Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 30, Roma (2010), 145-181

Correnti positive e varietà complesse

LUCIA ALESSANDRINI

Abstract: *Questo testo rappresenta un proseguimento di* [1]*, con lo scopo di aggiornare la tematica ai lavori usciti negli ultimi dieci anni. In particolare esamineremo i risultati di estensione, di regolarizzazione, di prodotto e di pull-back riguardo a correnti positive non necessariamente chiuse, sia per varietà complesse qualsiasi che per varietà compatte kähleriane.*

1 – Introduzione

Per lo studio delle correnti e più in generale della geometria differenziale complessa e della teoria del potenziale, il testo di riferimento resta il libro di Demailly [22], anche se possiamo segnalare altre esposizioni divulgative più specifiche, per esempio [15] per la teoria del potenziale. Invece lo scopo di questo lavoro è di fare il punto sui progressi che si sono avuti in questi ultimi anni (facendo seguito ad [1]) riguardo ad alcuni problemi e tecniche particolarmente importanti nella teoria delle correnti positive e delle loro applicazioni.

Riprenderemo in esame innanzitutto le tecniche di estensione di correnti positive attraverso ostacoli di vario tipo: chiusi, insiemi pluripolari, sottovarietà CR, sottoinsiemi analitici. Questo ci introduce ai passaggi successivi, poiché risultati di estensione attraverso sottoinsiemi analitici sono alla base delle costruzioni di pull-back e di prodotto di correnti. Tali tematiche sono state intensamente studiate sia per il loro specifico interesse che per le importanti applicazioni, di cui i problemi legati all'operatore di Monge-Ampère complesso costituiscono un esempio importante.

Key Words and Phrases: *Correnti positive – Correnti plurisubarmoniche – Varietà complesse*
A.M.S. Classification: 32U40, 32Q15, 32U05.

L'operatore di Monge-Ampère, per funzioni plurisubarmoniche lisce, può essere letto come un prodotto (di forme): $(dd^c)^n(u) = dd^cu \wedge \cdots \wedge dd^cu$: come estenderlo a funzioni plurisubarmoniche meno regolari, o addirittura generiche? Quali proprietà conserva in queste estensioni? Lo studio è stato portato avanti sia per funzioni plurisubarmoniche su un aperto (di $\mathbb{C}^n$ o di una varietà) che a livello globale su una varietà compatta kähleriana (X, ω). Infatti in questo caso le soluzioni lisce $\varphi \in Psh(X, \omega)$ dell'equazione di Monge-Ampère $(\omega + dd^c\varphi)^n = f\omega^n$, dove $f\omega^n$ è una forma di volume per X, danno una nuova metrica kähleriana, $\omega + dd^c\varphi$, con forma di volume assegnata. Questo problema (risolto nel caso di f liscia da Yau [70]) nasce dal classico problema di Calabi, che chiede di trovare e studiare forme di Kähler che rappresentino la prima classe di Chern della varietà e abbiano forma di Ricci data (cfr. per esempio l'introduzione di [54] o il survey [55]).

Un altro punto di vista " nuovo" nel campo delle correnti è quello della dinamica olomorfa di più variabili complesse, che quindi seleziona come ambiente le varietà proiettive o le varietà compatte kähleriane. Per questo divideremo la trattazione degli argomenti tenendo presente questo spartiacque, e dedicheremo un breve paragrafo a mostrare come una delle tecniche più importanti in dinamica olomorfa sia proprio lo studio di particolari correnti chiuse e positive, in particolare il loro prodotto e le loro iterate, sia per mappe olomorfe che meromorfe.

Premettiamo alcune notazioni, che fanno riferimento alle definizioni date nell'appendice di [1]: $\mathcal{E}^{p,p}(X)_{\mathbb{R}}$ è lo spazio delle $(p,p)-$forme differenziali reali sulla varietà complessa X di dimensione n; $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(X)$ significa che φ è una $(p,p)-$forma differenziale a supporto compatto su X; scrivendo $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ intendiamo una corrente di bidimensione (p,p) ovvero di bigrado $(n-p, n-p)$ su X; se essa è positiva nel senso di Lelong, scriviamo $T \geq 0$. La corrente T è detta chiusa se $dT = 0$, è detta pluriarmonica se $dd^cT = 2i\partial\overline{\partial}T = 0$ (le convenzioni per l'operatore d^c non sono uniformi nei vari lavori: per esempio nel testo [22] si ottiene $dd^c = (i/\pi)\partial\overline{\partial}$, ma nulla cambia per quanto riguarda le correnti pluriarmoniche o plurisubarmoniche). Se Y è un sottoinsieme analitico di dimensione pura, la corrente associata si indica con $[Y]$, ove non sia possibile confusione con $[T]$, che denota la classe di una corrente T nella coomologia di de Rham o di Aeppli. In generale, useremo le definizioni e le notazioni di [1] o di [22].

2 – Problemi di estensione e di supporto

Come già discusso in [1], i problemi di estensione di correnti si possono schematizzare in questo modo:

Sia U un aperto di $\mathbb{C}^n$, o di una varietà liscia X, e sia A un chiuso di U. Data una classe di correnti di ordine zero su $U - A$, stabilire condizioni su A (e sulla classe) che assicurino l'estensione delle correnti attraverso A ed eventualmente il permanere della corrente estesa (in particolare della estensione banale) nella stessa classe di correnti, ma su U. Qui parleremo solo dei risultati sull'estensione banale, che indicheremo con una " tilde": tuttavia (cfr. per esempio la Proposizione 3.3 e il Teorema 4.5) non sempre essa è l'estensione *giusta* per risolvere problemi che coinvolgono i gruppi di coomologia.

– Il caso A chiuso

Se su A non si mette alcun tipo di struttura, i risultati di estensione presenti in letteratura sono legati ad $\mathcal{H}_k(A)$, la misura di Hausdorff di A: come esempio principale si possono considerare i teoremi di estensione di correnti chiuse e positive (Harvey et al., che si rifanno alla teoria delle correnti piatte di Federer: cfr. [1], Teoremi 4.4 e 4.1).

Nel caso di correnti non chiuse, il primo risultato che citiamo è il Teorema 1.1 di [6]:

Teorema 2.1. *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$. Se*

1. $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$
2. *dT si prolunga a U (ovvero, esiste l'estensione banale $\widetilde{dT}$)*
allora T si prolunga a U, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.

Osservazioni

1) La corrente T, dall'ipotesi (2), è una corrente localmente normale ([1], definizione 3.2), e dunque l'uguaglianza $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$ è conseguenza immediata della teoria di Federer delle correnti localmente piatte ([61], 2.2). Il caso $dT = 0$ era stato trattato da Harvey (cfr. [1], Teorema 4.4).
2) La dimostrazione del teorema è composta da due parti distinte: dapprima ci si riduce al caso $p = n$ seguendo la dimostrazione di Harvey e la tecnica (di Shiffman) di proiezioni su $p-$piani complessi, per cui basta stimare la massa di una opportuna misura positiva; a questo punto, si usa una variante del teorema di Fubini su $\mathbb{C}^n$ per funzioni positive in $L^1_{loc}(U - A)$.
3) Se la corrente T non è positiva, ma è differenza di correnti positive $T = T_1 - T_2$, il teorema non vale più, ma deve essere modificato chiedendo che sia T_1 che T_2 si prolunghino attraverso A (cfr. [61] 3.6 e il controesempio 3.7): questo fatto si può confrontare con i risultati sulle correnti in $DSH(U)$ (vedi Paragrafo 7).

Passiamo ora a considerare il caso di correnti non più normali ma $\mathbb{C}-$normali.

Teorema 2.2. (*cfr.* [20], *Teorema* 5) *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U-A), T \geq 0$. Se*

1. $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$
2. *dd^cT si prolunga a U (ovvero, esiste $\widetilde{dd^cT}$)*
   allora T si prolunga a U, e vale $dd^c\tilde{T} = \widetilde{dd^cT}$.

Tale risultato era stato annunciato in [18], ma con l'ipotesi supplementare che T fosse anche localmente normale.

Osserviamo che la dimostrazione dell'esistenza di $\tilde{T}$ si può fare anche nell'ipotesi del Teorema 2.1, cioè $\mathcal{H}_{2p-1}(A) = 0$, poiché essa usa la tecnica di Shiffman di proiezione su $p-$piani complessi, unita alle proprietà delle slices di correnti $\mathbb{C}-$normali, che permettono di ricondursi al caso di bidimensione $(1,1)$. Invece l'uguaglianza $dd^c\tilde{T} = \widetilde{dd^cT}$, essendo conseguenza della teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte di Bassanelli ([8]), richiede $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A) = 0$: si prova in [18] (Osservazione 1) che l'ipotesi che $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T)$ sia localmente finita non basta, nemmeno se T è localmente normale.

Sempre usando la teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte, in particolare plurisubarmoniche, si ottengono i seguenti risultati ([20], Teorema 6 e Corollario 6):

Teorema 2.3. *Sia A un chiuso di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U-A)$ una corrente plurisubarmonica.*

1. *Se $T \leq 0$ e $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T)$ è localmente finita, allora esiste $\tilde{T}$ ed è plurisubarmonica; inoltre la corrente residua $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$, che è supportata su A, ha lo stesso segno di T.*
2. *Se $T \geq 0$ e $\mathcal{H}_{2p-3}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$, allora esiste $\tilde{T}$ ed è plurisubarmonica; inoltre la corrente residua $R = 0$.*

– Il caso A chiuso pluripolare o varietà CR

Consideriamo ora i casi in cui si chiedono ulteriori condizioni sul chiuso A, in termini di luogo di zeri (o di indeterminazione) di opportune funzioni, o di quantità di struttura complessa presente su A. I punti di partenza per questo tipo di risultati sono i due fondamentali lavori [36] e [63]. Richiamiamo dapprima alcune definizioni.

Definizione 2.4. Sia A una sottovarietà reale di un aperto U di $\mathbb{C}^n$ (o di una varietà) di dimensione m e di classe $\mathcal{C}^2$. Se per ogni $z \in A$, $\dim_{\mathbb{C}} H_zA := \dim_{\mathbb{C}}(T_zA \cap iT_zA) = k$, allora A è detta una *varietà CR*, di CR-dimensione uguale a k. Se $k = 0$, A è detta *totalmente reale*.

Si dimostra che A è totalmente reale se e solo se esiste un intorno V di A e una funzione $u \in \mathcal{C}^2(V)$ strettamente plurisubarmonica tale che A sia il suo luogo di zeri.

Invece considerando il luogo di indeterminazione di una funzione plurisubarmonica si ha (cfr. [22], III.2.A):

Definizione 2.5. Sia $A \subset U$ aperto di $\mathbb{C}^n$ (o di una varietà); A è detto *pluripolare completo* se per ogni $x \in U$, esiste un suo intorno V_x e una funzione $u \in Psh(V_x) \cap L^1_{loc}(V_x)$ tale che $V_x \cap A = \{z \in V_x / u(z) = -\infty\}$.

Ovviamente ogni sottoinsieme analitico chiuso è pluripolare completo; si ha inoltre (Lemma 2, ibidem):

Proposizione 2.6. *Se A è un chiuso pluripolare completo di U, per ogni $x \in U$ e per ogni suo intorno V_x sufficientemente piccolo esistono:*

1. *$v \in Psh(V_x) \cap \mathcal{C}^\infty(V_x - A)$ con $v = -\infty$ su $A \cap V_x$;*
2. *una successione crescente di funzioni $v_k \in Psh(V_x) \cap \mathcal{C}^\infty(V_x), 0 \leq v_k \leq 1$, che converge uniformemente a 1 sui compatti di $V_x - A$ e tale che ogni v_k si annulla su un intorno di $A \cap V_x$.*

Questa ultima proprietà è lo strumento usato per dimostrare che l'estensione banale di una corrente chiusa e positiva attraverso un chiuso pluripolare completo, se esiste, è ancora chiusa e positiva (cfr. [22], III.2 (2.3)).

Invece, per quanto riguarda l'esistenza dell'estensione banale di una corrente in termini di estensione delle sue slices, un risultato interessante è il teorema principale in [11], la cui dimostrazione è semplificata in [12], Teorema 4.2.

Sempre nel caso di correnti chiuse, nel Teorema III.7 di [36] si dimostra:

Teorema 2.7. *Se A è una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ e chiusa, con $p \geq k + 2$, allora T si estende attraverso A, e $\tilde{T}$ è l'unica estensione chiusa e positiva.*

Nel lavoro [20] gli autori osservano che la tecnica di dimostrazione, anche nel caso CR, si basa sul descrivere A come luogo di zeri (locale) di una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, non più strettamente plurisubarmonica, ma $k-$convessa, ed estendono così i risultati di [36]. Ricordiamo che:

Definizione 2.8. Una funzione continua $u : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ è detta *strettamente $k-$convessa* se esiste una $(1,1)-$forma a coefficienti continui w su U, avente in ogni punto $n - k$ autovalori positivi, tale che $dd^c u \geq w$.

Dunque, se u è strettamente $k-$convessa, intorno a ogni punto di U vale (per opportune costanti positive c_1 e c_2)

$$dd^c u + c_1 \sum_1^k i dz_j \wedge d\overline{z_j} - c_2 \sum_{k+1}^n i dz_j \wedge d\overline{z_j} \geq 0.$$

Il caso $k = 0$ corrisponde a funzioni continue strettamente plurisubarmoniche. Si può dimostrare che, se u è strettamente $k-$convessa, fissata una $(1,1)-$forma a coefficienti continui $\gamma \geq 0$ su U, per ogni $x \in U$, esiste un suo intorno V_x e una funzione strettamente plurisubarmonica $f \in \mathcal{C}^\infty(V_x)$ tale che su V_x valga $dd^c u \wedge (dd^c f)^k \geq \gamma^{k+1}$. Inoltre, dai risultati di regolarizzazione di Richberg, si può supporre che u sia liscia fuori del suo luogo di zeri.

Il primo risultato di estensione attraverso luoghi di zeri di funzioni $k-$convesse che citiamo è dimostrato in [20], Teorema 4 e Proposizione 6.

Teorema 2.9. *Sia u una funzione strettamente $k-$convessa in un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - U_c), T \geq 0$, dove $U_c := \{z \in U / u(z) \leq c\}$. Sia $p \geq k + 1$.*

1. *Se $dd^c T \leq 0$ su $U - U_c$, oppure se $dd^c T$ si estende attraverso U_c, allora T si estende attraverso U_c.*
2. *Sia $u \geq 0$ e sia $A := U_o = \{z \in U / u(z) = 0\}$; sia $dd^c T \leq 0$ su $U - A$, oppure $dd^c T$ di massa finita attraverso A. Se $u \in \mathcal{C}^2(U)$ e $p \geq k + 2$, vale $\widetilde{dd^c T} = dd^c \tilde{T}$.*

E dunque anche (ibidem, Corollario 4):

Teorema 2.10. *Sia A una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ tale che $dd^c T \leq 0$ su $U - A$ (oppure $dd^c T$ si estende attraverso A).*

1. *Se $p \geq k + 1$, allora T si estende attraverso A.*
2. *Se $p \geq k + 2$, vale $\widetilde{dd^c T} = dd^c \tilde{T}$, e se dT si estende, vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.*

Tale risultato, e il seguente (Teorema 2.3 in [19]), sono da paragonare con il Teorema 2.7 e i seguenti Teoremi 2.14 e 2.15.

Teorema 2.11. *Sia $A \subset U$ il luogo di zeri di una funzione positiva e strettamente $k-$convessa, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A), T \geq 0$ tale che dT si estende attraverso A.*

1. *Se $p \geq k + 1$, allora anche T si estende attraverso A.*
2. *Se $p \geq k + 2$, e A è di classe $\mathcal{C}^2$, vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.*

In [63], l'autore affianca ai risultati del caso chiuso quelli per un nuovo tipo di correnti, che vengono dette pluripositive.

Definizione 2.12. Una corrente $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ è detta *pluripositiva* se è localmente normale, positiva o negativa, e $dd^cT \geq 0$.

L'ipotesi di normalità (la richiesta cioè che anche dT sia a coefficienti misure) è indipendente dalle altre (ibidem, pagina 173) e situa questa classe di correnti dentro l'insieme delle correnti piatte di Federer. Riportiamo tre risultati sull'estensione di correnti pluripositive, per stabilire il confronto con ciò che si è ottenuto negli ultimi anni (Teoremi 2.10, 2.11 e 2.16, dove è stata tolta sostanzialmente proprio l'ipotesi di normalità).

Teorema 2.13. (*cfr.* *Teorema* 2.4 *di* [63]) *Sia $A \subset U$ un chiuso pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq 1$. Se T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, allora*

1. $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$.
2. *Il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$, che è una corrente chiusa supportata su A, ha lo stesso segno di T.*

Teorema 2.14. (*cfr.* *Teoremi* 3.1 *e* 3.3 *di* [63]) *Sia A è una sottovarietà totalmente reale di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq 2$. Allora T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$.*

Teorema 2.15. (*cfr.* *Corollari* 3.2 *e* 3.4 *di* [63]) *Sia A è una sottovarietà CR di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, di CR-dimensione k, e $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente pluripositiva, con $p \geq k+2$. Allora T, dT, dd^cT si estendono attraverso A, e vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, $\widetilde{dd^cT} = dd^c\tilde{T}$.*

Nel caso pluripolare completo, si hanno i seguenti risultati (cfr. Teoremi 1 e 2, Proposizione 2 e Corollario 2 in [20])

Teorema 2.16. *Sia $A \subset U$ un chiuso pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$.*

1. *Se $T \geq 0$ (o $T \leq 0$) è una corrente ($\mathbb{C}-$normale) tale che T e dd^cT si estendono attraverso A, allora il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$ ha lo stesso segno di T.*
2. *Se T è negativa e plurisubarmonica, e T si estende attraverso A (questo succede, per esempio, se $\mathcal{H}_{2p}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$), allora anche dd^cT si estende, $\tilde{T}$ è negativa e plurisubarmonica, e il residuo R ha lo stesso segno di T.*
3. *Se T è positiva e plurisubarmonica, e $\mathcal{H}_{2(p-1)}(A \cap \mathrm{supp}T) = 0$, allora T si estende attraverso A, $\tilde{T}$ è positiva e plurisubarmonica, e il residuo $R = 0$.*

– **Osservazioni sul Teorema 2.16.**

1) In (1), l'ipotesi che la corrente T sia $\mathbb{C}-$normale (T e dd^cT di ordine zero), e dunque che ad essa si possa applicare la teoria delle correnti $\mathbb{C}-$piatte di Bassanelli per rimpiazzare quella delle correnti piatte di Federer, resta implicita nel testo originale del teorema (la si può leggere nell'affermazione dell'esistenza di $\widetilde{dd^cT}$). Tale teoria si trova ben riassunta nelle sue proprietà basilari nel primo paragrafo di [20].
2) Nel confronto con il Teorema 2.13, ci si chiede quale ruolo giochi dT. Un esempio (Esempio 2 in [20] ma anche pagina 173 di [63]) mostra una $(1,1)-$corrente positiva e pluriarmonica, liscia su $\mathbb{C}^2 - \{z_1 + z_2 = 0\}$, che ha massa localmente finita vicino alla sottovarietà lineare $A := \{z_1 + z_2 = 0\}$, per cui $\tilde{T}$ risulta ancora pluriarmonica (ovvero, il residuo è zero), ma con dT di massa infinita vicino ad A. Viene corretta quindi l'affermazione fatta nel teorema principale di [18] (dove peraltro vengono annunciati i risultati di [20]), che valga anche $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$, ovvero che l'ipotesi su dT nel Teorema 2.13 sia superflua. Gli autori dimostrano invece, nell'Osservazione 2, che se dT si estende, allora vale $d\tilde{T} = \widetilde{dT}$. Questo dice comunque che la classe delle correnti pluripositive è meno significativa delle classi delle correnti $\mathbb{C}-$piatte o $\mathbb{C}-$normali, o plurisubarmoniche positive (o negative): un ulteriore generalizzazione può essere vista nella classe delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7).
3) La dimostrazione usa tra l'altro risultati di estensione con ipotesi sulla estensione di slices nel locale (vedi Proposizione 4 e Proposizione 5 in [20]) che estendono risultati analoghi nel caso chiuso (vedi teorema principale di [11]).
4) In [34] si dimostra (1) supponendo, invece che dd^cT sia di massa localmente finita attraverso A, che dd^cT sia maggiorata su $U - A$ da una corrente positiva di massa localmente finita attraverso A.
5) Nel caso in cui A sia anche compatto, il corollario 5 in [20] generalizza il corollario IV.3 in [36] in questo modo: " Sia $K \subset U$ un compatto pluripolare completo, e sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - K), T \geq 0$ tale che $dd^cT \leq 0$ su $U - K$ (oppure dd^cT si estende attraverso K). Allora T si estende attraverso K e il residuo ha lo stesso segno di T. Se $p \geq 2$ e $dd^cT \leq 0$, il residuo è nullo.".

Molti dei risultati precedenti erano già stati dimostrati nel caso in cui A sia un sottoinsieme analitico, dato l'interesse geometrico particolare di questo caso. Per tali risultati rimandiamo a [1] o a [3]; alcuni di essi possono essere ora migliorati, per esempio il Teorema 3.5 di [8] (citato in [1] come Teorema 8.5) può essere così migliorato: " Sia A un sottoinsieme analitico di un aperto U di $\mathbb{C}^n$, sia $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U - A)$ una corrente $\mathbb{C}-$normale, positiva o negativa, tale che sia T che dd^cT si estendono attraverso A. Allora il residuo $R := \widetilde{dd^cT} - dd^c\tilde{T}$ ha lo stesso segno di T.".

– Problemi di supporto

Passiamo ora a considerare brevemente alcuni risultati a riguardo del supporto delle correnti: come diremo nel Paragrafo 5, l'applicazione più importante è l'esprimere l'insieme di Julia di una determinata mappa come supporto di una opportuna corrente chiusa e positiva.

Il problema principale è quello di sapere come la misura di Hausdorff del supporto di una corrente di ordine zero influenzi la natura della corrente stessa. Per correnti chiuse e positive, si veda la discussione nel Paragrafo 4 di [1], per le pluriarmoniche, il Teorema 8.6 e la Osservazione 8.3 ibidem, e per le $\mathbb{C}-$piatte il Paragrafo 9 di [1].

Un altro dei problemi esaminati in [1] è il seguente (cfr. anche [45] Problema 3.6 e [61], Teorema 4.4): quando una corrente chiusa e positiva è una catena olomorfa, ovvero è del tipo $T = \sum n_j[X_j]$, $n_j \in \mathbb{Z}^+$, X_j sottovarietà analitiche. Nell'ambiente delle correnti localmente rettificabili (cfr. [1] Paragrafo 3), Alexander in [7] generalizza i risultati di King, Harvey-Shiffman e Shiffman (cfr. [1], Teoremi 3.2, 3.4 e 3.5) con il seguente teorema: " Sia $T \in R^{loc}_{k,k}(U)$ una corrente chiusa su U: allora T è una $(k, k)-$catena olomorfa".

Nel caso in cui T in partenza non è supposta essere chiusa, ma solo plurisubarmonica o pluriarmonica, i primi risultati, degli anni '90, sono esposti in [1], Paragrafi 8 e 9. Un ulteriore contributo è quello di [27], dove gli autori generalizzano i risultati di King per correnti chiuse e positive (cfr. [1] Teoremi 3.1 e 3.2) al caso plurisubarmonico.

Teorema 2.17. (*cfr.* [27] *Teorema* 4.1 *e Corollario* 4.5) *Sia* $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(X)$ *una corrente positiva e plurisubarmonica.*

1. *Se esiste* $c > 0$ *tale che* $E_c := \{x \in X/n(T, x) \geq c\}$ *è denso in* $\mathrm{supp}T$*, allora* $\mathrm{supp}T = V$*,* V *sottovarietà di dimensione pura* p*, e* $T = \varphi[V], \varphi$ *debolmente plurisubarmonica su* V*.*
2. *Se* T *è localmente rettificabile, allora* T *è una* $p-$*catena olomorfa.*

Per il caso T positiva e plurisuperarmonica, si può vedere il Teorema 4.6 in [27].

3 – Prodotto di correnti

Se T è una (p, q)-corrente e ψ è una (h, k)-forma differenziale su una varietà X, il loro prodotto è la $(p+h, q+k)$-corrente definita come $(T\wedge\psi)(\alpha) := T(\psi\wedge\alpha)$ per ogni forma test α.

In qualche caso si può definire il prodotto di correnti rappresentate da sottoinsiemi analitici, usando i teoremi di estensione del Paragrafo 2: per esempio in [20] si dimostra che se Z e Y sono due sottoinsiemi analitici di un aperto di $\mathbb{C}^n$, di dimensione p e k, con $\dim Z \cap Y = p + k - n$, allora si può definire il prodotto e vale $[Z] \wedge [Y] = [Z \cap Y]$ (cfr. [20], p. 468 e anche [22], III.4.12).

Invece se T ed S sono correnti generiche, non si può in generale dare una buona definizione di $T \wedge S$, anche se le correnti fossero di ordine zero e chiuse, poiché le misure non possono essere convenientemente moltiplicate. In [21], Demailly considera, in riferimento ad una $(1,1)-$corrente positiva e chiusa T, la corrente T_{abc} (o T_{ac}, in altri lavori, per esempio [62]), che è la parte assolutamente continua nella decomposizione di Lebesgue dei coefficienti di T in misure assolutamente continue e misure singolari. Per queste correnti, i coefficienti stanno in L^1_{loc} e quindi si può considerare il prodotto: i risultati che si ottengono sono, per esempio, il Teorema 1.7 e il Corollario 7.6 in [21], il Teorema 1.3 in [62], particolarmente significativi per i legami con le metriche singolari su big line bundles (cfr. l'introduzione di [62]).

Lo studio delle condizioni da porre sulle correnti per ottenere un opportuno prodotto si può considerare aperto dal lavoro di Bedford e Taylor [10] nel 1982. Come abbiamo già commentato in [1], il primo caso ad essere studiato è il seguente:

$T^{p,p} \geq 0$ e chiusa

$S^{1,1} \geq 0$ ed esatta, espressa con un potenziale u localmente limitato, ovvero

$S = i\partial\overline{\partial}u, \; u \in L^\infty_{loc} \cap Psh(X)$.

In questo caso $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)$ è una $(p+1, p+1)$-corrente ben definita, positiva e chiusa (anzi esatta) (cfr. [1], Paragrafo 7). Per via induttiva si può definire il prodotto di k correnti di tipo S con una di tipo T; lo studio del caso del potenziale localmente limitato, in particolare per quanto riguarda i risultati di approssimazione, di stime di massa, operatori di Monge-Ampere, numeri di Lelong, ... si può trovare in [22], III.3. Tali proprietà rappresentano ovviamente le opportune generalizzazioni delle analoghe proprietà nel caso in cui la corrente S sia liscia; oltre ad esse, ci interesserà generalizzare anche proprietà di tipo coomologico su varietà compatte, che per ora non appaiono, essendo $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(uT)$ per definizione una corrente esatta.

Il caso in cui il potenziale non è localmente limitato è stato studiato principalmente da Demailly, imponendo opportune restrizioni all'intersezione del supporto di T con l'*unbounded locus* del potenziale, in particolare alla sua misura di Hausdorff (cfr. [22], III.3 oppure [1], Paragrafo 7). Anche in questi casi si hanno le opportune stime di massa e risultati di approssimazione.

L'argomento del prodotto di correnti è intimamente collegato allo studio dell'operatore di Monge-Ampère. Se $u \in L^\infty_{loc} \cap Psh(X)$, la corrente $(dd^c u)^n$ è una misura positiva, e $(dd^c \cdot)^n$ è detto l'operatore di Monge-Ampère; per estensione, anche gli operatori $(dd^c \cdot)^k, \; 1 \leq k \leq n$ sono detti operatori di Monge-Ampère (cfr. [22], III.3, [10]).

Uno dei problemi è la determinazione del dominio di definizione opportuno di questi operatori, un altro quello della sua continuità per limiti decrescenti, o più in generale il problema di trovare la convergenza " giusta"

$u_j \to u$, $u_j, u \in Psh(X)$, che implichi la convergenza $(i\partial\overline{\partial}u_j)^k \to (i\partial\overline{\partial}u)^k$ (cfr. [44], [68], [16], [14], [69]). Lo studio di questi operatori si rivela di grande utilità in rapporto alla ricerca di metriche interessanti sulle varietà (in particolare metriche a curvatura scalare costante nell'ambiente delle varietà kähleriane): oltre al già citato libro di Demailly, si può vedere per esempio [55], [25], [17], [59], [60], [38] e la bibliografia citata in questi lavori.

Un altro approccio al prodotto di correnti in un caso particolare si può trovare in [32]: qui gli autori definiscono il prodotto $S \wedge T$ di correnti chiuse e positive di bigrado complementare, una " verticale" e una " orizzontale" (nel senso che considerano due aperti limitati convessi $M \subset \mathbb{C}^p, N \subset \mathbb{C}^{n-p}$, le due proiezioni canoniche $\pi_1 : M \times N \to M, \pi_2 : M \times N \to N$ e chiedono che $\pi_1(\text{supp}S) \subset\subset M, \pi_2(\text{supp}T) \subset\subset N$). Nel caso in cui S sia una $(1,1)$-corrente, la definizione che viene data coincide con quella che si ottiene esprimendo S localmente con un potenziale, e nel caso di S liscia, o anche a coefficienti continui, la definizione coincide con quella usuale. Rimandiamo a [32], [37] e [28] per le motivazioni, l'esplicita costruzione e le proprietà del prodotto, e inoltre al Paragrafo 8 per ulteriori risultati sul prodotto di correnti su varietà kähleriane.

L'approccio nuovo, su cui ci vogliamo invece concentrare, è quello in cui si considerano prodotti del tipo $i\partial\overline{\partial}u \wedge T$, dove $T^{p,p} \geq 0$ non è più chiusa ma solo pluriarmonica, ovvero $i\partial\overline{\partial}T = 0$. Ovviamente questo fatto fa cambiare radicalmente l'impostazione del problema, poiché anche nel caso in cui u sia liscia, non vale più $i\partial\overline{\partial}u \wedge T = i\partial\overline{\partial}(uT)$. Le strade finora seguite, che compaiono in letteratura, sono principalmente due, e cioè:

i) chiedere che u, ovvero la corrente chiusa $S = i\partial\overline{\partial}u$, sia liscia fuori di un opportuno sottoinsieme analitico ([9], [6])
ii) supporre che l'ambiente X sia una varietà compatta kähleriana.

In questo ultimo caso si ottengono risultati più forti; d'altra parte, osserviamo che le correnti pluriarmoniche assumono particolare importanza proprio nel provare la kählerianità o meno della varietà, secondo le tecniche inaugurate da Harvey e Lawson ([51], vedi [1], Paragrafo 6). Descriveremo qui i risultati di tipo i), in naturale continuità con il caso chiuso, e nel Paragrafo 8 quelli di tipo ii).

Il primo lavoro in cui si studiano prodotti di correnti non entrambe chiuse è [9] dove, pur limitandosi a una varietà tridimensionale, viene impostato il problema della opportuna definizione della corrente $S \wedge T$, con $S^{1,1} \geq 0$ chiusa, $T^{1,1} \geq 0$ pluriarmonica. Il caso generale è trattato, usando sostanzialmente le stesse tecniche, in [6], il cui risultato principale è il seguente:

Teorema 3.1. (*cfr. Teorema* 2.2 *in* [6]) *Sia Y un sottoinsieme analitico proprio della varietà complessa X. Sia S una $(1,1)$-corrente positiva e chiusa su X, liscia su $X - Y$, e sia T una (k,k)-corrente positiva e pluriarmonica su*

X, con $k + \dim Y < \dim X$. Allora esiste un'unica $(k+1, k+1)$-corrente su X, denotata con $S \wedge T$, che gode della seguente proprietà:

Se g è un potenziale locale di S, ovvero $S = i\partial\overline{\partial}g$ in un aperto $U \subset X$, e se $\{g_j\}$ è una successione di funzioni plurisubarmoniche lisce su U, che converge a g in $C^\infty(U - Y)$, allora $\lim_j i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T = S \wedge T$ in U.

Osserviamo che la definizione è data mediante la convergenza di opportune successioni, poiché nessun teorema di estensione è " abbastanza forte" (confronta Paragrafo 2 e poi Paragrafo 4). Si dimostra inoltre che se la varietà è compatta, la classe di coomologia (di Aeppli) è quella *giusta*:

Proposizione 3.2. (*cfr. Proposizione* 2.4 *in* [6]) *Nelle ipotesi del Teorema* 3.1*, se X è compatta, $S \wedge T$ " rispetta" la coomologia, nel senso che, se $S = \alpha + i\partial\overline{\partial}u$ e $T = \psi + \partial\overline{A} + \overline{\partial}A$, per opportune forme (lisce) α e ψ e correnti u e A su X, allora vale $S \wedge T = \alpha \wedge \psi + \partial\overline{Q} + \overline{\partial}Q$ per una opportuna corrente Q su X.*

La prima osservazione da fare sulla definizione di prodotto è che essa generalizza il caso liscio, che corrisponde a $Y = \emptyset$, in quanto se le g_j convergono a g in $C^\infty(U)$, ovviamente $i\partial\overline{\partial}g_j$ converge a $i\partial\overline{\partial}g = S$ e $i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T$ converge a $S \wedge T$ in U.

Inoltre essa generalizza anche il caso chiuso: se T è una corrente chiusa, la definizione di $S \wedge T$ data nel Teorema 3.1 coincide con quella classica, ovvero localmente $S \wedge T := i\partial\overline{\partial}(gT)$, dove $S = i\partial\overline{\partial}g$. Infatti, siccome $k + \dim Y < \dim X$, se T è chiusa si può applicare il corollario III.4.10 in [22] e dunque la definizione classica è ben posta. Inoltre scegliendo una successione decrescente $\{g_j\}$ come nel Teorema 3.1 (per esempio, basta regolarizzare g per convoluzione), grazie alla Proposizione III.4.9 in [22] si può applicare il Teorema III.3.7 ibidem, e così si ottiene $\lim_j i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T = i\partial\overline{\partial}g \wedge T$. Dunque le due definizioni coincidono, grazie all'unicità stabilita nel Teorema 3.1.

Per dare un'idea delle tecniche di dimostrazione, conviene per semplicità ricondursi al caso $n = 3$ e Y curva liscia, studiato per primo in [9].

L'ipotesi che la corrente S sia liscia fuori di Y sottovarietà liscia di codimensione due serve a mettersi (nel locale) in un opportuno sistema di coordinate (tecnica classica di Siu, cfr. [64]) in cui si usa il teorema di Stokes scrivendo T (localmente) come $T = \overline{\partial}F + \partial\overline{F}$, dove F è a coefficienti in L^1_{loc}. In questo modo, regolarizzando il potenziale g di S localmente per convoluzione, si riesce a ottenere una stima uniforme di massa nel locale per $i\partial\overline{\partial}g_j \wedge T$. La seconda parte della dimostrazione consiste nel provare che la corrente ottenuta come limite di una opportuna sottosuccessione $i\partial\overline{\partial}g_{j_h} \wedge T$ si può definire globalmente, e non dipende dalla sottosuccessione nè dalle regolarizzate.

Infine si prova, usando una versione adattata del teorema di regolarizzazione di Demailly per le $(1,1)$-correnti chiuse (Teorema 1.1 in [21]), che la corrente soddisfa le proprietà richieste.

Dato che la corrente $S \wedge T$ estende una corrente ben definita su $X - Y$, è naturale chiedersi che legame essa abbia con l'estensione banale. Si hanno i seguenti risultati ([6], Corollario 2.3 e Corollario 2.5):

Proposizione 3.3.

1. *Se $k + \mathrm{dim}Y < \mathrm{dim}X - 1$, allora $S \wedge T = \widetilde{S \wedge T}$.*
2. *Se $k + \mathrm{dim}Y = \mathrm{dim}X - 1$ e $\{Y_r\}$ sono le componenti irriducibili di Y di dimensione massima, allora esistono funzioni debolmente plurisubarmoniche $h_r \geq 0$ su Y_r tali che $S \wedge T = \widetilde{S \wedge T} + \sum_r h_r[Y_r]$.*
3. *Se $k + \mathrm{dim}Y = \mathrm{dim}X - 1$, X è compatta, e Y è irriducibile con classe di coomologia non nulla (ovvero, la corrente $[Y]$ non è una componente di bordo), allora $S \wedge T$ può essere caratterizzata come l'unica corrente positiva e pluriarmonica che estende $S|_{X-Y} \wedge T|_{X-Y}$ e rispetta la coomologia.*

Questi risultati permettono di dimostrare, in particolare, che ogni varietà complessa compatta di dimensione almeno tre, che sia kähleriana fuori di una curva irriducibile, ammette una metrica bilanciata (cfr. [6]).

Già in [9] si osserva che, se X è compatta e la curva Y ha un intorno kähleriano, ovvero se c'è su X una metrica hermitiana la cui forma di Kähler è chiusa vicino a Y, le dimostrazioni si possono notevolmente semplificare, usando i risultati di cut-off in [8]. Questo ci introduce al caso compatto kähleriano, di cui tratteremo nel Paragrafo 8.

4 – Pull-back di correnti per mappe olomorfe.

Siano M ed N varietà complesse di dimensione m ed n, con $m = n+k$, e sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (in qualche caso si può supporre che f sia solo dominante, ovvero che la sua immagine contenga un aperto non vuoto di N). Essa è genericamente di rango massimo, ovvero è una submersione olomorfa fuori di un sottoinsieme analitico proprio Σ ([1], Osservazione 5.1). Siamo interessati a definire e studiare il pull-back a M, f^*T, di una corrente positiva e chiusa (o $i\partial\overline{\partial}-$chiusa) T su N: mentre questo è possibile nel caso delle submersioni olomorfe, non lo è in generale (cfr. esempio p. 328 in [52]), e dunque siamo interessati a estendere il pull-back attraverso Σ.

– Il caso delle submersioni

Se f è una submersione, per ogni forma test $\varphi \in \mathcal{D}^{p,p}(M)$, con $p \geq k$, si ha $f_*\varphi \in \mathcal{D}^{p-k,p-k}(N)$ (vedi Proposizione 5.1 in [1], Paragrafo 3 in [52] e [22], I.2.C.1) dunque si può definire il pull-back di una corrente $T \in \mathcal{D}'_{p-k,p-k}(N)$ a M, per dualità: $f^*T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ è definita da $(f^*T, \varphi) := (T, f_*\varphi)$ (vedi il Corollario 5.1 in [1] e [22], I.2.C.2). Ovviamente, se f è un diffeomorfismo, vale $f^*T = (f^{-1})_*T$.

Ricordiamo alcune proprietà di questa costruzione (cfr. [22], I.2.C.2 e 3; III(1.17)).

1. Compatibilità con i casi particolari significativi: se T è rappresentata da una forma liscia, f^*T è il pull-back di questa forma; se T è l'integrazione su un submanifold Z di N di dimensione q, ovvero $T = [Z]$, allora $f^*T = [f^{-1}(Z)]$ (di dimensione $q + k$).
2. Continuità: se $T = \lim_n T_n$ per certe correnti T_n, allora $f^*T = \lim_n f^*T_n$ (e anche il viceversa, cfr. corollario 3.3 in [52]).
3. Positività: se $T \geq 0$, anche $f^*T \geq 0$.
4. f^* commuta con gli operatori ∂ e $\overline{\partial}$; questo significa in particolare che si conservano le classi di coomologia.

Su queste proprietà controlleremo le definizioni di pull-back di correnti per mappe olomorfe.

In generale, invece, il pull-back non è compatibile con l'immagine diretta, ovvero non sempre vale $f_*(f^*T) = T$ nè $f^*(f_*T) = T$, nemmeno per le forme (lisce), semplicemente a motivo del bigrado.

Se non si impongono restrizioni né sulle varietà, né sulle correnti né sulle mappe olomorfe, la strada più naturale per definire il pull-back di una corrente è quella di restringere la mappa $f : M \to N$ alla submersione $g := f|_{M-\Sigma} : M - \Sigma \to N - f(\Sigma)$, e considerare la corrente su $M - \Sigma$ data da $g^*(T|_{N-f(\Sigma)})$, con il proposito di estenderla a tutto M dimostrando che ha massa localmente finita attraverso Σ. Questa tecnica sarà utile anche nel caso di mappe meromorfe (vedi Paragrafo 8).

In generale però, essendo $\mathrm{codim}\Sigma \geq 1$, nemmeno $(1,1)-$correnti chiuse e positive si estendono senza ulteriori ipotesi (vedi ad esempio [1] Teorema 4.6). Risulta dunque necessario porre delle restrizioni: quelle in letteratura, riguardanti le mappe olomorfe, sono esaminate nei seguenti paragrafi.

– Il caso delle mappe a fibre equidimensionali

Come ricordato in [1], Osservazione 5.1, data una mappa olomorfa e suriettiva $f : M \to N$, esiste un sottoinsieme analitico I di N di codimensione almeno due, al di fuori del quale f è a fibre equidimensionali. Conviene quindi considerare i risultati che si ottengono per una mappa olomorfa $f : M \to N$ con fibre di dimensione $k := m - n \geq 0$, iniziando dal caso $k = 0$ (mappa finita ovvero rivestimento ramificato). Ricordiamo che se la mappa è finita, a funzioni continue sul dominio vengono in modo naturale abbinate funzioni continue sul codominio, per cui le misure possono essere invece tirate indietro (cfr. [52], pp. 328-329).

Il primo caso che prendiamo in considerazione è trattato in [57], dove l'autore considera il caso locale. Siano U, V aperti di $\mathbb{C}^n$, sia $f : U \to V$ una mappa olomorfa, suriettiva, propria, a fibre finite, e sia $\Sigma := U - \Omega$ il sottoinsieme analitico di U dove il rango di f non è massimo, per cui $g := f|_\Omega : \Omega \to f(\Omega)$ è un diffeomorfismo locale. Sia T una $(p,p)-$corrente chiusa e positiva su V: si dimostra, mandando in avanti la forma di Kähler canonica, che $g^*(T)$ ha massa localmente finita attraverso Σ, e quindi la sua estensione banale $\widetilde{g^*T}$ a tutto U è una $(p,p)-$corrente chiusa e positiva su U.

Il risultato di esistenza dell'estensione banale $\widetilde{g^*T}$ viene esteso dall'autore al caso di fibre equidimensionali ($k = m - n > 0$) usando delle slices di correnti per ricondursi al caso $k = 0$.

Il caso generale è nel Teorema 1.1 di [34], di cui daremo lo schema di dimostrazione.

TEOREMA 4.1. *Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (o dominante) a fibre equidimensionali, e sia T una $(p,p)-$corrente chiusa (o pluriarmonica) e positiva su N. Allora è definita una $(p,p)-$corrente su M, f^*T, che è chiusa (o pluriarmonica) e positiva. Essa dipende in modo continuo da T, e se $||T||(A) = 0$ per un certo sottoinsieme $A \subset N$, allora $||f^*T||(f^{-1}(A)) = 0$.*

Cenno di dimostrazione. Siano $\pi_1 : M \times N \to M, \pi_2 : M \times N \to N$ le proiezioni canoniche sui fattori, e consideriamo la $(n,n)-$corrente $[\Gamma]$ su $M \times N$ data dall'integrazione sul grafico Γ di f. Osserviamo che se α è una forma liscia su N, il suo pull-back $f^*\alpha$ si può scrivere anche come $(\pi_1)_*(\pi_2^*\alpha \wedge [\Gamma])$, poiché su Γ si ha $\pi_2 = f \circ \pi_1$; l'idea è di dare la stessa definizione per T, ovvero porre

$$f^*T := (\pi_1)_*(\pi_2^*T \wedge [\Gamma]).$$

Il problema sta nel senso da dare alla scrittura $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$: infatti essendo π_2 una submersione, π_2^*T è ben definita, positiva e chiusa (con questa parola indicheremo qui sia la $d-$chiusura che la $\partial\overline{\partial}-$chiusura). Se $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$ è ben definita, possiamo considerare la sua immagine diretta, poiché $\pi_1|_\Gamma$ è una mappa propria: anche in questo passaggio si conservano la positività e la chiusura.

La definizione di $\pi_2^*T \wedge [\Gamma]$ viene cercata a livello locale: su un opportuno aperto U di N, approssimiamo $T|_U$ (per convoluzione, per esempio) con una successione di correnti T_n lisce, chiuse e positive, anzi nella stessa classe di coomologia di T. Consideriamo, in $\pi_2^{-1}(U)$, $\lim_n \pi_2^*T_n \wedge [\Gamma]$: il punto è provare che questo limite esiste e non dipende dalla successione T_n, di modo da definire in $\pi_2^{-1}(U)$

$$\pi_2^* T \wedge [\Gamma] := \lim_n \pi_2^* T_n \wedge [\Gamma].$$

Il problema viene affrontato e risolto (cfr. [34], Lemma 3.3) nell'ambiente più generale delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7, in particolare Teorema 7.4). Proprio per il tipo di dimostrazione proposta, gli autori riescono a estendere il risultato al caso in cui f sia una trasformazione meromorfa (Definizione 8.2) (cfr. [34], Proposizioni 4.4 e 4.5).

Osservazione. Avendo definito $f^*T := (\pi_1)_*(\pi_2^*T \wedge [\Gamma])$, è semplice dimostrare che la positività e la chiusura si conservano, mentre non è detto che si conservi anche la classe di coomologia, senza ulteriori ipotesi sulle varietà (si veda il Corollario 1.2 in [34]).

– Il caso delle modificazioni.

Il caso significativo che sta " all'opposto" rispetto a quello delle mappe a fibre equidimensionali è quello delle modificazioni: per il pull-back di correnti rispetto a modificazioni facciamo riferimento a [5].

Siano N, N' varietà e sia $f : N' \to N$ una modificazione propria di centro Z e di divisore eccezionale E con componenti irriducibili $\{E_k\}$. Risulta facilmente $f_*(f^*\alpha) = \alpha$ per ogni forma liscia α su N; dunque è naturale pensare al pull-back di correnti partendo dal pull-back di divisori su N, che assume una duplice forma.

Se $D \subset N$ è un divisore, la sua trasformata stretta (o propria) tramite α è $D' := \overline{f^{-1}(D - Z)}$, mentre la sua trasformata totale è quel divisore $f^*D \subset N'$ caratterizzato dal fatto che se $\{w = 0\}$ è un'equazione locale per D in N, allora $\{w \circ f = 0\}$ è un'equazione locale per f^*D in N'. Supponendo per semplicità D irriducibile, si dimostra che il legame fra i due è il seguente:

$$f^*D = D' + \sum n_k E_k$$

per certi interi non negativi n_k (vedi [1], Proposizione 5.4 oppure [46] pagg. 604-605 nel caso di un blow-up).

Notiamo inoltre che, mentre ha senso pensare alla trasformata stretta di un sottoinsieme analitico $Y \subset N$ senza componenti irriducibili nel centro, non esiste una nozione di trasformata totale di Y, se $\operatorname{codim} Y > 1$.

Passando al caso di correnti positive di bidimensione (p, p), la procedura per fare la trasformata stretta di una corrente T è ancora quella di restringerla a $N - Z$, tirarla indietro con $(f^{-1})_*$ e poi estenderla attraverso l'insieme eccezionale E, ovvero definire la trasformata stretta di T tramite f come $\tilde{T}_f$, dove

$$T_f := f|_{N'-E}^* T|_{N-Z} := (f|_{N'-E})_*^{-1} T|_{N-Z}.$$

Questa definizione ha senso anche se T è solo di ordine zero, purché non stia sul centro Z (vedi la proposizione seguente) e vale:

PROPOSIZIONE 4.2. (*cfr. Proposizione* 3.2 *di* [5]) *Se* $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(N)$ *è una corrente di ordine zero, sono equivalenti:*

1. $\chi_Z T = 0$ *e* T_f *ha massa localmente finita attraverso* E
2. *esiste una corrente* T' *di ordine zero su* N' *tale che* $\chi_E T' = 0$ *e* $f_* T' = T$.

Se T' *esiste, essa è unica poiché risulta* $T' = \tilde{T}_f$, *ed è chiamata la* trasformata stretta *di* T *mediante* f. *Se* $T \geq 0$, *anche* $T' \geq 0$.

In [57], l'autore considera lo scoppiamento π di $\mathbb{C}^n$ sul centro $Z \simeq \mathbb{C}^s$, e per ogni $s \leq p \leq n-2$ esibisce una corrente chiusa e positiva T di bidimensione (p, p) tale che T_π non si estende attraverso il divisore eccezionale: dunque nel caso di bigrado superiore a $(1, 1)$ non è garantita l'esitenza della trasformata stretta nemmeno per correnti chiuse e positive.

Anche per $(1, 1)-$correnti (che corrispondono al caso geometrico dei divisori) si può avere lo stesso problema se non si chiede la chiusura: in [5] l'Esempio 3.14 esibisce una $(1, 1)-$corrente T positiva e plurisuperarmonica ($i\partial\overline{\partial}T \leq 0$, dunque nella classe DSH che verrà definita nel Paragrafo 7) per cui T_π non si estende attraverso il divisore eccezionale di un blow-up π. Il risultato migliore di esistenza è (cfr. Proposizione 3.13 in [5]):

PROPOSIZIONE 4.3. *Se* $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(N)$ *è una corrente positiva e plurisubarmonica, esiste la sua trasformata stretta* T' *a* N'.

Per quanto riguarda il conservarsi della chiusura, si può vedere il Teorema 3.11 in [5]: se la $(1, 1)-$corrente positiva T è chiusa, anche T' è chiusa; se T è pluriarmonica, allora in generale $i\partial\overline{\partial}T' \leq 0$, ed è pluriarmonica per esempio se E è compatto.

Osserviamo inoltre che nell'esempio di [57] sopra citato, il divisore eccezionale E non è compatto; infatti, per quanto riguarda correnti di bidimensione $(1, 1)$ si ha il seguente risultato:

TEOREMA 4.4. (*cfr. Teorema* 4.1, *Proposizione* 4.5 *e Proposizione* 4.6 *di* [5]) *Sia* $T \in \mathcal{D}'_{1,1}(N)$ *una corrente positiva e plurisubarmonica, con* $\chi_Z T = 0$. *Se vale una delle seguenti ipotesi sulla modificazione* f:

1. E *è compatto e ha un intorno kähleriano in* N'
2. T *è a supporto compatto e c'è una corrente di Kähler in un intorno di* $f^{-1}(\mathrm{supp} T)$,

allora esiste la trasformata stretta T'. *Se* T *è chiusa* ($\partial\overline{\partial}-$*chiusa*), *anche* T' *lo è.*

Questo teorema indica che l'ipotesi di compattezza e di kählerianità delle varietà coinvolte potrebbe portare a miglioramenti dei risultati sulle trasformate strette (vedi Paragrafo 8): d'altra parte, usando la forma di Kähler in dualità con le correnti (alla Harvey e Lawson) si conclude facilmente che su una varietà compatta kähleriana ogni corrente plurisubarmonica o plurisuperarmonica è in realtà $\partial\overline{\partial}-$chiusa.

La trasformata stretta di una corrente può essere pensata come una sorta di " parte principale" del pull-back della corrente (quando ciò ha senso, ovvero in bidimensione $(n-1, n-1)$), soprattutto dal punto di vista delle classi di coomologia. Tornando ai divisori, si nota infatti che data la ipersuperficie irriducibile D su N, D' risulta essere un addendo del pull-back (o trasformata totale) f^*D, il quale sta nella classe di coomologia $f^*[D]$ (vedi [5], 3.3 e 3.4).

Possiamo quindi definire *trasformata totale* di una $(1,1)-$corrente $\partial\overline{\partial}-$chiusa di ordine zero T su N, una $(1,1)-$corrente R su N', di ordine zero e $\partial\overline{\partial}-$chiusa, tale che $f_*R = T$ e $R \in f^*[T]$. Se tale corrente esiste, essa è unica, e viene denotata con f^*T; in questo caso esiste anche T', e vale (cfr. [5], Teorema 3.9):

$$f^*T = T' + \chi_E(f^*T).$$

In generale, a differenza del caso dei divisori, $\chi_E(f^*T)$ non è una corrente " di E", cioè non è del tipo $\sum_k c_k[E_k]$ (vedi [5], Esempio 3.10), tuttavia vale il seguente risultato (ibidem, Teorema 3.11):

TEOREMA 4.5. *Sia $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(N)$ una corrente positiva e pluriarmonica: allora esiste f^*T, essa è positiva e pluriarmonica, e vale*

$$f^*T = T' + \sum_k f_k[E_k]$$

per certe funzioni f_k, non negative e debolmente plurisubarmoniche su E_k.

Dunque per quanto riguarda le proprietà del pull-back nel caso di modificazioni, la trasformata totale di $(1,1)-$correnti conserva la positività e le classi di coomologia, ed è compatibile con il caso dei divisori, ma non con quello delle forme (in generale, se R è la trasformata totale della forma β, R e $f^*\beta$ stanno nella stessa classe di coomologia; tuttavia, essendo $f^*\beta$ liscia, $\chi_E f^*\beta = 0$, dunque se fosse $R = f^*\beta$, risulterebbe $f^*\beta = \beta'$, che non è liscia essendo un'estensione banale).

– **Il caso del bigrado** $(1,1)$**.**

Abbiamo visto nelle modificazioni come il caso dei divisori sia particolare: in realtà infatti per $(1,1)-$correnti chiuse e positive si può costruire il pull-back per mappe olomorfe e suriettive usando un potenziale locale.

Sia $f : M \to N$ olomorfa e suriettiva, e sia T una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su N; in opportune carte locali $\{U_i\}$ si ha $T|_{U_i} = i\partial\overline{\partial}h_i$, con $h_i \in Psh(U_i)$; dunque $h_i \circ f \in Psh(f^{-1}(U_i))$, non essendo identicamente uguale a meno infinito, e possiamo definire $f^*T|_{f^{-1}(U_i)} = i\partial\overline{\partial}(h_i \circ f)$: in questo modo f^*T risulta una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su M.

Inoltre si conservano le classi di coomologia e si ha un risultato di continuità (cfr. Proposizione 1 in [57]). Se α è una forma, ovviamente $f^*\alpha$ è il solito pull-back, e nel caso dei divisori è la trasformata totale.

Si tratta di confrontare tale costruzione con le precedenti, nel caso di $(1,1)-$correnti chiuse e positive. Per quanto riguarda le submersioni olomorfe, le due definizioni coincidono: con una partizione dell'unità possiamo pensare la forma test φ a supporto in una carta dove $T = i\partial\overline{\partial}h$, e il confronto segue immediatamente. Anche il caso delle mappe a fibre equidimensionali è immediato.

Nel caso delle modificazioni, come per i divisori, il confronto sarà con la trasformata totale; dato che nelle nostre ipotesi essa è unica (cfr. Teorema 3.9 di [5]), ci basta controllare che la costruzione precedente conservi le classi di coomologia (vedi sopra) e valga $f_*(f^*T) = T$ (le due correnti potrebbero differire solo sul centro della modificazione, che però ha codimensione almeno due).

– **Pull-back e numeri di Lelong**

È interessante, quando si può fare il pull-back, mettere in relazione i numeri di Lelong di T con quelli di f^*T; citiamo qui alcuni risultati.

Teorema 4.6. (*Proposizione* 5 *in* [57]) *Siano* $U \subset \mathbb{C}^n$ *e* $V \subset \mathbb{C}^m$ *aperti, e sia* $f : U \to V$ *una mappa olomorfa. Per ogni corrente chiusa e positiva* T *su* V *tale che esista* f^*T *come limite di forme lisce chiuse e positive, si ha* $n(T, f(x)) \leq n(f^*T, x)$ *per ogni* $x \in U$*.*

Teorema 4.7. (*Corollario* 4 *in* [39]) *Siano* M *ed* N *varietà connesse di dimensione* m *ed* n*, con* $m = n + k$*, e sia* $f : M \to N$ *una mappa olomorfa di rango massimo, ovvero una submersione olomorfa. Per ogni* K *compatto in* M *esiste una costante* $C_K > 0$ *tale che per ogni* $x \in K$ *e per ogni* $(1,1)-$*corrente chiusa e positiva* T *su* N *si ha* $n(T, f(x)) \leq n(f^*T, x) \leq C_K n(T, f(x))$*.*

Per quanto riguarda le modificazioni, nel caso di $(1,1)-$correnti positive e chiuse, vale

$$f^*T = T' + \chi_E(f^*T) = T' + \sum_k c_k[E_k]$$

dove $c_k = n(f^*T, E_k)$ (cfr. [1], Teorema 10.2).

Inoltre, se il centro Z è liscio, vale (cfr. Teorema 3.4 in [4]) $n(T,Z) = n(f^*T,E)$. Dunque paragonando i numeri di Lelong si ricava, per esempio, che per quasi ogni $x \in E$ vale $n(T',x) = 0$.

In [49] l'autore considera una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su una superficie compatta S e la " desingolarizza" (ovvero attenua i suoi numeri di Lelong, visti come indicatori della singolarità della corrente), ottenendo il seguente teorema sulla sua trasformata totale (cfr. Teorema 1.1 ibidem).

Teorema 4.8. *Sia T una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su una superficie compatta S. Per ogni $\epsilon > 0$, esiste una composizione finita di blow-ups $f : \tilde{S} \to S$ tale che $f^*T = \sum c_j[C_j] + \tilde{T}$, dove $c_j \geq 0$, le C_j sono curve lisce con normal crossings e $\tilde{T}$ è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva su $\tilde{S}$ tale che $sup_{x\in\tilde{S}}\ n(\tilde{T},x) < \epsilon$.*

Il pull-back di correnti si rivela uno strumento importante per affrontare vari problemi geometrici: per quanto riguarda le modificazioni, si può vedere [2], [4], [5], [49], [40].

Riprenderemo questo argomento nel Paragrafo 8, per trattare il caso di varietà compatte kähleriane e il caso di mappe meromorfe.

5 – L'ambiente della dinamica olomorfa.

Nel passaggio da una a più variabili complesse, cambiano notevolmente le tecniche adatte ai problemi: questo succede anche nel campo della dinamica olomorfa, nello studio delle iterate di mappe olomorfe (e meromorfe) $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ o, a livello locale, $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$.

Le monografie [41] e [42] presentano argomenti di dinamica olomorfa studiati mediante strumenti che generalizzano quelli classici, per esempio l'iperbolicità secondo Kobayashi. Tuttavia in questi ultimi anni si è andata affermando un'altra via, quella che usa la teoria del (pluri-)potenziale, ovvero funzioni plurisubarmoniche e correnti positive e chiuse: essa ha dato un notevole impulso allo studio di queste correnti, soprattutto per quanto riguarda il pull-back mediante mappe meromorfe e il prodotto (vedere per esempio [35]).

Questo paragrafo ha lo scopo di mettere in luce come nascano naturalmente correnti chiuse e positive (di bigrado $(1,1)$, all'inizio) strettamente collegate ai principali oggetti di studio della dinamica olomorfa, gli insiemi di Fatou e di

Julia; non è possibile qui dar conto degli sviluppi successivi, nemmeno come bibliografia, dunque ci limitiamo a citare la monografia [43].

Partiamo da una mappa olomorfa $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ (oppure avente come dominio un aperto di $\mathbb{C}^{n+1}$ contenente l'origine), $F(z) = F_k(z) + F_{k+1}(z) + \ldots$, con F_k polinomio omogeneo di grado $k \geq 2$ e non degenere ($F_k^{-1}(0) = \{0\}$). Notiamo che la condizione che F_k sia non degenere dice esattamente che essa induce (mediante la proiezione canonica π) $f_k : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$. Poniamo $F^n := F \circ \cdots \circ F$.

Indichiamo poi con $G_n := \frac{1}{k^n} log||F^n|| : U \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; si prova che la successione $\{G_n\}$ converge a una funzione plurisubarmonica G su un intorno dell'origine, detta la *funzione di Green* o la *funzione potenziale* di F.

Se partiamo direttamente da $f = f_k : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, per ogni $(1,1)-$forma chiusa ω che rappresenti un generatore positivo di $H^2(\mathbb{P}_n, \mathbb{Z})$, la successione $\frac{1}{k^n}(f^m)^*\omega$ converge a una $(1,1)-$corrente T, detta *corrente di Green*, che non dipende da ω, poiché si ha $i\partial\overline{\partial}G = \pi^*T$ (cfr. Teorema 5.1 in [52]).

In modo naturale in dinamica olomorfa si considerano mappe non polinomiali ma razionali, ovvero meromorfe. Le mappe meromorfe non costanti $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ sono della forma $f([z]) = [F_0(z) : \ldots F_n(z)]$, dove $F_0, \ldots, F_n$ sono polinomi omogenei in $n+1$ variabili, tutti dello stesso grado (detto grado di f) e privi di fattori comuni; la mappa f è olomorfa se i polinomi $F_0, \ldots, F_n$ non hanno zeri comuni (tranne l'origine). L'insieme I_f di tali zeri comuni è detto insieme di indeterminazione di f, dunque $f : \mathbb{P}_n - I_f \to \mathbb{P}_n$ è olomorfa.

In generale, si studiano le iterate di mappe meromorfe *generiche*: qui ci limitiamo a definirle nel caso $n = 2$, che presenta già i caratteri essenziali dello studio. Sia dunque $r : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una mappa meromorfa non costante, di grado d; ad essa corrisponde (via la proiezione canonica π) $R : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, data dalla terna di polinomi omogenei in tre variabili, di grado d, priva di fattori comuni (la terna è unica a meno di un fattore costante). L'insieme I_r è finito: diremo che $\max\ rk(r) = k$ se $\max_{x \in \mathbb{P}_2 - I_r}(\mathrm{rank}(dr_x)) = k$. È ragionevole considerare $d \geq 2$ (il grado 1 viene studiato a parte, per la sua semplicità) e assumere la condizione generica sul rango: $\max\ rk(r) = 2$.

Se vogliamo considerare $r \circ r$, partiamo da $R \circ R$, che induce una mappa olomorfa da $\mathbb{P}_2 - \pi((R \circ R)^{-1}(0)) \to \mathbb{P}_2$, che si estende a $r^2 : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una volta eliminati gli eventuali fattori comuni delle sue componenti. Se tali fattori comuni non compaiono mai nelle iterate, la mappa meromorfa r (con le condizioni precedenti) è detta *generica*: un esempio sono le mappe olomorfe.

Sia dunque $r : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una mappa meromorfa generica di grado $d \geq 2$, e R la corrispondente mappa polinomiale su $\mathbb{C}^3$: il risultato importante è che la funzione G costruita sopra è pluriarmonica su $\pi^{-1}(\mathcal{F})$, dove $\mathcal{F}$ è l'insieme di Fatou di r.

Da ciò segue che se indichiamo con T la $(1,1)-$corrente positiva su $\mathbb{P}_2$ tale che $\pi^*T = dd^cG$, il supporto di T è contenuto nell'insieme di Julia $\mathcal{J}$ di r, e se

r è normale (ha il numero massimo di nice points, cfr. la definizione 2.9 in [43]) allora supp$T = \mathcal{J}$ (cfr. Proposizione 4.5 ibidem).

Di T è interessante studiare cosa succede procedendo con le iterate, partendo da r^*T (Teorema 4.10 ibidem: " Se r è meromorfa generica, r^*T è ben definita ed è un multiplo di T"): notiamo che essendo T di bigrado $(1,1)$, si può procedere al pull-back usando un potenziale locale, così come descritto alla fine del Paragrafo 4, ovvero si definisce $r^*T = dd^c(G \circ R)$. L'operatore r^* dà informazioni sulla dinamica di r; in particolare se r non è olomorfa, r^*T non risulta liscia anche nei casi in cui si parte con potenziale G liscio. Per questo motivo lo studio dei numeri di Lelong di r^*T dice qualcosa su queste singolarità: per esempio si veda la Proposizione 9 in [39].

Inoltre risulta significativa su $\mathbb{P}_2$ la misura $T \wedge T$ (cfr. Paragrafo 6 ibidem): in generale, su $\mathbb{P}_n$, il supporto di $T \wedge \cdots \wedge T$ è un oggetto di interesse dinamico, poiché si cercano delle misure invarianti; infatti la strategia naturale è appunto quella di costruire prima $(1,1)-$correnti invarianti chiuse e positive, come la corrente di Green T, e poi farne il prodotto (cfr. per esempio [34]).

Nei prossimi paragrafi presenteremo alcuni risultati sulle correnti positive in ambiente proiettivo o kähleriano compatto, che vengono usati anche in dinamica olomorfa.

6 – Regolarizzazione di correnti

Sia M una varietà complessa, connessa e *compatta*; i gruppi di coomologia (di de Rham, di Aeppli,...) di M sono dunque finito-dimensionali, e si possono calcolare usando sia forme differenziali che correnti (cfr. [46], p. 382).

È ben noto (cfr. anche [1], Paragrafo 7) che in generale la classe di coomologia di una corrente chiusa e positiva non contiene rappresentanti lisci positivi, nemmeno se la varietà è $\tilde{\mathbb{P}}_2$, lo spazio proiettivo scoppiato in un punto: ciò dipende, come vedremo, dalla mancanza di *omogeneità* di $\tilde{\mathbb{P}}_2$. Perciò in generale non si riesce ad approssimare una corrente chiusa e positiva con forme chiuse e positive che stiano nella stessa classe di coomologia: per affrontare tale problema, bisogna porre ulteriori condizioni sulla varietà compatta e/o indebolire la richiesta di positività o di regolarità per le forme approssimanti (come abbiamo già visto anche nel Paragrafo 3).

– Il caso omogeneo.

Sia M una varietà complessa, omogenea per l'azione di un gruppo di Lie G di biolomorfismi di M. Fissiamo su G una forma di volume μ e una funzione $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$, $\chi \geq 0$, $\int_G \chi(g)\mu(g) = 1$; indichiamo con l_g l'automorfismo di G indotto dalla moltiplicazione a sinistra per $g \in G$.

Definizione 6.1. Sia $T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$; la corrente liscificata $\chi * T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$ è definita come $(\chi * T)(\beta) := \int_G \chi(g) T(l_g^* \beta)\mu(g)$ per ogni forma test β.

Proposizione 6.2. *Data* $T \in \mathcal{D}'_{p,q}(M)$*, esiste* $T_\chi \in \mathcal{E}^{n-p,n-q}(M)$ *che rappresenta la corrente* $\chi * T$*, ovvero per ogni forma test* β *si ha* $(\chi * T)(\beta) := \int_M T_\chi \wedge \beta$*. Inoltre, se* T *è chiusa,* T_χ *è chiusa e coomologa a* T *nella coomologia di de Rham.*

La dimostrazione della proposizione precedente si può trovare in [53], Proposizione 1.2.1 e Osservazione 1.1; nello stesso modo si può dimostrare, per quanto riguarda la coomologia di Aeppli, che se T è dd^c-chiusa o componente di bordo, anche T_χ lo è.

Ricordiamo che una corrente reale $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ è detta definita positiva (ovvero strettamente positiva) nel punto $x \in M$ se per ogni forma test positiva η, che non si annulla in x, vale $T(\eta) > 0$. La stretta positività passa da T a T_χ, come mostra il seguente risultato, dovuto a Richthofer:

Teorema 6.3. (*cfr.* [53], *Teorema* 1.3.1) *Se* $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(M)$ *è una* $(p,p)-$*corrente chiusa e positiva, strettamente positiva in* x*, allora* $T_\chi \in \mathcal{D}^{p,p}(M)$ *è una forma chiusa e positiva nel senso delle correnti, ed è strettamente positiva sull'insieme* $(\mathrm{supp}\chi)^0 \cdot x := \{z \in M/z = gx, g \in (\mathrm{supp}\chi)^0\}$.

Osservazione Lo stesso vale se T è pluriarmonica o componente di bordo (sempre nel senso delle correnti).

Il teorema di Richthofer ha permesso a Berteloot di dimostrare il seguente interessante risultato:

Teorema 6.4. (*cfr.* [53], *Corollario* 1.3.2 *e Proposizione* 1.3.3) *Se* M *è uno spazio omogeneo che ammette una* $(1,1)-$*corrente* T *chiusa e positiva, strettamente positiva in un punto, allora* M *è una varietà kähleriana.*

In particolare, se lo spazio omogeneo $M = G/H$ è compatto, la sua fibrazione di Tits lo esprime come un fibrato olomorfo a base una varietà razionale (e omogenea) Q e a fibra F olomorficamente parallelizzabile; se M risulta una varietà kähleriana, allora $M \simeq F \times Q$ e $F = Alb(M)$ è un toro.

Questo tipo di regolarizzazione di correnti è stato applicato innanzitutto da Guedj e da Dinh e Sibony in problemi di dinamica complessa ([48], [30]) prendendo $M = \mathbb{P}_n$, oppure M compatta omogenea, oppure M varietà proiettiva. Per esempio, in [30] gli autori studiano l'entropia topologica di una mappa razionale dominante $f : M \to M$ su una varietà proiettiva M. La tecnica usata è di estendere a zero un pull-back di correnti, fatto dove f è localmente biolomorfa: ma per poter considerare l'estensione banale, c'è bisogno di opportune stime di massa, che si ottengono regolarizzando la corrente. Gli strumenti sono di questo tipo:

Proposizione 6.5. (*cfr.* [30], *Lemma* 2) *Sia M una varietà proiettiva complessa di dimensione $n \geq 2$, dotata di una forma di Kähler ω con $\int_M \omega^n = 1$. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa e positiva, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti lisce, chiuse e positive, che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$.*

La dimostrazione consiste nell'immergere M in $\mathbb{P}_N$ e poi proiettare opportunamente su $\mathbb{P}_n$, di modo da avere una famiglia finita di mappe olomorfe suriettive $\Psi_i : M \to \mathbb{P}_n$ tale che in ogni punto almeno una delle Ψ_i sia di rango massimo. Ponendo poi $S_i := (\Psi_i)_* T$, si ha $||S_i|| \leq c_1||T||$, e ci si è ricondotti ad un problema analogo su $\mathbb{P}_n$, che è una varietà omogenea.

– Il caso kähleriano.

Come mostra l'esempio di $\tilde{\mathbb{P}}_2$, in ambiente kähleriano compatto non omogeneo non ci si può aspettare di regolarizzare al meglio correnti positive e chiuse: una strada è quella di *cedere positività* decomponendo le regolarizzanti, metodo che risale al lavoro di Demailly ed è sviluppato da Dinh e Sibony.

Sia dunque M una varietà kähleriana compatta di dimensione $n \geq 2$, dotata di una forma di Kähler ω fissata, di solito con $\int_M \omega^n = 1$.

Proposizione 6.6. *Sia (M, ω) come sopra. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa e positiva, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti correnti lisce, chiuse e positive, che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$ e $||T'|| \leq c||T||$.*

Abbiamo riportato questa proposizione perché essa è l'analogo kähleriano della Proposizione 6.5; si tratta comunque di una versione particolare del teorema seguente (basta prendere $T' = T + \lim_m T_m^-, T_m = T_m^+$).

Teorema 6.7. (*cfr.* [29], *Teorema* 1.1, *Teorema* 4.1, *Corollario* 4.6) *Sia (M, ω) come sopra. Esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(M)$ chiusa (o pluriarmonica) e positiva, ci sono successioni $\{T_m^+\}$ e $\{T_m^-\}$ di correnti lisce, chiuse (o pluriarmoniche) e positive, tali che, per ogni m, $||T_m^\pm|| \leq c||T||$ e $\lim_m T_m^+ - T_m^- = T$. Se T è a coefficienti continui, la convergenza è uniforme.*

Questa tecnica di regolarizzazione è la più usata in letteratura nell'ambiente delle varietà kähleriane compatte: conviene dunque darne la linea di dimostrazione e considerare varie osservazioni.

1. Nella Proposizione 6.6, le regolarizzate T_m si mantengono chiuse e positive, ma convergono non a T, bensì a $T + c\omega$; invece, nel Teorema 6.7, T è limite di una successione di differenze di forme chiuse e positive: questo ultimo caso si rivela il più agevole da usare, ed è la ragione per cui si introduce la classe delle correnti DSH (vedi Paragrafo 7).
2. Le stime di massa si collegano in modo naturale alle classi di coomologia di correnti chiuse e positive: per esempio, nel caso chiuso (ma lo stesso vale nel caso pluriarmonico, dato che la forma di Kähler è chiusa), se T ed S sono $(p,p)-$correnti chiuse e positive, coomologhe, allora $||T|| = (T, \omega^{n-p}) = (T + dd^c u, \omega^{n-p}) = (S, \omega^{n-p}) = ||S||$. In generale la massa non determina la classe di coomologia, a meno di casi particolari: per esempio, essendo $\dim H^{p,p}(\mathbb{P}_k, \mathbb{C}) = 1\ \forall p$, ogni corrente chiusa e positiva T sta nella classe di coomologia $[||T||\omega^p]$, e dunque la massa individua la classe di coomologia. Si veda anche, per il caso $p = 1$, la Definizione 7.2.
3. Cenno di dimostrazione nel caso chiuso. I punti importanti sono due: innanzitutto tramite la regolarizzazione del divisore eccezionale, ovvero della $(1,1)-$corrente $[\tilde{\Delta}]$ sulla varietà kähleriana $\widetilde{X \times X}$ (che è lo scoppiamento di $X \times X$ lungo la diagonale Δ) si riesce a ottenere su $X \times X$ una regolarizzazione debole del tipo $K_m^+ - K_m^- \to [\Delta]$, dove $K_m^\pm$ sono correnti chiuse e positive, a coefficienti L^1_{loc} e lisce fuori di Δ.

In secondo luogo, se π_1, π_2 sono le proiezioni di $X \times X$ sui due fattori, le correnti $T_m^\pm$ si ottengono come $T_m^\pm := (\pi_1)_*(K_m^\pm \wedge (\pi_2)^* T)$. Si mostra, lavorando in carta locale, che esse verificano la convergenza e la stima di massa richieste. Infine, con un'analisi dei coefficienti delle $K_m^\pm$ si prova che esse si possono rimpiazzare con correnti a coefficienti lisci.

– **Minore positività e/o regolarità.**

Alla base di questi risultati c'è il fondamentale teorema di regolarizzazione di Demailly, che è l'argomento del lavoro [21]. Lo riportiamo qui in una versione che deriva da modifiche del risultato originale (Teorema 3.2 in [26] e Teorema 1.2 in [62]).

Teorema 6.8. *Sia X una varietà complessa compatta, su cui è fissata una metrica hermitiana con forma ω. Sia $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi$ una $(1,1)-$corrente chiusa su X, con α liscia (e chiusa) e ψ funzione quasi plurisubarmonica; supponiamo che valga $T \geq \gamma$ per una $(1,1)-$forma reale γ su X a coefficienti continui. Allora* *esiste una successione* $T_k = \alpha + i\partial\overline{\partial}\psi_k$ *di* $(1,1)-$*correnti chiuse su* X, *coomologhe a* T, *tali che:*

1. *esistono degli insiemi analitici* Z_k *di* X, $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset X$ *tali che* ψ_k *(e dunque* T_k*) è liscia su* $X - Z_k$, *mentre vicino a* Z_k *il potenziale* ψ_k *ha poli logaritmici*
2. $\{\psi_k\}$ *è non crescente, converge a* ψ *e dunque le* T_k *convergono a* T
3. $T_k \geq \gamma - \delta_k\omega$, *con* $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$.

Nelle ipotesi precedenti, se γ *è una forma chiusa, si può scegliere* $\delta_k = C/k$ *e vale inoltre per ogni* p, $1 \leq p \leq n$*:*

$$\lim_{k\to\infty} 1/k \int_{X-Z_k} (T_k - \gamma + (C/k)\omega)^p \wedge \omega^{n-p} = 0.$$

Questo tipo di risultati si applica nella caratterizzazione di metriche singolari su line bundles, e quindi per caratterizzare varietà (di Moishezon, nella classe $\mathcal{C}$ di Fujiki) tramite correnti strettamente positive: si possono vedere per esempio i lavori sopra citati, e la loro bibliografia.

7 – Funzioni quasi plurisubarmoniche e correnti DSH

Se X è una varietà compatta, per il principio del massimo si ha $Psh(X) = \mathbb{R}$: conviene quindi introdurre (cfr. [21]) la nozione di funzione quasi plurisubarmonica (*almost psh*), a cui è legata la nozione di corrente quasi positiva (*almost positive*). Definiremo qui i due spazi $QPSH(X)$ e $PSH(X,\alpha)$; un ulteriore sviluppo, dal punto di vista delle correnti, è la classe di correnti $DSH(X)$.

Definizione 7.1 Sia X una varietà compatta di dimensione n.

1. $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ è detta quasi positiva se esiste $\alpha \in \mathcal{E}^{p,p}(X)_{\mathbb{R}}$ con $T \geq -\alpha$.
2. Una funzione φ è detta quasi plurisubarmonica su X ($\varphi \in QPSH(X)$) se è localmente esprimibile come somma di una funzione plurisubarmonica e di una funzione liscia.
3. Siano $\alpha \in \mathcal{E}^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}, \varphi \in L^1_{loc}(X)$: diremo che $\varphi \in PSH(X,\alpha)$ se $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq -\alpha$.

Osservazioni

1) In alcuni lavori, per esempio [56], [50], [54] e [31], la definizione di $PSH(X,\alpha)$ è un po' diversa: tipicamente, è data in ambiente kähleriano e la forma α è richiesta essere chiusa, eventualmente non liscia. D'altra parte (cfr. Definizione 2.1 e commenti che la seguono in [50]) gli autori osservano che conviene prendere una rappresentante liscio della classe di α, così che le funzioni considerate siano superiormente continue (e quindi superiormente limitate) su X, e si possa considerare $PSH(X,\alpha)$ come sottospazio chiuso

di $L^1(X)$ (altrimenti bisogna introdurre la nozione di funzione $\alpha-$superiormente semicontinua). Per quanto riguarda la condizione di chiusura (che permette di confrontare localmente φ col potenziale di α) e la kählerianità della varietà, le faremo intervenire al momento del loro uso. Per esempio, si può osservare che in una varietà $p-$kähleriana X (cfr. [1], Definizione 6.5), con forma Ω, una corrente $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ è quasi positiva se e solo se esiste $c > 0$ tale che $T \geq -c\Omega$.

2) In (1) e (3) della definizione precedente, la definizione non cambia se si chiede che α sia strettamente positiva ($\alpha > 0$).
3) Se φ è quasi plurisubarmonica, la corrente $i\partial\overline{\partial}\varphi$ è quasi positiva; viceversa, se $\varphi \in L^1_{loc}(X)$ e $i\partial\overline{\partial}\varphi$ è quasi positiva, allora φ coincide quasi ovunque con una funzione quasi plurisubarmonica.
4) Se $\varphi \in PSH(X, \alpha)$, allora φ è quasi plurisubarmonica; viceversa, se φ è quasi plurisubarmonica, esiste α tale che $\varphi \in PSH(X, \alpha)$.
5) Le funzioni quasi plurisubarmoniche hanno la stessa " regolarità" delle funzioni plurisubarmoniche: dunque sono superiormente semicontinue e coincidono quasi ovunque con una funzione $L^1_{loc}(X)$. Essendo X compatta, sono in $L^1(X)$ e si può supporre senza perdita di generalità che siano a valori non positivi.

Consideriamo ora i legami con le classi di coomologia [.] in $H^{1,1}_{\partial\overline{\partial}}(X)$. Se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e quasi positiva, esiste una $(1,1)-$forma chiusa β e una funzione φ quasi plurisubarmonica con $T = \beta + i\partial\overline{\partial}\varphi$; infatti, preso un qualsiasi rappresentante liscio β della classe $[T]$, vale $T = \beta + i\partial\overline{\partial}\varphi$, ma essendo T una corrente $\mathbb{C}$-piatta, risulta che $\varphi \in L^1_{loc}(X)$, e la positività segue facilmente; φ è detto un *potenziale* per T.

Definizione 7.2. Sia X una varietà compatta di dimensione n, su cui è fissata una metrica di Gauduchon h (ovvero tale che $i\partial\overline{\partial}\omega_h^{n-1} = 0$). Sia $\alpha \in \mathcal{E}^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$:

1. La classe $[\alpha]$ è detta *psef* se contiene $T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(X)$ positiva e chiusa.
2. La classe $[\alpha]$ (qui si può supporre anche α non liscia) è detta *nef* se $\forall\epsilon > 0$ esiste un rappresentante liscio α_ϵ di $\{\alpha\}$ con $\alpha_\epsilon \geq -\epsilon\alpha$.

Osservazioni

1) È facile mostrare che la classe $[\alpha]$ è psef se e solo se $PSH(X, \alpha) \neq \emptyset$; in questo caso, chiamando $P^{1,1}_\alpha(X) := \{T \in \mathcal{D}'_{n-1,n-1}(X)$ positive e chiuse con $[\alpha] = [T]\}$, vale $PSH(X, \alpha) = P^{1,1}_\alpha(X) \oplus \mathbb{R}$.
2) Demailly dimostra in [21] (Proposizione 6.1) che ogni classe nef è psef, mentre la classe della corrente di integrazione sul divisore eccezionale del blowup di $\mathbb{P}_n$ in un punto è psef ma non nef, e dunque le due classi non sempre coincidono.
3) Inoltre dimostra che se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, che ha numeri di Lelong nulli fuori di un insieme finito (per esempio se è liscia

fuori dell'insieme), allora $[T]$ è nef. Questo gli consente di provare che se X è una varietà compatta con fibrato tangente nef (quindi classi nef e psef coincidono), allora X è kähleriana se e solo se sta nella classe $\mathcal{C}$ di Fujiki, ed è proiettiva se e solo se è di Moishezon (Corollario 1.6 ibidem).

L'analisi dei coni di classi nef e psef si può trovare, per esempio, in [23], [24] e [58]. Introduciamo ora le classi di correnti $DSH^p(X), 0 \leq p \leq n-1$ (cfr. [29] o [34]).

Definizione 7.3 Sia X una varietà compatta di dimensione n, e sia $T \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$. Diremo che $T \in DSH^p(X)$ se esistono su X le correnti $T_j, \Omega_j^-, \Omega_j^+$ $(j = 1, 2)$, tali che

1. $T_j \leq 0, \; j = 1, 2$, e $T = T_1 - T_2$.
2. $\Omega_j^\pm \geq 0, \; d\Omega_j^\pm = 0, \; i\partial\overline{\partial}T_j = \Omega_j^+ - \Omega_j^-, \; j = 1, 2.$

Siano $T_n \in DSH^p(X), \; T_n \to T$. Diremo che le T_n convergono a T in DSH se le masse $||T_n||_{DSH}$ sono localmente uniformemente limitate, dove

$$||T||_{DSH} := min\{||T_1|| + ||T_2|| + ||\Omega_1^+|| + ||\Omega_1^-|| + ||\Omega_2^+|| + ||\Omega_2^-||\}$$

al variare delle decomposizioni di T descritte in (1) e (2).

Osservazioni

1) Lo scopo di questa definizione è quello di attenuare la richiesta di positività sulle correnti mediante una somma algebrica; correnti positive (o negative) e plurisubarmoniche (o plurisuperarmoniche o pluriarmoniche) stanno in $DSH^p(X)$. Tutte le correnti in $DSH^p(X)$ sono $\mathbb{C}-$normali, e dunque $\mathbb{C}-$piatte.
2) Per $p = 0$ si tratta di funzioni in $L^1_{loc}(X)$; se X è compatto si dimostra facilmente che ogni $T \in DSH^0(X)$ si scrive come $T = T_1 - T_2$, dove $T_j, \; j = 1, 2$, sono funzioni quasi plurisubarmoniche. L'insieme delle funzioni in $L^1(X)$ che sono differenza di funzioni plurisubarmoniche (e a valori non positivi) è chiamato $DSH(X)$ in [33].
3) Usando le proprietà della classe $DSH^0(X)$, in [33] (appendice) gli autori mostrano che un sottoinsieme analitico proprio Y di una varietà kähleriana compatta è globalmente pluripolare, ovvero esiste una funzione φ quasi plurisubarmonica con $Y \subset \{\varphi = -\infty\}$.
4) Se scegliamo X compatta, con una metrica di Gauduchon h, per ogni $\varphi \in DSH^0(X)$ vale $||\Omega_j^+|| = ||\Omega_j^-||$, poiché

$$||\Omega_j^+|| = \int_X \Omega_j^+ \wedge \omega_h^{n-1} = \int_X (i\partial\overline{\partial}T_j + \Omega_j^-) \wedge \omega_h^{n-1} = \int_X \Omega_j^- \wedge \omega_h^{n-1} = ||\Omega_j^-||.$$

Lo stesso vale per $T \in DSH^p(X)$ in presenza di una metrica hermitiana h tale che $i\partial\overline{\partial}\omega_h^{n-p-1} = 0$.

(5) Se T è una $(1,1)-$corrente chiusa e quasi positiva, esiste una $(1,1)-$forma chiusa α e una funzione φ quasi plurisubarmonica (che possiamo assumere non positiva essendo superiormente limitata), con $T = \alpha + i\partial\overline{\partial}\varphi$; questo invece non succede in bigrado superiore a uno, nemmeno su varietà compatte kähleriane (cfr. [31] pag. 295). Dunque se $T = -T_2 \geq 0$ e chiusa, e T_1 è un rappresentante liscio della sua classe, ovvero $T_1 - T_2 = i\partial\overline{\partial}S$, non si può chiedere $S \leq 0$, e dunque tocca decomporre nelle Ω_j^-.

(6) L'esempio tipico di corrente $T \in DSH^p(X)$, quando X è una varietà compatta kähleriana, si ottiene partendo da una corrente $S \in \mathcal{D}'_{n-p,n-p}(X)$ chiusa e positiva, e da due funzioni quasi plurisubarmoniche limitate φ_1 e φ_2 (che quindi posso moltiplicare per S). Definiamo $T := (\varphi_1 - \varphi_2)S$, ovvero $T_j := \varphi_j S$. Essendo φ_j limitata, posso supporre $\varphi_j \leq 0$ e quindi è soddisfatta (1) della definizione. Inoltre, $i\partial\overline{\partial}T_j = i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge S = (i\partial\overline{\partial}\varphi_j + \alpha_j) \wedge S - \alpha_j \wedge S$ è differenza di due forme globali positive (potendosi scegliere $(1,1)-$forme positive α_j). Tuttavia non si riesce a ottenere la chiusura dei due singoli addendi, ma solo la chiusura della loro somma, a meno di non disporre di una $(1,1)-$forma positiva e chiusa, ovvero di una metrica kähleriana.

Osserviamo che, se $f : M \to N$ è una mappa olomorfa e propria, e $T \in DSH^p(M)$, allora $f_*T \in DSH^p(N)$ poiché, quando è definito, il push-forward conserva chiusura e positività. Per lo stesso motivo, se $f : M \to N$ è una submersione olomorfa, e $T \in DSH^p(N)$, allora $f^*T \in DSH^p(M)$. Per le mappe a fibre equidimensionali, si ha il seguente risultato:

Teorema 7.4. (*cfr.* [34], *Teorema* 3.4) *Sia $f : M \to N$ una mappa olomorfa e suriettiva (o dominante) a fibre equidimensionali. Allora l'operatore di pull-back $f^* : DSH^p(N) \to DSH^p(M)$ è ben definito, continuo e commuta con il dd^c. Se $||T||(A) = 0$ per un certo sottoinsieme $A \subset N$, allora $||f^*T||(f^{-1}(A)) = 0$.*

La dimostrazione del Teorema 7.4 è simile a quella del Teorema 4.1: il lemma tecnico di convergenza è provato in [34] direttamente nella classe DSH (Lemma 3.3 ibidem). Più in generale, la classe di funzioni DSH^0 è stabile anche per:

- pull-back mediante mappe olomorfe suriettive (cfr. [33], 2.4)
- push-forward mediante mappe a fibra generica finita (per esempio, modificazioni) (cfr. [33], 2.3).

Qui e nel seguente paragrafo parleremo brevemente di questi argomenti su una varietà compatta kähleriana (X, ω), poiché la serie di lavori di Guedj e altri (cfr. per esempio [17], [25], [59], [50] e le loro bibliografie) sulle funzioni quasi plurisubarmoniche e sull'operatore di Monge-Ampere $(dd^c.)^n$, situa in modo naturale l'analisi su varietà compatte kähleriane (cfr. l'introduzione di [50]). Su tali varietà, lo studio delle funzioni quasi plurisubarmoniche è motivato da:

1. il legame con metriche singolari (cfr. per esempio [38], [25])
2. il legame con l'esistenza di metriche canoniche in geometria kähleriana (cfr. per esempio [66], [65])
3. l'uso frequente in dinamica olomorfa in più variabili.

Riprendendo le osservazioni precedenti, ogni funzione plurisubarmonica o differenza di funzioni quasi plurisubarmoniche su X kähleriana compatta sta in $DSH^0(X)$, proprio perché se $T := \varphi_1 - \varphi_2$, esistono due costanti tali che $i\partial\overline{\partial}\varphi_j \geq -c_j\omega$, da cui $i\partial\overline{\partial}\varphi_j = (i\partial\overline{\partial}\varphi_j + c_j\omega) - c_j\omega$.

Il risultato principale sulle funzioni quasi plurisubarmoniche in ambiente kähleriano è il teorema di regolarizzazione globale che ora presentiamo; la sua dimostrazione è nell'appendice di [50] (nel caso proiettivo, ma confronta anche l'Osservazione 8.3 ibidem).

Teorema 7.5. *Su ogni varietà kähleriana compatta* (X, ω), *esiste una costante* $A \geq 1$ *tale che ogni funzione* $\varphi \in PSH(X, \omega)$ *è limite di una successione decrescente di funzioni lisce* $\varphi_k \in PSH(X, A\omega)$.

Le correnti DSH si comportano bene rispetto alle regolarizzazioni che abbiamo considerato nel Paragrafo 6 (vedi il seguente teorema), e rispetto a processi di pull-back, come vedremo nel Paragrafo 8.

Teorema 7.6. (*cfr.* [29], *Teorema* 4.4) *Sia* (X, ω) *come sopra. Esiste una costante* $c > 0$ *tale che, per ogni* $T \in DSH^p(X)$, *c'è una successione* $\{T_m\}$ *di correnti lisce, tali che per ogni* m, $||T_m|| \leq c||T||$ *e* $\lim_m T_m = T$.

8 – Pull-back e prodotto di correnti su varietà compatte kähleriane

Riguardo al pull-back di correnti, ci occuperemo principalmente di mappe olomorfe f (suriettive o dominanti) fra varietà compatte kähleriane, continuando il discorso iniziato nel Paragrafo 4. Ricordiamo che se $f : M \to N$ è una mappa olomorfa propria e suriettiva a fibre equidimensionali, e se M è una varietà kähleriana, anche N lo è (Teorema 2 in [67]).

Dato che f è una submersione olomorfa fuori di un sottoinsieme analitico, si potrebbe pensare di procedere come nel caso trattato nel Paragrafo 4, ovvero con una estensione. Questo è possibile usando il procedimento di regolarizzazione di correnti su varietà kähleriane compatte descritto nel Paragrafo 6.

Teorema 8.1. (*cfr. Corollario* 1.3 *e Corollario* 4.2 *in* [29]) *Sia* $f : M \to N$ *una mappa olomorfa e suriettiva fra varietà compatte kähleriane, e sia* Σ *il sottoinsieme analitico tale che* $g := f|_{M-\Sigma}$ *abbia rango massimo. Sia* T *una* $(p, p)-$*corrente positiva e chiusa* (*o pluriarmonica*) *su* N: *allora è ben definita la corrente* $f^*T := \widetilde{g^*T}$, *essa è positiva e chiusa* (*o pluriarmonica*).

Cenno di dimostrazione. Per la Proposizione 6.6, esiste una successione $\{T_m\}$ di correnti chiuse e positive lisce che converge a una corrente chiusa e positiva $T' \geq T$, e per ogni m, $||T_m|| \leq c||T||$ e $||T'|| \leq c||T||$. Siano $S_m := f^*(T_m)$; è possibile controllare uniformemente le masse di queste correnti, poiché (oltre alla stima di massa per le T_m) possiamo usare le forme di Kähler ω_M e ω_N, e $f_*(\omega_M)$ si controlla con un opportuno multiplo di ω_N. Dunque una sottosuccessione delle S_m converge a una corrente S su M, che verifica $S \geq g^*T$ su $M - \Sigma$: perciò è ben definita la corrente $f^*T := \widetilde{g^*T}$, essa è positiva.

La chiusura è dovuta al teorema di Skoda (cfr. Teorema 4.9 in [1]) nel caso chiuso, e al Teorema 1.3 in [34] nel caso pluriarmonico (la dimostrazione data in [29] non è completa). Nel lavoro citato si prova inoltre un risultato di semicontinuità (in generale si vorrebbe che se $T_n \to T$, valesse $f^*T_n \to f^*T$).

Nel caso particolare delle modificazioni fra varietà compatte kähleriane dunque non c'è alcun vincolo sul bigrado della corrente, per quanto riguarda l'esistenza della trasformata stretta di correnti positive e chiuse o pluriarmoniche: infatti la corrente che abbiamo appena costruito è ciò che nel Paragrafo 4 abbiamo chiamato la trasformata stretta di T (e che in [33] gli autori chiamano parte principale di f^*T): per la sua esistenza, è essenziale non solo la kählerianità ma anche la compattezza delle varietà, come prova l'esempio citato dopo 4.2.

In dinamica olomorfa, è necessario usare il pull-back di forme e correnti per mappe razionali, fra varietà proiettive, oppure iterare oggetti per automorfismi della varietà. Entra quindi in gioco l'insieme di indeterminazione, ed è naturale procedere con un pull-back fuori di esso seguito da un'estensione banale, cercando di ottenere un oggetto che abbia le stesse caratteristiche di quello di partenza.

Descriviamo il problema nel primo caso che è stato studiato (dopo $\mathbb{P}_n$).

Sia X^n una varietà algebrica proiettiva e sia $f : X \to X$ una mappa razionale dominante (ovvero localmente aperta sui punti generici di X). Sia $\Gamma = \Gamma_f$ il grafico di f, che possiamo considerare come corrente di integrazione $[\Gamma]$ su $X \times X$, e chiamiamo π_1 e π_2 le proiezioni canoniche di $X \times X$ sui fattori, ristrette a Γ. Sia $I = I_f$ l'insieme dei punti di indeterminazione di f, ovvero $I_f = \{x \in X/\dim(\pi_1^{-1}(x) \cap \Gamma) > 0\}$. I è una sottovarietà algebrica di codimensione almeno due, e $\dim(\pi_1^{-1}(I) \cap \Gamma) \leq n-1$.

Lo scopo primario è di fare il pull-back $f^*\beta$ di una $(k,k)-$forma (o corrente) β su X: posso ovviamente considerare $(f|_{X-I})^*(\beta)$ e poi tentare di estenderla, come corrente, attraverso I: il punto è proprio garantire l'esistenza della estensione banale, ma non solo.

Per esempio, come si osserva in [47], 2.1, se X è una varietà compatta kähleriana e $f : X \to X$ è una mappa meromorfa dominante, per ogni $(1,1)-$corrente chiusa e positiva T esiste l'estensione $\widetilde{f^*T}$, ed essa è ancora chiusa e positiva. Siccome f è genericamente di rango massimo, si può controllare che la mappa $T \to \widetilde{f^*T}$ è continua e preserva le classi di coomologia; tuttavia questa costruzione non è in generale compatibile con le iterate, ovvero $\widetilde{(f \circ f)^*T} \neq$

$\widetilde{f^*(\widetilde{f^*T})}$ e questo porta, per esempio, a doversi limitare alle mappe algebricamente stabili (cfr. [47] e [48], Osservazione 1.4).

In [48], l'autore propone di considerare il grafico liscio (altrimenti lo si può desingolarizzare, usando mappe olomorfe, e quindi la situazione non cambia), e di definire $f^*\beta := (\pi_1)_*(\pi_2^*\beta)$ e anche $f_*\beta := (\pi_2)_*(\pi_1^*\beta)$. La $(k,k)-$corrente $f^*\beta$ è ben definita sul dominio, e per definizione commuta con gli operatori ∂ e $\overline{\partial}$. Essendo β liscia, $f^*\beta$ è una corrente a coefficienti L^1_{loc} che su $X - I$ coincide con $(f|_{X-I})^*(\beta)$ (perché dove f è olomorfa, vale $\pi_2 = f \circ \pi_1$); siccome non si è aggiunta massa su I, si tratta proprio dell'estensione banale $\widetilde{(f|_{X-I})^*}(\beta)$ (dunque il procedimento non dipende dalla modalità di desingolarizzazione del grafico).

In [30], si propone una strada analoga, senza desingolarizzare il grafico e indicando con π_1 e π_2 le proiezioni canoniche di $X \times X$ sui fattori. Data la $(k,k)-$forma β su X, se ne considera il pull-back a $X \times X$ che diventa del grado " giusto" considerando la corrente $(\pi_2^*\beta) \wedge [\Gamma]$ e proiettando di nuovo su X, ovvero $f^*\beta := (\pi_1)_*(\pi_2^*\beta \wedge [\Gamma])$. Una semplice verifica mostra che le due definizioni coincidono, e che l'operatore f^* così definito è continuo dallo spazio delle forme lisce a quello delle correnti a coefficienti L^1_{loc}.

Questo ovviamente suggerisce un modo di definire pull-back di correnti, anche se esse non sono di grado $(1,1)$, come abbiamo già visto nel Paragrafo 4: bisognerà solo dare un senso opportuno al " wedge con il grafico", facendo leva sulla proiettività della varietà (anzi, vedremo che basta una forma di Kähler).

È possibile anche, in alcuni casi, definire una specie di " trasformata totale" della corrente, come abbiamo fatto nel Paragrafo 4 per le modificazioni; questo discorso viene affrontato in [34] nel caso più generale di *trasformazioni meromorfe* fra varietà compatte.

Definizione 8.2. Siano M e N varietà compatte di dimensione m ed n; una trasformazione meromorfa (MT) di codimensione l, $F : M \to N$, è un sottoinsieme analitico $\Gamma = \sum \Gamma_j$ di dimensione pura $n + l$ di $M \times N$, tale che la proiezione canonica π_2 ristretta a ogni Γ_j sia dominante.

Nel Paragrafo 4 di [34] sono studiati vari casi in cui si può fare il pull-back di forme o correnti per una MT. Se in particolare M ed N sono varietà compatte kähleriane e T è una $(p,p)-$corrente (con $n + l - m \leq p \leq n$) positiva e chiusa o pluriarmonica, si prova che si può estendere $(\pi_2|_{\Gamma-C})^*T$ attraverso C, il luogo dove le fibre di π_2 hanno dimensione minore di quella generica l. Perciò si definisce la trasformata stretta $T' = \tilde{T_F} := (\pi_1)_*\widetilde{(\pi_2|_{\Gamma-C})^*}T$, ed essa risulta positiva e chiusa, o pluriarmonica (cfr. Proposizione 5.1 in [34]). Per ottenere questi risultati, l'ipotesi di kählerianità entra in gioco innanzitutto nell'uso di approssimazioni di correnti (Proposizione 6.6) e poi per ottenere che l'estensione banale sia ancora pluriarmonica, esattamente come abbiamo descritto nello schema di dimostrazione del Teorema 8.1.

Se inoltre succede che si conservino le classi di coomologia, ovvero che $[\tilde{T_F}] = F^*[T]$, allora gli autori chiamano $\tilde{T_F}$ la trasformata totale di T, e la indicano con la notazione usuale, F^*T; in questo caso l'operatore F^* è continuo (Proposizione 5.4 ibidem). Gli autori riescono a provare nel Teorema 5.5 che per $(1,1)-$correnti chiuse e pluriarmoniche esiste la trasformata totale (nel caso di una modificazione, confronta con la definizione di trasformata totale data nel Paragrafo 4 e il Teorema 4.5).

Abbiamo visto come il problema di una buona definizione di prodotto di correnti entri pesantemente anche nella costruzione del pull-back; il lavoro di riferimento per il prodotto di correnti su varietà kähleriane è [29]; ricordiamo che il problema è il seguente: dare una " buona definizione" di $S \wedge T$, dove S è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, e $T^{p,p} \geq 0$ è una corrente pluriarmonica. In [29] si pone come ipotesi aggiuntiva una opportuna regolarità del potenziale u, ovvero si richiede che sia possibile scrivere $S = \alpha + i\partial\overline{\partial}u$, con α liscia e u funzione *continua* quasi plurisubarmonica (cfr. la corrente di Green definita nel Paragrafo 5). In questo caso $S \wedge T$ è ben definita, e risulta una corrente positiva e pluriarmonica (cfr. Teorema 5.1 ibidem); inoltre si ha un risultato di continuità di questo tipo:

Se $\{T_n\}$ è una successione di correnti positive e pluriarmoniche convergenti a T, se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni continue e quasi plurisubarmoniche, convergenti uniformemente a u (in particolare, se sono decrescenti a u), e $S_n = \alpha + i\partial\overline{\partial}u_n$, allora la successione $S_n \wedge T_n$ è ben definita, e converge a $S \wedge T$.

In realtà, il prodotto $S \wedge T$ è definito proprio come limite: data u come nell'ipotesi, posso sempre scriverla come limite di funzioni u_n continue e quasi plurisubarmoniche: tuttavia, dai teoremi di tipo Richberg (cfr. per esempio Lemma 2.15 in [21]) in realtà si può supporre $u_n \in \mathcal{C}^\infty(X)$, e dunque sono ben definite le $S_n \wedge T := i\partial\overline{\partial}u_n \wedge T$. Notiamo che qui si ragiona nel globale: nel locale infatti basterebbe regolarizzare per convoluzione. Il caso più interessante è quello in cui le u_n decrescono a u: su una varietà compatta, questo implica la convergenza uniforme e quindi il possibile passaggio al caso liscio.

Naturalmente l'ipotesi di potenziale continuo è piuttosto pesante: per esempio, l'unbounded locus $L(u)$ è vuoto (si può confrontare con [22], III (3.6) per il caso chiuso); invece il fatto che T sia pluriarmonica può essere attenuato chiedendo $T \in DSH(X)$ (si tratta sostanzialmente di tener conto, nelle stime, anche del termine $u\ i\partial\overline{\partial}T$):

Teorema 8.3. (*Teorema* 5.3 *in* [29]) *Se S è una $(1,1)-$corrente chiusa e positiva, con potenziale continuo, e $T^{p,p} \in DSH^p(X)$, allora $S \wedge T$ è ben definita, sta in $DSH^{p+1}(X)$, e dipende con continuità da S e da T.*

La costruzione generalizza i casi classici, ovvero il caso S liscia (cioè u liscia), e il caso T chiusa, mentre nel caso T non chiusa ma pluriarmonica non è chiaro se la costruzione rispetta o meno le classi di coomologia.

Un altro contributo al tema del prodotto di correnti su varietà kähleriane si trova nel lavoro [13]. Gli autori studiano oggetti del tipo $\int_K S_1 \wedge \cdots \wedge S_p \wedge T$, dove K è un compatto di una varietà kähleriana X di dimensione n, T è una $(n-p, n-p)-$corrente chiusa e positiva, e le S_j sono $(1,1)-$correnti chiuse e quasi positive a poli in K. Questo tipo di prodotto viene applicato allo studio dei numeri di Lelong di trasformate di correnti chiuse e positive rispetto allo scoppiamento in un punto della varietà kähleriana, e allo studio dell'integrabilità locale di e^{φ}, con $\varphi \in Psh(X)$.

REFERENCES

[1] L. Alessandrini: *Correnti positive: uno strumento per l'analisi globale su varietà complesse*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **LXVIII** (1998), 59-120.

[2] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Metric properties of manifolds bimeromorphic to compact Kähler spaces*, J. Differential Geom. **37** (1993), 95-121.

[3] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Plurisubharmonic currents and their extension across analytic subsets*, Forum Math. **5** (1993), 577-602.

[4] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Compact complex threefolds which are Kähler outside a smooth rational curve*, Math. Nachr. **207** (1999), 21-59.

[5] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Transforms of currents by modifications and 1-convex manifolds*, Osaka J. Math. **40** (2003), 717-740.

[6] L. Alessandrini – G. Bassanelli: *Wedge product of positive currents and balanced manifolds*, Tohoku Math. J. **60** (2008), 123-134.

[7] H. Alexander: *Holomorphic chains and the support hypothesis conjecture*, J. of the Amer. Math. Soc. **10** (1997), 123-138.

[8] G. Bassanelli: *A cut-off theorem for plurisubharmonic currents*, Forum Math. **6** (1994), 567-595.

[9] G. Bassanelli: *A geometrical application of the product of two positive currents*, Progress in Mathematics **188**, Birkhäuser, Basel (2000), 83-90.

[10] E. Bedford – B.A. Taylor: *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. **149** (1982), 1-41.

[11] H. Ben Messaoud – H. El Mir: *Tranchage et prolongement des courants positifs fermés*, Math. Ann. **307** (1997), 473-487.

[12] H. Ben Messaoud – H. El Mir: *Opérateur de Monge Ampére et tranchage des courants positifs fermés*, J. Geom. Anal. **10** (2000), 139-168.

[13] M. Blel – S.K. Mimouni: *Singularités et intégrabilité des fonctions plurisousharmoniques*, Ann. Inst. Fourier **55** (2005), 319-351.

[14] Z. Blocki: *The domain of definition of the complex Monge-Ampère operator*, Amer. J. of Math. **128** (2006), 519-530.

[15] F. Bracci – S. Trapani: *Notes on pluripotential theory*, Rend. di Matematica, Serie VII **27** (2007), 197-264.

[16] U. Cegrell: *The general definition of the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Inst. Fourier **54** (2004), 159-179.

[17] D. Coman – V. Guedj – A. Zeriahi: *Domains of definition of Monge-Ampère operators on compact Kähler manifolds*, Math. Z. **259** (2008), 393-418.

[18] K. Dabbek – F. Elkhadhra: *Prolongement des courants PSH*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **332** (2001), 615-620.

[19] K. Dabbek – F. Elkhadhra,: *Prolongement d'un courant positif à travers une sous-variété non Levi-plate*, C. R. Acad. Sci. Paris **340** (2005), 263-268.

[20] K. Dabbek – F. Elkhadhra – H. El Mir: *Extension of plurisubharmonic currents*, Math. Z. **245** (2003), 455-481.

[21] J. P. Demailly: *Regularization of closed positive currents and intersection theory*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), 361-409.

[22] J. P. Demailly: *Complex Analytic and Differential Geometry*, free accessible book *http://www.fourier.ujf_grenoble.fr/demailly/books.html*.

[23] J. P. Demailly: *On the geometry of positive cones of projective and Kähler varieties*, The Fano Conference, Univ. di Torino (2004), 395-422.

[24] J. P. Demailly: *Kähler manifolds and trascendental techniques in algebraic geometry*, Proc. of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006, European Mathematical Society (2007), 153-186.

[25] J. P. Demailly – N. Pali: *Degenerate complex Monge-Ampère equations over compact Kähler manifolds*, arXiv:0710.5109v3.

[26] J. P. Demailly – M. Paun: *Numerical characterization of the Kähler cone of a compact Kähler manifold*, Ann. Math. **159** (2004), 1247-1264.

[27] T.C. Dinh – M. Lawrence: *Polynomial hull and positive currents*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **12** (2003), 317-334.

[28] T.C. Dinh – V.A. Nguyen – N. Sibony: *Dynamics of horizontal-like maps in higher dimension*, Adv. in Math. **219** (2008), 1689-1721.

[29] T.C. Dinh – N. Sibony: *Regularization of currents and entropy*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **37** (2004), 959-971.

[30] T.C. Dinh – N. Sibony: *Un borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationelle*, Ann. of Math. **161** (2005), 1937-1944.

[31] T.C. Dinh – N. Sibony: *Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 291-312.

[32] T.C. Dinh – N. Sibony: *Geometry of currents, intersection theory and dynamics of horizontal-like maps*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), 423-457.

[33] T.C. Dinh – N. Sibony: *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, Comment. Math. Helv. **81** (2006), 221-258.

[34] T.C. Dinh – N. Sibony: *Pull-back currents by holomorphic maps*, Manuscripta Math. **123** (2007), 357-371.

[35] T.C. Dinh – N. Sibony: *Super-potentials of positive closed currents, intersection theory and dynamics*, arXiv:math/0703702v1.

[36] H. El Mir: *Sur le prolongement des courants positifs fermés*, Acta Math. **153** (1984), 1-45.

[37] F. Elkhadhra – S.K. Mimouni: *Courants positifs à support dans une bande*, C. R. Acad. Sci. Paris **341** (2005), 549-554.

[38] P. Eyssidieux – V. Guedj – A. Zeriahi: *Singular Kähler-Einstein metrics*, J. Am. Math. Soc. **22** (2009), 607-639.

[39] C. Favre: *Note on pull-back and Lelong number of currents*, Bull. Soc. Math. France **127** (1999), 445-458.

[40] A. Fino – A. Tomassini: *Blow-ups and resolution of strong Kähler with torsion metrics*, Adv. Math. **221** (2009), 914-935.

[41] J.E. Fornaess: *Dynamics in several Complex Variables*, Regional Conference Series in Mathematics **87** Amer. Math. Soc. ed. (1996).

[42] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Complex dynamics in higher dimension. I.*, Asterisque **222** (1994), 201-231.

[43] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Complex dynamics in higher dimension. II.*, in Modern methods in Complex Analysis (Princeton, N. J., 1992), Ann. Math. Studies **137**, 135-187, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1995).

[44] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Okás inequality for currents and applications*, Math. Ann. **301** (1995), 399-419.

[45] J.E. Fornaess – N. Sibony: *Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics*, Publ. Mat. **45** (2001), 529-547.

[46] P. Griffiths – J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley Interscience Publ. New York (1978).

[47] V. Guedj: *Dynamics of polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$, Amer. J. of Math. **124** (2002), 75-106.

[48] V. Guedj: *Ergodic properties of rational mappings with large topological degree*, Ann. of Math. **161** (2005), 1589-1607.

[49] V. Guedj: *Desingularization of quasiplurisubharmonic functions*, International J. of Math. **16** (2005), 555-560.

[50] V. Guedj – A. Zeriahi: *Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. **15** (2005), 607-639.

[51] R. Harvey – H.B. Lawson: *An intrinsic characterization of Kähler manifolds*, Invent. Math. **74** (1983), 169-198.

[52] J.H. Hubbard – P. Papadopol: *Superattractive Fixed Points in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 321-365.

[53] A. Huckelberry: *Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds*, Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry, H. Skoda – J.M. Trépreau (eds.), Aspects of Math. E 26, Vieweg, Braunschweig (1994), 189-232.

[54] S. Kolodziej: *The Monge-Ampère Equation on Compact Kähler Manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), 667-686.

[55] S. Kolodziej: *The Complex Monge-Ampère Equation and Pluripotential Theory*, Mem. AMS **178** n. 840 (2005).

[56] B. S. Magnusson: *Extremal* $\omega-$*plurisubharmonic functions as envelopes of disc functionals*, arXiv:0906.0902v1.

[57] M. Méo: *Image inverse d'un courant positif fermé par una application analytique surjective*, C. R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), 1141-1144.

[58] M. Paun: *Sur l'effectivité numérique des images inverses de fibrés en droites*, Math. Ann. **310** (1998), 411-421.

[59] M. Paun: *Regularity Properties of the Degenerate Monge-Ampère Equations on Compact Kähler Manifolds*, Chin. Ann. Math. **29b** (2008), 623-630.

[60] D.H. Phong – J. Sturm: *The Dirichlet Problem for Degenerate Complex Monge-Ampère Equations*, arXiv:0904.1898v1.

[61] J.B. Poly – G. Raby: *Prolongement de courants positifs à travers de petit obstacles*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2091-2098.

[62] D. Popovici: *Regularization of currents with mass control and singular Morse inequalities*, J. Differential Geometry **80** (2008), 281-326.

[63] N. Sibony: *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J. **52** (1985), 157-197.

[64] Y. T. Siu: *Analiticity of Sets associated to Lelong Numbers and the Extension of Closed Positive Currents*, Invent. Math. **27** (1974), 53-156.

[65] J. Song – G. Tian: *The Kähler-Ricci flow on surfaces of positive Kodaira dimension*, Invent. Math. **170** (2007), 609-653.

[66] G. Tian: *Canonical metrics in Kähler geometry*, Lect. in Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel (2000).

[67] J. Varouchas: *Stabilité de la classe des variétés kählériennes par certains morphismes propres*, Invent. Math. **77** (1984), 117-127.

[68] Y. Xing: *Weak convergence of currents*, Math. Z. **260** (2008), 253-264.

[69] Y. Xing: *Continuity of the Monge-Ampère operator on compact Kähler manifolds*, Math. Z. **263** (2009), 331-344.

[70] S.T. Yau: *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339-411.

Lavoro pervenuto alla redazione il ????
ed accettato per la pubblicazione il ????.
Bozze licenziate il 6 luglio 2010

Indirizzo dell'Autore:

Lucia Alessandrini – Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Parma – Viale Usberti 53 – I-43124 Parma, Italy
E-mail: lucia.alessandrini@unipr.it