factorisation par l'image de $L_2 \to L_1$.

Définition 5.5. Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ deux extensions n-uples de $\mathbf{C}$ par K. Un **morphisme d'extensions n-uples** $\Lambda : \mathbf{E} \to \mathbf{E}'$ est la donnée de transformations naturelles $\lambda_j : L_j \to L'_j$ et d'un foncteur $\eta : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ tels que

$$\lambda_{n-1} i = i',\ \lambda_j l_{j+1} = l'_{j+1}\lambda_{j+1}$$
$$\eta(l[h]) = \lambda_1(l)[\eta(h)]$$
$$p = p'\eta\,.$$

Définition 5.6. On appelle **congruence** la relation d'équivalence entre les extensions n-uples de $\mathbf{C}$ par K engendrée par l'existence d'un morphisme $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$. On notera $\mathrm{Ext}_n(\mathbf{C}, K)$ l'ensemble des classes de congruence d'extensions n-uples de $\mathbf{C}$ par K.

Les extensions n-uples de $\mathbf{C}$ par K et les morphismes d'icelles forment une catégorie dont $\mathrm{Ext}_n(\mathbf{C}, K)$ est l'ensemble des composantes connexes.

Proposition 5.7. *L'application de* 5.4 *définit une bijection*

$$\overline{\mathrm{Bau}} :\ \mathrm{Ext}_n(\mathbf{C}, K) \to \mathrm{Text}^n(\mathbf{C}, K)\,.$$

Preuve. Une congruence entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$ donne une congruence entre $\mathrm{Bau}(\mathbf{E})$ et $\mathrm{Bau}(\mathbf{E}')$: l'application est bien définie. La réciproque étant vraie, l'application est injective. Si l'on a une track extension n-uple $K \to \ldots\ M_1 \dashrightarrow \mathcal{H} \to \mathbf{C}$, la bijection $\overline{\mathrm{Bau}} : \mathrm{Ext}_2(\mathbf{C}, M_1) \to \mathrm{Text}^2(\mathbf{C}, M_1)$ de 4.6 donne une track extension n-uple $K \to \ldots\ M_1 \dashrightarrow \mathrm{Bau}(\mathbf{H}) \to \mathbf{C}$ congrue à la première et montre la surjectivité de l'application. ∎

Théorème 5.8. *On a une bijection*

$$\omega :\ \mathrm{Ext}_n(\mathbf{C}, K) \to H^{n+1}(\mathbf{C}, K)\,.$$

Preuve. De par [2]5.3, on a une bijection $\mathrm{Text}^n(\mathbf{C}, K) \to H^{n+1}(\mathbf{C}, K)$ qui, composée avec celle de 5.7 donne ω. $\square$

On pourra voir comment la donnée (s, t_j) d'applications $s : \mathbf{C_1} \to \mathbf{H_1}$ et $t_j : \mathbf{C_j} \to \coprod_{f \in \mathbf{C_1}} L_j(f)$, vérifiant des conditions généralisant 3.1, peut définir un (n+1)-cocycle associé à l'extension $\mathbf{E}$.

La donnée d'une extension n-uple $\mathbf{E}$ (de longueur n+2 dans $\mathcal{C}at$) définit une n-catégorie $\mathcal{H}$ dont la catégorie sous-jascente est $\mathbf{H}$ et dont les (j+1)-morphismes sont les éléments de $\coprod_{f \in C_1} L_j(f)$ et donc une “extension” (de longueur 3) $K \dashrightarrow \mathcal{H} \to \mathbf{C}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. J. Baues – W. Dreckmann: *The cohomology of homotopy categories and the general linear group*, K-theory, **3** (1989), 307-338.

[2] H. J. Baues – E. G. Minian: *Track extensions of categories and cohomology*, K-theory, **23** (2001), 1-13.

[3] H. J. Baues – G. Wirsching: *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Algebra, **38** (1985), 187-211.

[4] A. M. Cegarra – A. R. Garzón – A. R. Grandjean: *Graded extensions of categories*, J. Pure Appl. Algebra, **154** (2000), 117-141.

[5] T. Datuashvili: *On the cohomology of categories* (russian), Trudy Tbiliss. Mat. Inst., **62** (1979), 28-37.

[6] M. Golasinski: *n-fold extensions and cohomology of small categories*, Mathematica (Cluj), **31** (1989), 53-59.

[7] G. Hoff: *On the cohomology of categories*, Rend. Mat., **7** (1974), 169-192.

[8] G. Hoff: *Categorical homotopy*, Quaestiones Mathematicae, **2** (1977), 419-432.

[9] G. Hoff: *Aspects de l'homotopie concrète*, Communications Fac. Sci. Ankara, **32** (1983), 13-24.

[10] G. Hoff: *Cohomologies et extensions de catégories*, Math. Scand., **74** (1994), 191-207.

[11] G. Hoff: *Diextensions et panextensions de catégories*, Math. Scand., **93** (2003), 23-40.

[12] D. F. Holt: *An interpretation of the cohomology groups $H^n(G,M)$*, J. of Algebra, **60** (1979), 307-320.

[13] S. MacLane: *Homology*, Springer, 1963.

[14] B. Mitchell: *Rings with several objects*, Adv. Math., **8** (1972), 1-161.

[15] A. Rousseau: *Bicatégories monoïdales et extensions de gr-categories*, Homology, homotopy and appl., **5** (2003), 437-547.

[16] Y. C. Wu: *H^3(G,A) and obstructions of group extensions*, J. Pure Appl. Algebra, **12** (1978), 93-100.

Lavoro pervenuto alla redazione il 9 giugno 2005
ed accettato per la pubblicazione il 21 aprile 2006.
Bozze licenziate il 26 settembre 2006

Indirizzo dell'Autore:

Georges Hoff – LAGA (UMR 7539 du CNRS) – Institut Galilée – Avenue J.B.Clément – F-93430 Villetaneuse
E-mail: hoff@math.univ-paris13.fr