Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 35, Roma (2014), 35 – 46

Formes modulaires modulo p changement de base et théorie d'Iwasawa

LAURENT CLOZEL

Abstract: *This paper gives complements to the author's earlier article [1]. First, a congruence between zêta values occurring there is explained using the theory of the p-adic zêta function. Secondly, the proof of base change given here is extended to split primes.*

1.

Cette note, qui fait suite à [1], est composée de deux parties assez distinctes. La première comporte des compléments à l'article précédent. Tout d'abord nous donnons la démonstration d'une propriété implicite, mais non démontrée, dans [1]. Dans cet article, nous considérions une tour de "variétés de Shimura finies" S_α associées à l'extension F_α de degré p^α dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$ (avec $p \geq 5$). Le groupe de Galois relatif, isomorphe à $\mathbb{Z}/p^{\beta-\alpha}\mathbb{Z}$, opère sur S_β en laissant fixe S_α. Dans le Section 2 de cet article, on a utilisé le fait que S_α est égal à l'ensemble des points fixes. La vérification est donnée ici (Section 2).

Cette propriété était utilisée dans [1], Proposition 2.5 pour démontrer une congruence $\bmod p$ entre $\zeta_{F_\alpha}(-1)$ et $\zeta_{F_{\alpha-1}}(-1)$. John Coates nous a expliqué comment cette congruence se déduisait facilement (d'ailleurs, dans un cadre plus général) de la théorie d'Iwasawa des fonctions L p-adiques. Elle est aussi liée aux propriétés de descente galoisienne des K_2 des anneaux d'entiers de ces corps. Nous rappelons, d'après Coates, ce résultat. Notre calcul n'en donne pas a priori une autre démonstration, mais la Proposition 2.5 de [1] est évidemment similaire au résultat de descente.

La seconde partie (Section 3) est consacrée à l'un des résultats de l'article antérieur, *i.e.*, le fait que notre construction exhibe directement, et ceci sans utiliser de formule des traces tordue, le changement de base de Saito-Shintani-Langlands.

Key Words and Phrases: *Cyclotomic extension – Modular forms – Base change*
A.M.S. Classification: 11F11, 11F99.

(Bien sûr, ceci ne s'applique que dans notre cadre, c'est-à-dire pour des p-extensions et des formes modulaires classiques, considérées $\bmod p$.) Nous étendons notre résultat aux places $\ell \neq p$ qui ne sont pas inertes. Il est agréable, bien que ce ne soit pas surprenant, que les calculs aux places inertes et décomposées soient tous deux compatibles au formalisme de Langlands. Nous simplifions aussi l'argument, évitant l'usage maladroit de la dualité dans [1] : voir le Lemme 3.6. Noter qu'une partie de ces résultats (ainsi que de ceux de l'article précédent) résultent désormais du travail de Treumann et Venkatesh [8].

2.

2.1 – Dans ce paragraphe et le suivant, les hypothèses et les notations sont celle de [1]. En particulier, F_α est l'extension de degré p^α dans la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$. L'algèbre des quaternions B sur $\mathbb{Q}$ ramifiée à l'infini et en p définit, pour tout α, un quotient fini

$$S_\alpha = G(F_\alpha)\backslash G(\mathbb{A}_{F_\alpha})/G(F_{\alpha,\infty})K_\alpha$$

où G est le groupe projectif de B, K_α est un produit $\prod K_v$ de sous-groupes compacts de $G(F_{\alpha,v})$ et, en la place $v = \mathfrak{p}_\alpha$ divisant p, K_v est l'image dans $G(F_{\alpha,v})$ de $1 + \mathfrak{P}_\alpha \subset (B \otimes F_{\alpha,v})^\times$ où $\mathfrak{P}_\alpha \subset \mathcal{O}(B \otimes F_{\alpha,v})$ est l'idéal maximal.

On vérifie dans [1] que l'application naturelle $S_\alpha \to S_\beta$ ($\beta \geq \alpha$) est injective. Le groupe de Galois relatif $\mathbb{Z}/p^{\beta-\alpha}\mathbb{Z}$ opère sur S_β en laissant fixe S_α.

Théorème 2.1. *Pour tout α, S_α s'identifie aux points fixes de $\Gamma \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $S_{\alpha+1}$.*

La démonstration est naturelle, à l'aide des arguments introduits pour la première fois par Rohlfs [6]. Soit σ un générateur de Γ.

Ecrivons, pour simplifier les notations, $\beta = \alpha + 1$, et soit $x \in S_\beta$ un point fixe. Si $g \in G(\mathbb{A}^f_{F_\beta})$ représente x, on a donc

$$g^\sigma = \gamma\ g\ k \qquad (\gamma \in G(F_\beta),\ k \in K_\beta) \tag{2.1}$$

d'où

$$g = g^{\sigma^p} = \gamma^{\sigma^{p-1}}\gamma^{\sigma^{p-2}} \cdots \gamma\ g\ k', \qquad k' \in K_\beta$$

puisque K_β est fixe par Γ. Or $G(F_\beta)$ opère librement ([1, Lemme 2.2.1]) donc $\gamma^{\sigma^{p-1}}\gamma^{\sigma^{p-2}} \cdots \gamma = 1$. Ainsi γ définit un 1-cocycle pour l'action de Γ sur $G(F_\beta)$.

Lemme 2.1. $H^1(\Gamma, G(F_\beta)) = \{1\}$.

Considérons G comme un groupe sur F_α, soit $\Gamma_\alpha = \mathrm{Gal}(\bar{F}_\alpha/F_\alpha)$ et $\Gamma_\beta = \mathrm{Gal}(\bar{F}_\alpha/F_\beta)$. On a la suite exacte

$$1 \to H^1(\Gamma, G(F_\beta)) \to H^1(\Gamma_\alpha, G(\bar{F}_\alpha)) \underset{\mathrm{Res}}{\to} H^0(\Gamma, H^1(\Gamma_\beta, G(\bar{F}_\alpha)) \to \cdots \tag{2.2}$$

Le noyau de la restriction s'identifie aux classes d'isomorphisme d'algèbres de quaternions sur F_α splittant sur F_β. Le degré étant impair, l'application est injective, d'où le résultat.

On en déduit que $\gamma = \delta^{-\sigma}\delta$ pour un $\delta \in G(F_\beta)$; remplaçant g par δg dans (2.1) il vient :

$$g^\sigma = g\ k \tag{2.3}$$

d'où derechef $g = gkk^\sigma \cdots k^{\sigma^{p-1}}$, soit $kk^\sigma \cdots k^{\sigma^{p-1}} = 1$.

Lemme 2.2. $H^1(\Gamma, K_\beta) = \{1\}$.

Ceci se vérifie place par place. Si v est une place de F_α ne divisant pas p, le cas où v est décomposée est un calcul facile et celui où v est inerte se réduit par dévissage, Γ étant d'ordre p, à l'assertion analogue pour G sur le corps fini (théorème de Lang). On est ramené au cas où $v = \mathfrak{p}_\alpha$.

Ecrivons pour simplifier F_α, F_β pour les complétions en $\mathfrak{p}_\alpha$, $\mathfrak{p}_\beta$. Soit $\tilde{G}$ le groupe $B^\times$ (vu comme groupe sur F_α). Il contient le groupe anisotrope S, noyau de la norme réduite. Par un nouvel abus de notation écrivons S pour $S(F_\alpha)$ et $\tilde{G}$ pour le groupe $B(\mathcal{O}_\alpha)^\times$, où $B(\mathcal{O}_\alpha)$ désigne l'ordre maximal. On a $S \subset \tilde{G}$. Soit $\tilde{G}(1) = 1 + \mathfrak{P}_\alpha$ le sous-groupe compact définissant K_α, *cf.* [1]. L'image de $\tilde{G}$ par la norme réduite est $\mathcal{O}_\alpha^\times$ et celle de $\tilde{G}(1)$ est $1 + \mathfrak{p}_\alpha$. Enfin, on sait que $\tilde{G}/\tilde{G}(1) \cong k_2^\times$ où k est le corps résiduel (donc ici $\mathbb{F}_p$) et k_2 son extension quadratique. Simplifiant encore les notations, on voit qu'on a un diagramme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & S \cap \tilde{G}(1) & \longrightarrow & \tilde{G}(1) & \longrightarrow & 1 + y & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & \mathcal{O}^\times & \longrightarrow & 1\,,
\end{array}$$

les flèches verticales étant injectives. Le lemme du serpent donne donc une suite exacte

$$1 \longrightarrow S \cap \tilde{G}(1) \longrightarrow S \longrightarrow U(1)(k) \longrightarrow 1 \tag{2.4}$$

où $U(1)(k) = \ker(k_2^\times \to k^\times)$, l'application étant la norme. Ceci reste vrai pour F_β, et (2.4) montre que $S/S \cap \tilde{G}(1)$ ne dépend pas du degré α ou β.

Considérons la suite (2.4) relative à F_β, et munie de l'action de Γ. Le groupe S, étant simplement connexe, vérifie $H^1(F_\alpha, S) = \{1\}$. La suite exacte longue en cohomologie déduite de (2.4), munie de l'action de Γ, donne d'abord une suite exacte pour le H^0 – c'est (2.4) pour F_α – puis

$$1 \longrightarrow H^1(\Gamma, S \cap \tilde{G}(1)) \longrightarrow H^1(\Gamma, S(F_\beta)) \longrightarrow \cdots\ ;$$

d'où l'on déduit que $H^1(\Gamma, S \cap \tilde{G}(1)) = \{1\}$ d'après la suite exacte (2.2) appliquée à S.

On a donc démontré le Lemme, mais pour $S \cap \tilde{G}(1)$ plutôt que pour $K_\beta = \pi(\tilde{G}(1))$, $\pi : \tilde{G} \to G$ étant l'application naturelle.

La norme réduite, envoyant $\ker \pi = 1 + \mathfrak{p}_\beta$ vers $Nrd(\tilde{G}(1)) = 1 + \mathfrak{p}_\beta$, étant surjective, on en déduit que $S \cap \tilde{G}(1)$ s'envoie surjectivement sur K_β. Ainsi

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow S \cap \tilde{G}(1) \longrightarrow K_\beta \longrightarrow 1$$

d'où

$$H^1(\Gamma, S \cap \tilde{G}(1)) \longrightarrow H^1(\Gamma, K_\beta) \longrightarrow H^2(\Gamma, \{\pm 1\})$$

ce qui implique que $H^1(\Gamma, K_\beta) = \{1\}$ puisque p est impair.

Ecrivant donc $k = k_1 k_1^{-\sigma}$ dans (2.3), on voit enfin que x est représenté par $g \in G(\mathbb{A}^f_{F_\beta})$ invariant par σ, donc dans $G(\mathbb{A}^f_{F_\alpha})$. Ceci démontre le Théorème 2.1.

2.2 – Dans ce paragraphe, nous revenons d'abord sur le résultat suivant, déduit dans [1] d'un calcul de mesures de Tamagawa. Rappelons que $p \geq 5$.

Proposition 2.3 (= Proposition 2.5 de [1]). *Pour tout $\alpha \geq 0$,*

$$\zeta_{F_\alpha}(-1) \equiv \zeta_{F_{\alpha+1}}(-1) (\operatorname{mod} p)\,.$$

Rappelons que ces deux valeurs de fonctions zêta sont dans $\frac{1}{12}\mathbb{Z}$, ce qui donne un sens à la congruence.

Coates nous a fait remarquer que ceci est conséquence directe de la construction par Iwasawa des fonctions L p-adiques. Voici son argument. Soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, et $\omega : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{Q}(\zeta_p) \subset \mathbb{C}_p$ le caractère cyclotomique. Il existe alors une fonction $g \in \Lambda$ (notée $g(T, \omega^{-1})$ dans [4]) telle que

$$g((1+p)^{-1} - 1) = (1-p)\zeta(-1) = \frac{1}{12}(p-1)\,.$$

De plus, pour tout caractère de Dirichlet $\chi \neq 1$, de conducteur p^α et d'ordre p-primaire (donc associé à F_α) :

$$g(\zeta(1+p)^{-1} - 1) = L(-1, \chi)\,,$$

ζ étant la valeur de χ sur le générateur topologique $(1+p)$ de $1 + p\mathbb{Z}_p$.

Posons, suivant Coates [2] et Iwasawa,

$$T = (1+p)^{-1}(1+X) - 1 = \frac{-p}{1+p} + \frac{X}{1+p}\,.$$

Alors $g(T) = f(X)$ où $f \in \Lambda$ vérifie maintenant

$$f(\zeta - 1) = L(-1, \chi)$$

ainsi que la formule analogue pour $\chi = 1$. Il en résulte que

$$\prod_{\zeta} f(\zeta - 1) = (1-p)\zeta_{F_\alpha}(-1)\,.$$

(Noter que le produit de gauche, qui porte sur toutes les racines ζ d'ordre p^α, est évidemment convergent puisque $|\zeta - 1|_p < 1$.

Puisque $p \geq 5$, $a_0 = f(0) = g((1+p)^{-1} - 1) = \frac{1}{12}(p-1)$ est une unité. On voit alors que

$$(1-p)\{\zeta_{F_{\alpha+1}}(-1) - \zeta_{F_\alpha}(-1)\} = (1-p)\zeta_{F_\alpha}(-1)H_{\alpha+1}$$

où $H_{\alpha+1} = (\prod_\zeta f(\zeta-1)) - 1$, le produit portant sur les racines primitives d'ordre $\alpha+1$. Or $f(\zeta - 1) \equiv a_0 \bmod (\zeta - 1)$, donc $H_{\alpha+1} \equiv a_0^{\varphi(p^{\alpha+1})} - 1 = a_0^{(p-1)p^\alpha} - 1$. Puisque $a_0 \in \mathbb{Z}_p^\times$ est une unité, il en résulte que $H_{\alpha+1} \equiv 0$ $[p]$, d'où la Proposition.

En fait, la Proposition résulte aussi de la conjecture de Birch-Tate, démontrée dans le cas qui nous intéresse, et des propriétés de descente pour l'action galoisienne sur les K_2 des anneaux d'entiers. En effet, on a tout d'abord, pour F abélien totalement réel :

$$w_2(F)|\zeta_F(-1)| = |K_2(\mathcal{O}_F)|$$

(*cf.* [5], [7] ; dans le cas qui nous intéresse $w_2 = 12$): cette conjecture a été démontrée par Coates, Mazur et Wiles. Par ailleurs le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_{\alpha+1}/F_\alpha) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ opère naturellement sur $K_2(\mathcal{O}_{F_{\alpha+1}})$. L'existence de l'application naturelle $i : K_2(\mathcal{O}_{F_\alpha}) \to K_2(\mathcal{O}_{F_{\alpha+1}})$ et d'une trace $Tr : K_2(\mathcal{O}_{F_{\alpha+1}}) \to K_2(\mathcal{O}_{F_\alpha})$ vérifiant $Tr \circ i = [p]$, $i \circ Tr$ étant la somme des conjugués par le groupe de Galois, implique que les invariants de Γ dans $K_2(\mathcal{O}_{F_{\alpha+1}}) \otimes \mathbb{Z}_q$ sont égaux à $K_2(\mathcal{O}_{F_\alpha}) \otimes \mathbb{Z}_q$ pour tout $q \neq p$. Dans le cas où $q = p$, ceci résulte du théorème de Coates [2]; *cf.* [3] , Theorem 13. Il en résulte enfin que $K_2(\mathcal{O}_{F_\alpha})$ s'identifie aux invariants du groupe de Galois, d'où la congruence mod p entre les ordres des deux groupes.

3.

3.1 – Nous considérons maintenant les formes modulaires sur $S_\infty = \varinjlim S_\alpha$. Dans tout cet article nous considérons des fonctions à valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}_p$. On note $\mathcal{S}_\alpha$ l'espace des fonctions sur S_α, $\mathcal{S}_\infty = \varinjlim \mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}^\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\alpha$ pour les injections et restrictions naturelles. Nous allons étendre les constructions de [1] aux premiers $\ell \neq p$ qui ne sont pas inertes dans F_∞. Nous ne répéterons pas les arguments qui résultent de cet article.

Nous considérons d'abord la définition d'opérateurs de Hecke relatifs aux $\ell \neq p$ qui ne sont pas inertes dans F_∞.

Rappelons qu'on associe à $\ell \neq p$ sa composante additive (notée ℓ_1 dans [1]) $< \ell > \in 1 + p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$. Soit $p^\delta\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p$ le sous-groupe engendré par $< \ell >$; $\delta \geq 0$ sera appelé le degré, ou degré d'inertie, de ℓ. Alors ℓ est totalement décomposé dans F_δ, et chacune des p^δ places $\lambda \mid \ell$ de F_δ reste inerte dans F_∞. En particulier il y a p^δ places (aussi notées λ) de F_∞ divisant ℓ. Dans l'article précédent, on a considéré le cas où $\delta = 0$, de sorte que ℓ est inerte dans F_∞. Soit $\Lambda_\delta(\ell)$ l'ensemble des places $\lambda \mid \ell$ de F_δ.

On dispose d'opérateurs T_λ $(\lambda \in \Lambda_\delta(\ell))$ de $\mathcal{S}_\delta$ vers $\mathcal{S}_\delta$, définis par la formule usuelle :

$$T_\lambda f(g) = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_\ell} f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}_\lambda\right) + f\left(g\begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_\lambda\right) \tag{3.1}$$

où $g \in Y_\delta$ et l'élément $\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}_\lambda$ est une matrice définie par un représentant $\tilde{\xi}$ de ξ dans $\mathcal{O}_\lambda \cong \mathbb{Z}_\ell$, et placée dans $G(\mathbb{A}_\delta^f)$ en la place λ ; de même pour $\begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_\lambda$. Les opérateurs T_λ $(\lambda \in \Lambda_\delta(\ell))$ commutent.

Considérons le cas d'un degré $\alpha > \delta$. Alors les places $\lambda \in \Lambda_\delta(\ell)$ s'identifient à des places de F_α. Notons λ_α l'unique place de F_α divisant λ. Alors T_{λ_α} est défini par

$$T_{\lambda_\alpha} f(g) = \sum_{\xi \in \mathbb{F}_\alpha} f\left(g\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}_{\lambda_\alpha}\right) + f\left(g\begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_{\lambda_\alpha}\right) \tag{3.2}$$

où $f \in \mathcal{S}_\alpha$, $g \in Y_\alpha$ et $\mathbb{F}_\alpha$ est le corps résiduel $\mathbb{F}_{\ell^{p^{\alpha-\delta}}}$. La démonstration donnée dans [1], Proposition 3.1, s'applique mot pour mot pour montrer

Lemme 3.4.

(i) *On a* $r_\alpha^\beta T_{\lambda_\beta} j_\alpha^\beta = T_{\lambda_\alpha}$ *pour tout* $\beta \geq \alpha \geq \delta$.

(ii) *Sur* $\mathcal{S}_\infty = \varinjlim_\alpha \mathcal{S}_\alpha$, *on peut définir* T_λ *par la somme (convergente pour* $\mathcal{F}$, *au sens de* [1])

$$\sum_{\xi \in \mathbb{F}_\infty} f\left(g\left(\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}_{\lambda_\infty}\right)\right) + f\left(g\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_{\lambda_\infty}\right)\right) \tag{3.3}$$

où $\mathbb{F}_\infty = \bigcup \mathbb{F}_\alpha$.

Dans l'expression (3.3), on suppose que $g \in \mathcal{S}_\alpha$ pour un $\alpha \geq \delta$. Si $\xi \in \mathbb{F}_\beta$ $(\beta \geq \delta)$, l'élément $\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}_{\lambda_\infty}$ est placé en la place λ_β de $\mathbb{F}_\beta$. Nous n'utiliserons d'ailleurs pas cette expression.

L'opérateur T_λ est donc bien défini sur la limite inductive $\mathcal{S}_\infty$, et concide avec l'opérateur classique (après restriction) sur $\mathcal{S}_\alpha$ **si** $\alpha \geq \delta$. Pour $\alpha < \delta$, T_λ ne préserve pas $\mathcal{S}_\alpha$.

Rappelons que $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q})$ opère sur $\mathcal{S}_\infty$, $\mathcal{S}_\alpha$ étant fixé par $\Gamma_\alpha = p^\alpha \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p = \Gamma$. Le groupe Γ opère naturellement sur $\Lambda_\delta(\ell)$. On a par transport de structure :

Lemme 3.5. *Pour tout $\sigma \in \Gamma$, $T_{\sigma\lambda} = \sigma T_\lambda \sigma^{-1}$. En particulier σ commute aux T_λ si $\sigma \in \Gamma_\delta$.*

Si $\mathcal{S}_\infty^\delta = H^0(\Gamma_\delta, \mathcal{S}_\infty)$ on a donc :

$$T_\lambda : \mathcal{S}_\infty^\delta \longrightarrow \mathcal{S}_\infty^\delta \,. \tag{3.4}$$

Considérons maintenant le cas des degrés $\alpha < \delta$, de sorte qu'une place μ de F_α divisant ℓ se décompose dans l'extension $F_{\alpha+1}$. Soit $\nu_1, \dots \nu_p$ les places de $F_{\alpha+1}$ divisant μ. Notons

$$\mathbb{T}_{\mu,\alpha+1} = T_{\nu_1} \cdots T_{\nu_p} :$$

c'est un endomorphisme de $F_{\alpha+1}$.

Proposition 3.6. $r_\alpha^{\alpha+1} \mathbb{T}_{\mu,\alpha+1} j_\alpha^{\alpha+1} = T_{\mu,\alpha}$.

Soit en effet $f \in \mathcal{S}_\alpha$, que l'on identifie à son image dans $\mathcal{S}_{\alpha+1}$. Soit $x \in S_\alpha$, image de $g \in Y_\alpha$. Alors $\mathbb{T}_{\mu,\alpha+1} f(x)$ est la somme des termes suivants :

$$f\left(g \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_{\nu_1} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_{\nu_p}\right) = f\left(g \begin{pmatrix} 1 & \\ & \ell \end{pmatrix}_{\mu}\right) \tag{3.5}$$

(considérer le plongement diagonal $(F_\alpha)_\mu \subset (F_{\alpha+1})_\mu = (F_{\alpha+1})_{\nu_1} \times \cdots \times (F_{\alpha+1})_{\nu_p}$.)

$$\sum_{\xi_1,\dots\xi_p} f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi_1 \\ & 1 \end{pmatrix}_{\nu_1} \cdots \begin{pmatrix} \ell & \xi_p \\ & 1 \end{pmatrix}_{\nu_p}\right) \tag{3.6}$$

où $\xi_i \in \mathbb{F}_\ell$. Soit σ un générateur de $\Sigma = \mathrm{Gal}(F_{\alpha+1}/F_\alpha) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: σ permute les places $(\nu_1, \dots \nu_p)$ que l'on suppose indexées de sorte que la permutation soit cyclique. La fonction $f \in \mathcal{S}_\alpha$ est invariante, ainsi que g. On a donc

$$f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi_1 \\ & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \ell & \xi_p \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi_2 \\ & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \ell & \xi_p \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & \xi_1 \\ & 1 \end{pmatrix}\right) .$$

pour tout $\xi = (\xi_1, \dots \xi_p)$. L'élément ξ est invariant par permutation cyclique si, et seulement si, $\xi_1 = \cdots = \xi_p$. Dans le cas contraire, son orbite est d'ordre p. Le terme (3.5) se réduit donc à

$$\sum_\xi f\left(g \begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}\right)$$

où $\begin{pmatrix} \ell & \xi \\ & 1 \end{pmatrix}$ opère diagonalement, donc au terme correspondant de $T_{\mu,\alpha}$.

Enfin, les termes mixtes de la forme

$$\sum_{\substack{i\in I\\ \xi_i\in\mathbb{F}_p}} f\left(g\prod_{i\in I}\begin{pmatrix}\ell & \xi_i\\ & 1\end{pmatrix}_{\nu_i}\prod_{i\notin I}\left(\begin{pmatrix}1 & \\ & \ell\end{pmatrix}_{\nu_i}\right)\right) \tag{3.7}$$

où $I\subset I_p=\{1,\dots p\}$ est un sous-ensemble $\neq I_p$, $\varnothing$. L'action de σ l'envoie sur le terme analogue relatif à σI, qui lui est égal. Mais le stabilisateur de I dans Σ est réduit à l'élément neutre. Ceci termine la démonstration.

Le Lemme 3.4 et la Proposition 3.2 donnent alors, dans tous les cas pour $\alpha\le\beta$:

$$r_\alpha^\beta \mathbb{T}_{\mu,\beta}\; j_\alpha^\beta = T_{\mu,\alpha} \tag{3.8}$$

où $\mathbb{T}_{\mu,\beta}=\prod_{\nu|\mu}T_{\nu,\beta}$.

3.2 – Nous considérons maintenant la famille de tous les opérateurs de Hecke (opérant en tous les degrés) pour toutes les places de F_∞ ne divisant pas p. Les résultats précédents, en particulier (3.8), nous amènent à adopter le cadre suivant. **Fixons** un degré $\alpha\ge 0$. On désignera par λ une place de F_α ne divisant pas p. D'après (3.8), l'opérateur $\mathbb{T}_\lambda$ est défini, de façon intrinsèque, sur $\mathcal{S}_\infty=\varinjlim_\beta\mathcal{S}_\beta$. (Il n'a d'expression naturelle que dans $\mathcal{S}_\beta$ pour $\beta\ge\alpha$: il ne préserve pas les espaces de formes de degré inférieur). Soit $\Gamma_\alpha=\mathrm{Gal}(F_\infty/F_\alpha)$. D'après le Lemme 3.5, Γ_α commute à $\mathbb{T}_\lambda$ pour tout λ.

Rappelons [1] que $\mathcal{S}^\infty=\varprojlim\mathcal{S}_\beta$, la limite étant prise pour les restrictions r_β^r ($\gamma\ge\beta$). C'est l'espace des fonctions de support quelconque sur $\varinjlim S_\beta$. On pose $\mathcal{S}^\alpha=H^0(\Gamma_\alpha,\mathcal{S}^\infty)=\varprojlim H^0(\Gamma_\alpha,\mathcal{S}_\beta)$. On a alors $\mathbb{T}_\lambda : H^0(\Gamma_\alpha,\mathcal{S}_\infty)\to\mathcal{S}^\alpha$ pour toute place λ.

Proposition 3.7.

(i) *Pour tout λ, $\mathbb{T}_\lambda$ s'étend continûment en un endomorphisme de $\mathcal{S}^\alpha$.*
(ii) *Les $\mathbb{T}_\lambda:\mathcal{S}^\alpha\to\mathcal{S}^\alpha$ commutent.*

Soit ℓ le nombre premier divisé par λ et $\delta(\ell)=\delta$ le degré d'inertie de ℓ. On a $\mathcal{S}_\infty$: $\varinjlim_\beta\mathcal{S}_\beta$ où β parcourt les indices $\ge M=\mathrm{Max}(\alpha,\delta)$. De même $\mathcal{S}^\infty=\varprojlim_\beta\mathcal{S}_\beta(\beta\ge M)$. Sur tout espace $\mathcal{S}_\beta(\beta\ge M)$, $\mathbb{T}_\lambda=\prod_\mu T_\mu$ où μ parcourt l'ensemble (indépendant de β) des places de F_β divisant λ. L'opérateur T_μ commute à $\Gamma_M\subset\Gamma_\alpha$. Il suffit évidemment de vérifier que $T_\mu : H^0(\Gamma_M,\mathcal{S}_\infty)\to\mathcal{S}^M$ est continu (T_μ n'étant défini sur $\mathcal{S}_\beta$ que pour $\beta\ge M$). La place μ étant inerte dans F_β, la partie (i) résulte de la démonstration de la [1, Proposition 4.3].

Soit λ, λ' deux places de F_α et posons maintenant $M = \mathrm{Max}(\alpha, \delta(\lambda), \delta(\lambda'))$. On a alors des décompositions $\mathbb{T}_\lambda = \prod T_\mu$, $\mathbb{T}_{\lambda'} = \prod T_{\mu'}$ valables pour $\beta \geq M$. Les opérateurs T_μ et $T_{\mu'}$ commutent, d'où la partie (ii).

Comme dans [1], on munit $\mathcal{S}_\infty$ ou $\mathcal{S}^\alpha$ du produit scalaire

$$< f, g >= \sum_{x \in S_\infty} f(x) g(x) \,,$$

égal en fait à $< f, g >_\alpha = \sum_{x \in S_\alpha} f(x) g(x)$ et l'on a, d'après les mmes arguments :

Proposition 3.8. *Les $\mathbb{T}_\lambda$ sont autoadjoints pour $<,>$.*

3.3 – Comme dans [1], nous sommes donc amenés, pour obtenir une théorie naturelle, à considérer des formes de degré arbitraire mais invariantes par Γ_α. Indiquons, faute de référence, pourquoi ceci est naturel du point de vue de la correspondance avec les représentations de groupes de Galois. Soit $\bar{\mathbb{Q}}$ une clture algébrique de $\mathbb{Q}$, contenant F_∞, et soit $G_\infty = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F_\infty)$.

Soit $r : G_\infty \to GL(2, \bar{\mathbb{F}}_p)$ une représentation continue, donc d'image contenue dans $GL(2, \mathbb{F}_{p^s})$ pour un $s \geq 1$. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow G_\infty \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \underset{\pi}{\longrightarrow} \Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbb{Q}) \longrightarrow 1\,; \tag{3.9}$$

puisque Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}_p$, elle est scindée et $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est donc un produit semi-direct. Soit $G_1 \subset G_\infty$ le noyau, d'indice fini, de r. Il existe un sous-groupe ouvert de Γ laissant G_1 invariant; de même il existe un sous-groupe ouvert Γ_1 tel que $r(\gamma g \gamma^{-1}) = r(g)$ pour $g \in G_\infty$ et $\gamma \in \Gamma_1$. Soit F_α le groupe associé à Γ_1, de sorte qu'on a une suite exacte scindée (3.8) relative à F_α. Alors la représentation r de G_∞ s'étend à $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F_\alpha)$, $\gamma \in \Gamma_1$ (identifié à son image par une section de π) opérant trivialement. Toute représentation modulaire de G_∞ provient donc, pour une valeur convenable de α, d'une représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F_\alpha)$. Puisque les formes de $\mathcal{S}^\alpha$ reçoivent naturellement l'action d'opérateurs de Hecke associés aux places de F_α, on peut supposer que les formes propres sont associées à des représentations galoisiennes. (Notons que, pas plus que dans [1], nous n'avons démontré l'existence de formes propres dans l'espace linéairement compact $\mathcal{S}^\alpha$.)

3.4 – Ayant traité le cas des places décomposées, nous pouvons maintenant étendre à toutes les places la démonstration donnée dans [1] du changement de base modulo p. Pour ceci considérons simplement une extension de degré premier $F_{\alpha+1}/F_\alpha$.

Nous commençons par amplifier l'assertion du Lemme 3.4 (i). Soit λ une place de F_α, inerte dans $F_{\alpha+1}$.

LEMME 3.9. *Si $f \in \mathcal{S}^{\alpha}_{\alpha+1}$ (invariants par Γ_α),*

$$r^{\alpha+1}_{\alpha} T^{\lambda}_{\alpha+1} f = T^{\lambda}_{\alpha} r^{\alpha+1}_{\alpha} f \tag{3.10}$$

En effet, avec les notations de [1], on a pour $g \in Y_\alpha$, d'image $x \in S_\alpha$

$$T^{\lambda}_{\alpha+1} f(x) = \sum_{\xi} f\left(g\begin{pmatrix}\ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right) + f\left(g\begin{pmatrix}1 & \\ & \ell\end{pmatrix}\right)$$

(les matrices étant placées en $(F_{\alpha+1})_\lambda$), où ξ décrit $\mathbb{F}_{\ell^{p^{\varphi+1}}}$, $p\varphi$ étant l'indice d'inertie de ℓ dans F_α. Quand ξ décrit $\mathbb{F}_{\ell^{p^{\varphi}}}$, on obtient l'expression de T_α. Soit σ le générateur de $\mathrm{Gal}(F_{\alpha+1}/F_\alpha)$. Puisque f est invariante,

$$f\left(g\begin{pmatrix}\ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right) = f\left(\sigma\left(g\begin{pmatrix}\ell & \xi \\ & 1\end{pmatrix}\right)\right) = f\left(g\begin{pmatrix}\ell & \sigma\xi \\ & 1\end{pmatrix}\right).$$

Mais les orbites de $\mathrm{Gal}(F_{\alpha+1}/F_\alpha)$ dans le complémentaire de $\mathbb{F}_{\ell^{p^{\varphi}}}$ sont d'ordre p, d'où le résultat.

Dans le cas décomposé, le même argument, en utilisant maintenant la démonstration de la Proposition 3.6, donne :

$$r^{\alpha+1}_{\alpha} \mathbb{T}^{\lambda}_{\alpha+1} f = T^{\lambda}_{\alpha} r^{\alpha+1}_{\alpha} f\,. \tag{3.11}$$

Supposons alors qu'il existe dans $\mathcal{S}_\alpha$ une forme propre pour les T_λ, associées aux valeurs propres $a_\lambda \in \bar{\mathbb{F}}_p$. (En fait a_λ appartient alors à une extension finie, fixe de $\mathbb{F}_p$ pour tout λ). Il existe alors une forme linéaire $\psi : \mathcal{S}_\alpha \to \bar{\mathbb{F}}_p$ telle que pour $f \in \mathcal{S}_\alpha$:

$$\psi(T^{\lambda} f) = a_\lambda\, \psi(f)\,.$$

D'après (3.9) et (3.10), ψ composée avec la restriction r vérifie

$$\psi \circ r(\mathbb{T}^{\lambda}_{\alpha+1}\phi) = a_\lambda(\psi\circ r)(\phi)$$

pour $\phi \in \mathcal{S}^{\alpha}_{\alpha+1}$. La restriction $\mathcal{S}^{\alpha}_{\alpha+1} \to \mathcal{S}_\alpha$ étant évidemment surjective, on voit que (a_λ) est une famille de valeurs propres pour les $\mathbb{T}^{\lambda}_{\alpha+1}$, dans $\mathcal{S}^{\alpha}_{\alpha+1}$ ou son dual.

Considérons les places décomposées. Les opérateurs $T^{\mu}_{\alpha+1}$ (μ place de $F_{\alpha+1}$) commutent et commutent aux $\mathbb{T}^{\lambda}_{\alpha+1}$. Ils ne commutent pas à σ. Décomposons $\mathcal{S}_{\alpha+1}$ en sous-espaces propres généralisés

$$\mathcal{S}_{\alpha+1}(b_1, \ldots, b_p)$$

pour les opérateurs $T_{\nu_1}, \ldots, T_{\nu_p}$. On a donc pour $\phi \in \mathcal{S}_{\alpha+1}$

$$\phi = \sum_b \phi(b)$$

où $b = (b_1, \ldots, b_p)$. Le groupe Σ opère évidemment sur les valeurs propres b. Si ϕ est invariante par Σ, $\phi(\sigma b) = \sigma\phi(b)$. Si b n'est pas invariant par σ, il en résulte que $\sum \phi(\sigma^i b)(x) = \sum \sigma^i \phi(b)(x) = 0$ si x est Σ-invariant. La restriction $\mathcal{S}^\alpha_{\alpha+1} \to \mathcal{S}_\alpha$, surjective, passe donc au quotient par le facteur direct formé des formes $\phi \in \mathcal{S}^\alpha_{\alpha+1}$ telles que $b = (a', \ldots a')$. Il en résulte qu'il existe (dans $\mathcal{S}^\alpha_{\alpha+1}$) une forme ϕ, forme propre des T^μ, avec $a_\mu = a_\lambda$ (λ inerte) et $\prod_{\mu|\lambda} a_\mu = (a')^p = a_\lambda$ (λ décomposée). On voit donc que

$$\begin{aligned} a_\mu &= a_\lambda \ (\lambda \text{ inerte}) \\ {a_\mu}^p &= a_\lambda \ (\lambda \text{ décomposée})\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Par ailleurs le changement de base de Langlands (*cf.* [1, Section 3]) prédit une famille de valeurs propres (b_μ) avec

$$\begin{aligned} b_\mu &= {a_\lambda}^p (\lambda \text{ inerte}) \\ b_\mu &= a_\lambda (\lambda \text{ décomposée})\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

On voit donc que $\phi' = \mathrm{Frob}_p(\phi) \in \mathcal{S}^\alpha_{\alpha+1}$, Frob_p étant le Frobenius arithmétique opérant sur les coefficients, exhibe le changement de base de Langlands.

REFERENCES

[1] L. Clozel: *Formes modulaires sur la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$*, à paraître dans Pacific J. Math.

[2] J. Coates: *On K_2 and some classical conjectures in algebraic number theory*, Ann. of Math., (2) **95** (1972), 99–116.

[3] J. Coates: *K-theory and Iwasawa's analogue of the Jacobian.* Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973, 502–520.

[4] K. Iwasawa: *Lectures on p-adic L-functions*, Annals of Mathematics Studies, No. 74. Princeton University Press, 1972.

[5] S. Lichtenbaum: *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory.* Algebraic K-theory, II: "Classical" algebraic K-theory and connections with arithmetic (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., Vol. 342, Springer, Berlin, 1973, 489–501.

[6] J. Rohlfs: *Arithmetisch definierte Gruppen mit Galoisoperation.* Invent. Math., **48** (1978), no. 2, 185–205.

[7] C. Soulé: *K-theory and values of zeta functions*, Algebraic K-theory and its applications (Trieste, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999, 255–283.
[8] D. Treumann – A. Venkatesh: *Functoriality, Smith Theory and the Brauer homomorphism*, preprint.

Lavoro pervenuto alla redazione il 20 aprile 2014
ed accettato per la pubblicazione il 29 aprile 2014
Bozze licenziate il 15 giugno 2014

Indirizzo dell'Autore:
Membre de l'Institut Universitaire de France – Université Paris-Sud – UMR 8628 – Mathématique – F-91406 0rsay
Email address: laurent.clozel@math.u-psud.fr