Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 36, Roma (2015), 27 – 76

Géométrie et intégrabilité algébrique

A. LESFARI

Abstract: *In this paper, I present an overview of the active area of interactions between algebraic geometry and algebraic completely integrable systems. These are integrable systems whose trajectories are straight line motions on complex algebraic tori (abelian varieties). We make, via the Kowalewski-Painlevé analysis, a detailed study of the level manifolds of the system. These manifolds are described explicitly as being affine part of complex algebraic tori and the flow can be solved by quadrature, that is to say their solutions can be expressed in terms of abelian integrals. The Adler-van Moerbeke method's which will be used is primarily analytical but heavily inspired by algebraic geometrical methods. We will also discuss several interesting examples of algebraic completely integrable systems.*

1 – Introduction

Cet article est consacré à l'étude des systèmes dynamiques non-linéaires algébriquement complètement intégrables. Nombreux sont les problèmes, aussi bien théorique que pratique, ou apparaissent des équations différentielles dont le second membre n'est pas holomorphe. La Section 1, sera consacrée à une construction explicite des solutions sous forme de séries de Laurent d'équations différentielles non-linéaires dans le domaine complexe. Considérant un système d'équations différentielles non-linéaires, peut-on trouver des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions méromorphes? Nous établirons un théorème d'existence et d'unicité pour la solution du problème de Cauchy relatif à ce système, en faisant appel à la méthode des coefficients indéterminés. La solution sera explicitée sous la forme d'une série de Laurent. Il se posera dès lors le problème de la convergence. Celui-ci sera résolu par la méthode des fonctions majorantes. Les solutions méromorphes dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres jouent un rôle crucial dans l'étude des équations différentielles dites algébriquement intégrables [2, 3, 29]. Cela veut dire

Key Words and Phrases: *Integrable systems – Curves – Abelian varieties – Jacobian varieties – Prym varieties – Embeddings – Kähler manifolds – Rigid body*
A.M.S. Classification: 70H06, 14H70, 14J40, 14Q05, 14H40, 14E25, 32Q15, 70E17.

que l'on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux (dans des coordonnés adéquates) et que de plus les variétés complexes obtenues en égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'un tore complexe algébrique (variété abélienne) de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants soient linéaires sur ces tores complexes. Le tore invariant (vu dans le complexe) n'est pas principalement polarisé, mais est au mieux isogène à une surface principalement polarisée. On montre [2] que si le système est algébriquement complètement intégrable, alors il possède une famille de solutions en séries de Laurent dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres. Ces solutions évoluent selon des mouvements rectilignes en temps complexe sur des variétés abéliennes. Ces variétés ont toute une série de propriétés remarquables. Le théorème de Kodaira combiné avec le théorème de Lefschetz [12, 31] affirment que les fonctions méromorphes sur le tore ayant un pôle d'ordre 1, 2 ou 3 le long d'un diviseur positif, permettent de plonger le tore de façon lisse dans un espace projectif. Une étape importante consiste à trouver ce diviseur positif. Une méthode directe, systématisée par Adler et van Moerbeke [2, 3, 29], se basant sur la connaissance explicite des solutions sous forme de séries de Laurent permet de trouver le diviseur en question (sous-variété de codimension un). A partir de ce diviseur sur une variété abélienne, plusieurs renseignements sur les tores peuvent être obtenus, ce qui finalement permet d'écrire les intégrales abéliennes et donc linéariser les équations différentielles. Indépendamment du fait que la plupart des exemples classiques et nouveaux de systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont algébriquement complètement intégrables, une motivation plus profonde pour leur étude est que ces systèmes apparaissent systématiquement lorsque l'on étudie les déformations isospectrales [28]. En fait, le théorème de Adler-Kostant-Symes [3, 28] appliqué aux algèbres de Kac-Moody fournit de tels systèmes qui sont des déformations isospectrales et qui, par un théorème de van Moerbeke-Mumford [44], sont algébriquement complètement intégrables. Du point de vue de la mécanique, cela veut dire que les symétries cachées de beaucoup de systèmes algébriquement complètement intégrables s'expliquent par la théorie des groupes. Les méthodes utilisées sont avant tout analytiques, mais très inspirées par des méthodes de géométrie complexe contemporaine. On étudie dans la Section 3 de façon détaillée une version complexe du théorème de Liouville, que l'on peut appeler théorème d'Adler-Arnold-Liouville-van Moerbeke. Il s'agit d'un résultat qui donne des conditions suffisantes pour qu'une variété complexe soit compacte, connexe, possède un plongement dans un espace projectif et soit difféomorphe à un tore complexe. D'autres systèmes intégrables (appelés systèmes généralement algébriquement complètement intégrables) apparaissent comme des revêtements de systèmes algébriquement complètement intégrables. Ces systèmes concernent des situations où les exposants de Kowalewski (c'est-à-dire les valeurs propres de l'opérateur linéaire intervenant dans la recherche des solutions sous forme de séries de Laurent) sont des fractions. On verra que le problème est lié à la notion d'équivalence rationnelle entre systèmes complètement intégrables, aux surfaces de "type général" ainsi qu'à la classification des singularités. Ensuite, on expose dans les sections suivantes plusieurs systèmes importants algébriquement complètement intégrables ainsi que quelques systèmes généralement algébriquement complètement intégrables. Plus précisément, on étudie le système différentiel de Hénon-Heiles (Section 4), un système "généralement" algébriquement complètement intégrable (Section 5), la toupie de Goryachev-Chaplygin et le réseau de Toda (Section 6), la toupie de Kowalewski (Section 7), le flot géodésique sur le groupe $SO(n)$ pour des métriques invariantes à gauche (Section 8), la toupie de Lagrange (Section 9), le réseau périodique de Kac-van Moerbeke (Section 10), les systèmes de Toda périodiques généralisés (Section 11), le système de Gross-Neveu (Section 12) et le potentiel de Kolossof (Section 13).

2 – Définitions et propriétés générales

Soit le système d'équations différentielles non-linéaires

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_m), \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, \ldots, x_m), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions de m variables complexes $x_1, \ldots, x_m$ et qui appliquent un domaine de $\mathbb{C}^m$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que $f_1, \ldots, f_m$ sont des fonctions rationnelles en $x_1, \ldots, x_m$ et que le système (1) est quasi-homogène, c'est-à-dire ils existent des entiers positifs $s_1, \ldots, s_m$ telles que

$$f_i(\alpha^{s_1} x_1, \ldots, \alpha^{s_m} x_m) = \alpha^{s_i+1} f_i(x_1, \ldots, x_m), \quad 1 \le i \le m,$$

pour chaque constante non nulle α. Autrement dit, le système (1) est invariant par la transformation $t \longrightarrow \alpha^{-1} t$, $x_1 \longrightarrow \alpha^{s_1} x_1, \ldots, x_m \longrightarrow \alpha^{s_m} x_m$.

Théorème 2.1. *Supposons que*

$$x_i = \frac{1}{t^{s_i}} \sum_{k=0}^{\infty} c_i^{(k)} t^k, \quad 1 \le i \le m, \tag{2.2}$$

où $c^{(0)} \neq 0$, soit la solution formelle en séries de Laurent, obtenue par la méthode des coefficients indéterminés, du système quasi-homogène (1)*. Alors, les coefficients $c_i^{(0)}$ satisfont aux équations non-linéaires*

$$s_i c_i^{(0)} + f_i\left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)}\right) = 0, \tag{2.3}$$

où $1 \leq i \leq m$*, tandis que* $c_i^{(1)}, c_i^{(2)}, \ldots$ *satisfont chacun à un système d'équations linéaires de la forme*

$$(\mathcal{M} - k\mathcal{I})\, c^{(k)} = \textit{polynôme en} \quad c_i^{(0)}, \ldots, c_i^{(k-1)}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad k \geq 1, \tag{2.4}$$

où $c^{(k)} = \left(c_1^{(k)}, \ldots, c_m^{(k)}\right)^\top$ *et* $\mathcal{M} \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)}\right) + \delta_{ij} s_i\right)_{1 \leq i,j \leq m}$*, est la matrice jacobienne de* (3)*. En outre, la série* (2) *est convergente.*

Démonstration. En substituant (2) dans (1), tout en tenant compte de la quasi-homogénéité du système, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (k - s_i)\, c_i^{(k)} t^{k-s_i-1} &= f_i \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_1^{(k)} t^{k-s_1}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} c_m^{(k)} t^{k-s_m} \right), \\
&= f_i \left(t^{-s_1} \left(c_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_1^{(k)} t^k \right), \ldots, t^{-s_m} \left(c_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_m^{(k)} t^k \right) \right), \\
&= t^{-s_i-1} f_i \left(c_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_1^{(k)} t^k, \ldots, c_m^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} c_m^{(k)} t^k \right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on développe le second membre comme suit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (k - s_i) c_i^{(k)} t^k = f_i \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_n^{(0)} \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)} \right) \sum_{k=1}^{\infty} c_j^{(k)} t^k \\
+ \sum_{k=2}^{\infty} t^k \sum_{(\alpha,\tau) \in \Delta_k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha} \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)} \right) \prod_{j=1}^{m} \left(c_j^{(\tau_j)} \right)^{\alpha_j},
\end{aligned}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^m \alpha_j$, $\alpha! = \prod_{j=1}^m \alpha_j!$,

$$\Delta_k = \left\{ (\alpha, \tau) : \tau_j > 0, \forall j, |\alpha| > 2, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_j = k \right\}.$$

En identifiant les termes ayant même puissance au premier et au second membre, on obtient successivement pour $k = 0$ l'expression (3), pour $k = 1$, $(\mathcal{M} - \mathcal{I})\, c^{(1)} = 0$ et pour $k \geq 2$,

$$\left((\mathcal{M} - k\mathcal{I})\, c^{(k)} \right)_i = - \sum_{(\alpha,\tau) \in D_k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha} \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)} \right) \prod_{j=1}^{m} \left(c_j^{(\tau_j)} \right)^{\alpha_j}, \tag{2.5}$$

où $\tau_j > 0$, $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_j = k$, ce qui conduit aux expressions explicites (4). La solution obtenue par la méthode des coefficients indéterminés est formelle du fait que nous l'obtenons en effectuant sur des séries, que nous supposons a priori convergentes, diverses opérations dont la validité reste à justifier. Le théorème se trouvera donc établi dès que nous aurons vérifié que ces séries sont convergentes. On utilise à cette fin la méthode des fonctions majorantes. Notons tout d'abord que des paramètres libres apparaissent soit dans le système (3) de m équations à m inconnues, lorsque celui-ci admet un ensemble continue de solutions, soit par le fait que $\lambda_i \equiv k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq m$, est une valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Dès lors, les coefficients peuvent être vus comme étant des fonctions rationnelles sur une variété affine V, de fibre le lieu $\bigcap_{i=1}^{m} \left\{ s_i c_i^{(0)} + f_i \left(c_1^{(0)}, \ldots, c_m^{(0)} \right) = 0 \right\}$. Soit $m_0 \in V$ et soit K un sous-ensemble compact de V, contenant un voisinage ouvert de m_0. Notons que K peut-être muni de la topologie du plan complexe. Posons $A = 1 + \max \left\{ \left| c_i^{(\tau_i)}(m_0) \right| \right\}$, $1 \leq \tau_i \leq \lambda_m$, $1 \leq i \leq m$, où λ_m désigne la plus grande valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. Soient B et C deux constantes avec $C > A$ telles que dans le compact K on ait

$$\left| \frac{\partial^\alpha f_i}{\partial x^\alpha}(m_0) \right| \leq \alpha! B^{|\alpha|}, \qquad \left| \left(\mathcal{M}(m_0) - k\mathcal{I}_m \right)^{-1} \right| \leq C, \quad k \geq \lambda_m + 1.$$

De (5) on déduit que

$$\left| c_i^{(k)}(m_0) \right| \leq C \sum_{(\alpha,\tau) \in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left| c_j^{(\tau_j)} \right|^{\alpha_j}, \quad k \geq \lambda_m + 1.$$

Considérons maintenant la série $\Phi(t) = At + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k t^k$, où β_k sont des nombres réels définis inductivement par

$$\beta_1 \equiv A, \qquad \beta_k \equiv C \sum_{(\alpha,\tau) \in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \beta_{\tau_j}^{\alpha_j}, \quad k \geq 2.$$

On vérifie par récurrence que $\Phi(t)$ est une majorante pour $\sum_{k=1}^{\infty} c_i^{(k)} t^k$, où $1 \leq i \leq m$. En effet, on a $\left| c_i^{(1)} \right| \leq A$. Supposons que $\left| c_i^{(j)} \right| \leq \beta_j$, $j < k$, $\forall i$. Alors, pour $k \geq \lambda_m + 1$,

$$\left| c_i^{(k)}(m_0) \right| \leq C \sum_{(\alpha,\tau) \in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left| c_j^{(\tau_j)} \right|^{\alpha_j} \leq C \sum_{(\alpha,\tau) \in D} B^{|\alpha|} \prod_{j=1}^{m} \left| \beta_{\tau_j}^{\alpha_j} \right| = \beta_k.$$

D'autre part, il résulte de la définition des nombres β_k que

$$\Phi(t) = At + CB^2 \frac{(m\Phi(t))^2}{1 - Bm\Phi(z)}.$$

La racine

$$\Phi(t) = \frac{1 + mABt - \sqrt{(1 - 2mAB(1 + 2mBC)t + m^2A^2B^2t^2)}}{2mB(1 + mBC)},$$

fournit la majorante cherchée. D'où la possibilité d'un développement en série entière au voisinage de $t = 0$. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 2.1. La série (2) est l'unique solution méromorphe dans le sens où cette solution résulte de ce que les coefficients $c_i^{(k)}$ se trouvent déterminés de façon univoque avec la méthode de calcul adopté.

On considère le système différentiel,

$$\dot{x} = J(x)\frac{\partial H}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad m = 2n + k, \tag{2.6}$$

où $J(x)$ est une matrice antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi, H l'hamiltonien et supposons qu'il soit complètement intégrable. Ce système admet $n + k$ intégrales premières $H_1 = H, H_2, \ldots, H_{n+k}$ fonctionnellement indépendantes dont $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont en involution et $H_{n+1}, \ldots, H_{n+k}$, sont telles que: $J\frac{\partial H_{n+i}}{\partial x} = 0$, $1 \le i \le k$.

Proposition 2.2. *Soit $\Delta \subset \mathbb{C}^m$ un ouvert non vide de Zariski, $x \in \mathbb{C}^m$, $t \in \mathbb{C}$ et considérons l'application moment $\varphi \equiv (H_1, \ldots, H_{n+k}) : \mathbb{C}^m \longrightarrow \mathbb{C}^{n+k}$, où les fonctions $H_1, \ldots, H_{n+k}$ sont supposées polynomiales. Soit*

$$\begin{aligned}\Omega &= \varphi\left(\mathbb{C}^m \setminus \Delta\right), \\ &= \left\{c = (c_i) \in \mathbb{C}^{n+k} : \exists x \in \varphi^{-1}(c) \text{ avec } dH_1(x) \wedge \ldots \wedge dH_{n+k}(x) = 0\right\},\end{aligned}$$

le lieu critique de φ où $c = (c_i)$ est le point courant de $\mathbb{C}^{n+k}$ et désignons par $\overline{\Omega}$ la fermeture de Zariski de Ω dans $\mathbb{C}^{n+k}$. Alors, l'application φ est une submersion générique et l'ensemble défini par $\left\{x \in \mathbb{C}^m : \varphi(x) \in \mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}\right\}$ est partout dense dans $\mathbb{C}^m$ pour la topologie usuelle.

Démonstration. Comme $H_1, \ldots, H_{n+k}$ sont fonctionnellement indépendantes (c-à-d., $dH_1 \wedge \ldots \wedge dH_{n+k} \neq 0$) alors $dH_1(x), \ldots, dH_{n+k}(x)$ sont linéairement indépendants sur Δ, c-à-d., l'application φ est une submersion générique. Pour le reste, il suffit de montrer que l'ensemble

$$\left\{x \in \mathbb{C}^m : \varphi(x) \in \mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}\right\} = \varphi^{-1}\left(\mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}\right),$$

est un ouvert non vide de Zariski dans $\mathbb{C}^m$. Or une application polynômiale entre ensembles algébriques affines étant continue pour la topologie de Zariski (on rappelle que la topologie de Zariski sur un ensemble algébrique est la topologie pour laquelle les fermées sont les sous-ensembles algébriques) alors l'ensemble ci-dessus est effectivement un ouvert de Zariski dans $\mathbb{C}^m$ et il est non vide. Supposons que celui-ci est vide c'est-à-dire que $\varphi(\mathbb{C}^m) \subset \overline{\Omega}$. Les intégrales $H_1, \ldots, H_{n+k}$ étant fonctionnellement indépendantes alors l'application φ est submersive sur un ouvert non vide de Zariski $\Delta \subset \mathbb{C}^m$ et dès lors $\varphi(\Delta)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+k}$. D'après le théorème de Sard pour les variétés, $\mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}$ est un ouvert non vide de Zariski et donc partout dense pour la topologie usuelle dans $\mathbb{C}^{n+k}$. Ainsi $\varphi(\Delta) \cap (\mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}) \neq \emptyset$, ce qui est absurde. Ceci achève la preuve. □

Soit M_c la variété affine complexe définie par

$$M_c \equiv \varphi^{-1}(c) = \bigcap_{i=1}^{n+k} \{x \in \mathbb{C}^m : H_i(x) = c_i\}. \tag{2.7}$$

Pour tout $c \equiv (c_1, \ldots, c_{n+k}) \in \mathbb{C}^{n+k} \backslash \overline{\Omega}$, la fibre M_c est lisse.

Définition 2.3. Le système (6) dont le côté droit est polynomial est algébriquement complètement intégrable s'il est complètement intégrable et si pour $c \in \mathbb{C}^{n+k} \setminus \overline{\Omega}$, la fibre M_c (7) est la partie affine d'une variété abélienne (tore complexe algébrique $T^n \simeq \mathbb{C}^n/réseau$). Autrement dit, si $M_c = T^n \backslash \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est une sous-variété de codimension 1 (une hypersurface algébrique de T^n). Dans les coordonnées naturelles de ces tores, les flots (dépendants du temps $t \in \mathbb{C}$) définis par les champs de vecteurs hamiltoniens (engendrés par $H_,, \ldots, H_n$) sont des mouvements rectilignes et les coordonnées $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_n)$ du problme sont des fonctions méromorphes de $(t_1, \ldots, t_n)$.

Puisque le flot évolue sur le tore complexe $T^n \simeq \mathbb{C}^n/réseau$, les coordonnées x_i restent finies sur la partie affine (c'est-à-dire non compacte) M_c de ce tore et en outre les coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ doivent tendre vers l'infini le long d'un diviseur $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n/réseau$. Par la définition de la complète intégrabilité algébrique, le flot (6) est linéaire (mouvement rectiligne) sur T^n, chacune de ces trajectoires doit cependant heurter la sous-variété $\mathcal{D}$ en au moins un endroit. Réciproquement, à travers tout point de $\mathcal{D}$ il existe un mouvement rectiligne et par conséquent un développement de Laurent autour de ce point d'intersection. Les équations (6) admettent des séries de Laurent lesquelles dépendent des $n-1$ paramètres définissant $\mathcal{D}$ et des $n+k$ constantes c_i définissant T^n, c-à-d., les séries autour des points d'intersection, dépendent de $(n+k)+(n-1) = m-1 = \dim(\text{espace de phase}) - 1$ paramètres libres.

Certains systèmes intégrables apparaissent comme des revêtements de systèmes algébriquement complètement intégrables. Les variétés invariantes M_c satisfont à la condition : $M_c = \mathbf{T}^n \backslash \mathcal{D}$ où $\mathbf{T}^n$ sont des revêtements de variétés abéliennes

T^n ramifiés le long d'un diviseur $\mathcal{D}$ (sur T^n). Ces systèmes concernent des situations où les exposants de Kowalewski (c'est-à-dire valeurs propres de l'opérateur linéaire intervenant dans la recherche des solutions sous forme de séries de Laurent) sont des fractions. On dit que ces systèmes sont "généralement" algébriquement complètement intégrables.

Naïvement, pour compactifier la variété M_c on peut être tenté de prendre le compactifié $\overline{M_c}$ de M_c dans $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. Or $\overline{M_c}$ n'est pas une variété abélienne et elle est singulière à l'infini. Pour l'étude de l'intégrabilité algébrique du systme hamiltonien (6), on montre d'abord l'existence de solutions $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ du système (6) sous la forme de séries de Laurent

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^{k-s_i}, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

dépendant de $m-1$ paramètres libres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. En substituant ces développements dans le système (6), on voit (d'après le théorème précédent) que les coefficients $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots,$ satisfont aux équations

$$s_i x_i^{(0)} + f_i\left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}\right) = 0, \tag{2.8}$$

$$(\mathcal{M} - kI)\, x^{(k)} = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad k = 1 \\ \text{polynôme en } x_i^{(0)}, \ldots, x_i^{(k-1)} \text{ pour } k \geq 2, \end{cases} \tag{2.9}$$

où

$$\mathcal{M} = \frac{\partial f}{\partial x} + \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de (8). Des paramètres libres apparaissent dans le système d'équations non-linéaires (8) lorsque celui-ci admet un ensemble continu de solutions et dans le système d'équations linéaires (9) du fait que $k \in \mathbb{N}^*$ est une valeur propre de la matrice $\mathcal{M}$. L'étape suivante est fondamentale et consiste à considérer l'ensemble :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = {} & \text{fermeture des composantes continues de l'ensemble des séries} \\ & \text{de Laurent de } x(t) \text{ tels que} : H_1(x) = c_1, \ldots, H_{n+k}(x) = c_{n+k}, \\ = {} & \bigcap_{i=1}^{n} \left\{\text{coefficient de } t^0 \text{ dans } H_i(x(t)) = c_i\right\}, \\ = {} & \text{une sous-variété de codimension 1.} \end{aligned}$$

Ensuite on procède comme dans le théorème ci-dessous, à la compactification de la fibre M_c (7) en une variété abélienne $\widetilde{M_c}$.

EXEMPLE 2.4. Comme système algébriquement complètement intégrable simple, on considre le pendule simple. Celui-ci est constitué par un point matériel suspendu à l'extrémité d'un fil (ou une tige théoriquement sans masse) astreint à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical. On désigne par l la longueur du fil (c-à-d., le rayon du cercle), g l'accélération de la pesanteur et x l'angle instantané du fil avec la verticale. L'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0.$$

Posons $\theta = \frac{dx}{dt}$, l'équation ci-dessus s'écrit $\theta d\theta + \frac{g}{l}\sin x dx = 0$. En intégrant, on obtient $\frac{\theta^2}{2} = \frac{g}{l}\cos x + C$, où C est une constante. Lorsque $t = 0$, $x = x_0$ (angle initial), alors $\theta = 0$ (la vitesse est nulle), d'où $C = -\frac{g}{l}\cos x_0$. Par conséquent

$$\frac{l}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{l}{2g}\theta^2 = \cos x - \cos x_0.$$

Sans restreindre la généralité, on pose $g \equiv l \equiv 1$, d'où $\dot{x}^2 = 2\cos x + 2C$, où $C = -\cos x_0 \neq \pm 1$. En posant $z = e^{ix}$, l'équation précédente s'écrit $\dot{z}^2 = -z^3 - 2Cz^2 - 1$, où encore sous la forme $\dot{\zeta}^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$, avec $\zeta = -\frac{z}{4} - \frac{C}{6}$, $g_2 = \frac{C^2}{3}$ et $g_3 = \frac{C^3}{27} + \frac{1}{16}$. La solution s'exprime en termes de fonction $\wp$ de Weierstrass comme suit : $z(t) = -4\wp(t) - \frac{2C}{3}$, ou encore $x(t) = \log\left(-4\wp(t) - \frac{2C}{3} - \frac{\pi i}{2}\right)$.

3 – Version complexe du théorème de Liouville

THÉORÈME 3.1. *Soit* $\overline{M} = \bigcap_i \{Z = (Z_0, Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) : P_i(Z) = 0\}$, *une variété irréductible définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes* P_i *et soit* $M = \overline{M} \cap \{Z_0 \neq 0\}$, *la variété affine irréductible lisse correspondante. Posons* $\overline{M} \equiv M \cup \mathcal{D}$, *ou ce qui revient au même* $\mathcal{D} = \overline{M} \cap \{Z_0 = 0\}$. *Considérons l'application* $f : \overline{M} \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $Z \longmapsto f(Z)$ *et posons* $\widetilde{M} = f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{D}_r$, *où* $\mathcal{D}_i$ *sont des sous-variétés de codimension* 1 *et* $\mathcal{S} \equiv f(\mathcal{D}) = f(\mathcal{D}_1) \cup \ldots \cup f(\mathcal{D}_r) \equiv \mathcal{S}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{S}_r$. *On suppose que :* (i) f *applique de manière holomorphe* M *sur* $\widetilde{M}$. (ii) *la variété* M *est munie de* n *champs de vecteurs holomorphes* $X_1, \dots, X_n$ *commutatifs, indépendants et que un des champs de vecteurs* $X_k (1 \leq k \leq n)$ *se prolonge de façon holomorphe sur un voisinage de* $\mathcal{S}_k$ *dans* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. (iii) *Pour tout* $p \in \mathcal{S}_k$, *la courbe intégrale* $f(t) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ *du champ de vecteurs* X_k *passant par* $f(0) = p \in \mathcal{S}_k$ *est telle que :* $\{f(t) : 0 <| t |< \varepsilon, \;\; t \in \mathbb{C}\} \subset f(M)$. *Cette dernire condition* (iii) *signifie que les orbites de* X_k *passant à travers* $\mathcal{S}_k$ *pénétrent immédiatement dans la partie affine; en particulier le champ de vecteurs* X_k *ne s'annule en aucun point de* $\mathcal{S}_k$. *Alors, la variété* $\widetilde{M}$ *est compacte, connexe et admet un plongement dans l'espace projective* $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. *Elle est difféomorphe à un tore complexe de dimension* n. *En outre, les champs de vecteurs*

$X_1, \ldots, X_n$ se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur $\widetilde{M}$ et cette dernire est une variété abélienne $\widetilde{M}$.

Démonstration. Une étape cruciale consiste à montrer que les orbites passant à travers $\mathcal{S}_k$ forment une variété lisse Σ_p, $p \in \mathcal{S}_k$ telle que : $\Sigma_p \backslash \mathcal{S}_k \subseteq f(M)$. Soit $p \in \mathcal{S}_k$, $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $g^t_{X_k}$ le flot correspondant au champ de vecteurs X_k et $\{g^t_{X_k} : t \in \mathbb{C}, \quad 0 <\mid t \mid < \varepsilon\}$, l'orbite passant à travers le point p. D'après les conditions (i) et (ii) le champ de vecteurs X_k est holomorphe sur un voisinage de $\mathcal{S}_k$ et ne s'annule en aucun point de $\mathcal{S}_k$, donc le flot $g^t_{X_k}$ peut-être redréssé (à l'extérieure) après un changement de coordonnées holomorphes. Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un hyperplan transversal à la direction du flot au point p et soit Σ_p l'élément dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, formé par le diviseur $\mathcal{S}_k$ et les orbites ci-dessus. Posons $\mathcal{S}' = \mathcal{H} \cap \Sigma_p$ et donc localement on a $\Sigma_p = \mathcal{S}' \times \mathbb{C}$. Montrons que Σ_p est lisse. Montrons tout d'abord que $\mathcal{S}'$ est lisse. En effet, supposons que $\mathcal{S}'$ est singulière en 0 ce qui implique que Σ_p est aussi singulière le long de la trajectoire (axe des t) laquelle pénètre immédiatement dans la partie affine $f(M)$, donc celle-ci est singulière ce qui est absurde (d'après la condition (i)). Donc S' est lisse et en vertu du théorème des fonctions implicites la variété Σ_p est lisse. Considérons maintenant l'application $\overline{M} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, $Z \longmapsto f(Z)$, où $Z = (Z_0, Z_1, \ldots, Z_n)$ sont des coordonnées homogènes et désignons par $\widetilde{M}$ la variété $\widetilde{M} = f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$. Dans un voisinage ($\subset \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$) de p, on a $\Sigma_p = \widetilde{M}$ et $\Sigma_p \backslash \mathcal{S}_k \subseteq f(M)$ car sinon, il existe un élément $\Sigma'_p \subset \widetilde{M}$ coupant Σ_p en $p \in \mathcal{S}_k$. Rappelons que le flot existe dans tout voisinage de p dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et il a été redréssé (à l'extérieure) précédemment. Dès lors, puisque Σ'_p est la fermeture d'une variété affine alors Σ'_p doit être transversale à l'hyperplan $\mathcal{H}$ comme précédemment (c-à-d., localement $\Sigma'_p = \mathcal{S}'' \times \mathbb{C}$). Donc d'après la condition (iii), on a $\{g^t_{X_k} : t \in \mathbb{C}, 0 <\mid t \mid < \varepsilon\} = (\Sigma_p \cap \Sigma'_p) \backslash p \subset f(M)$. Autrement dit, $\Sigma_p \cap \Sigma'_p =$ axe des t et $f(M)$ serait singulière le long des axes des t, ce qui est absurde. Montrons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ sont connexes. Comme la variété M et la section générique hyperplane $\mathcal{H}_{\text{gen.}}$ de $\widetilde{M}$ sont irréductibles, alors toutes les sections hyperplanes sont connexes et par conséquent $\mathcal{D}$ est connexe. Montrons que $\mathcal{S}$ est aussi connexe. Soit $G_f \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ le graphe de l'application f, lequel est irréductible ensemble avec $\widetilde{M}$. Il s'ensuit de l'irréductibilité de G_f qu'une section générique hyperplane $G_f \cap (\mathcal{H}_{\text{gen.}} \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est irréductible et par conséquent la section hyperplane spéciale $G_f \cap (\{Z_0 = 0\} \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))$ est aussi connexe. Comme la projection est une application qui conserve la connexité par continuité, on en déduit que

$$Proj_{\mathbb{P}^N(\mathbb{C})}[G_f \cap (\{Z_0 = 0\} \times \mathbb{P}^N(\mathbb{C}))] = f(\mathcal{D}) \equiv \mathcal{S},$$

est connexe. La variété $\widetilde{M} = f(M) \cup \bigcup_{p \in \mathcal{S}_k} \Sigma_p = f(M) \cup \mathcal{S}_k \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est compacte, connexe et possède un plongement dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ via l'application f. Soient g_{t_i} les flots engendrés respectivement par les champs de vecteurs X_i sur M et choisissons un point $p_1 \in \mathcal{S}_k$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et pour tout $t_1 \in \mathbb{C}$ tels que : $0 < |t_1| < \varepsilon$, alors $q \equiv g_{t_1}(p_1)$ est bien défini et appartient à $f(M)$ en vertu de l'hypothèse (iii). Soit $U(q) \subseteq f(M)$ un voisinage de q et posons $g_{t_2}(p_2) = g_{-t_1} \circ g_{t_2} \circ g_{t_1}(p_2)$, $\forall p_2 \in U(p_1) \equiv g_{-t_1}(U(q))$. Notons que cette définition a bien un sens car g_{t_2} est indépendant de t_1 puisque $g_{-(t_1+\varepsilon)} \circ g_{t_2} \circ g_{t_1+\varepsilon}(p_2) = g_{-t_1} \circ g_{t_2} \circ g_{t_1}(p_2)$, en vertu de la commutativité des champs de vecteurs. La fonction $g_{t_2}(p_2)$ est holomorphe en p_2 et t_2. Le même raisonnement reste valable pour les fonctions $g_{t_3}(p_3), \ldots, g_{t_n}(p_n)$ avec $g_{t_n}(p_n) = g_{-t_{n-1}} \circ g_{t_n} \circ g_{t_{n-1}}(p_n)$, $\forall p_n \in U(p_{n-1}) \equiv g_{-t_{n-1}}(U(q))$. Les champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_n$ se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété $\widetilde{M}$. Fixons maintenant $p \in f(M)$ et considérons lapplication $\mathbb{C}^n \longrightarrow \widetilde{M}$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \longmapsto g_t p = g_{t_1} \circ \ldots \circ g_{t_n}(p)$. Comme $\widetilde{M}$ est compact, on montre comme dans le théorème d'Arnold-Liouville [4] que l'ensemble $L = \{t \in \mathbb{C}^n : g_t p = p\}$ est un réseau de $\mathbb{C}^n$ considéré comme espace vectoriel réel, de rang $2n$ et donc engendré par $2n$ vecteurs (dans $\mathbb{C}^n$) $\mathbb{R}$-linéairement indépendants. En faisant le quotient de $\mathbb{C}^n$ par L, on déduit que $\widetilde{M}$ est difféomorphe au tore complexe $\mathbb{C}^n/L$. Nous avons vu que la variété $\widetilde{M}$ est munie de n champs de vecteurs holomorphes, indépendants en chaque point et commutants. Comme $\widetilde{M}$ est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif (d'après ce qui précéde), alors $\widetilde{M}$ est une variété abélienne. Ceci achève la démonstration du théorème. □

4 – Le système différentiel de Hénon-Heiles

Considérons le système différentiel de Hénon-Heiles [16]

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= x_1, & \dot{x}_1 &= -Ay_1 - 2y_1y_2, \\ \dot{y}_2 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -By_2 - y_1^2 - 6y_2^2, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où A et B sont des constantes. On rencontre ce système dans plusieurs problèmes d'applications; notamment en dynamique stellaire, en mécanique statistique ainsi qu'en mécanique quantique. Il fournit un modèle pour le mouvement d'une étoile dans une galaxie cylindrique ainsi que pour les oscillations des atomes dans une molécule. Le système ci-dessus admet les intégrales premières suivantes

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + Ay_1^2 + By_2^2\right) + y_1^2 y_2 + 2y_2^3, \\ H_2 &= y_1^4 + 4y_1^2y_2^2 - 4x_1\left(x_1y_2 - p_2y_1\right) + 4Ay_1^2y_2 + (4A - B)\left(x_1^2 + Ay_1^2\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Les intégrales premières H_1 et H_2 sont en involution, c-à-d., $\{H_1, H_2\}) = 0$. Le système (10) s'écrit sous la forme d'un champ de vecteurs hamiltonien avec $H = H_1$, l'hamiltonien et le second flot commutant avec le premier est évidemment régularisé par les équations

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= 2\,(4A - B)\,x_1 - 8x_1y_2 + 4x_2y_1,\\
\dot{y}_2 &= 4x_1y_1,\\
\dot{x}_1 &= -2A\,(4A - B)\,y_1 - 4x_1x_2 - 8Ay_1y_2 - 8y_1y_2^2 - 4y_1^3,\\
\dot{x}_2 &= 4x_1^2 - 4Ay_1^2 - 8y_1^2y_2.
\end{aligned}$$

Un calcul direct, montre que le système d'équations différentielles (10) admet une famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{cases}
x\,(t) \equiv & (y_1\,(t)\,, y_2\,(t)\,, x_1\,(t)\,, x_2\,(t))\,,\\
y_1 = & \dfrac{y_1^{(0)}}{t} + y_1^{(1)} + y_1^{(2)}t + y_1^{(3)}t^2 + \cdots\,,\\
y_2 = & \dfrac{y_2^{(0)}}{t^2} + \dfrac{y_2^{(1)}}{t} + y_2^{(2)} + y_2^{(3)}t + y_2^{(4)}t^2 + \cdots\,,\\
x_1 = & \dot{y}_1,\\
x_2 = & \dot{y}_2,
\end{cases}$$

dépendant de trois paramètres libres α, β, γ. En substituant ces développements dans le système (10), on voit (comme dans le théorème 1) que les coefficients $x^{(0)}, x^{(1)},\ldots,$ satisfont aux équations

$$x^{(0)} + f(x^{(0)}) = 0, \tag{4.3}$$

et

$$(\mathcal{M} - kI)\,x^{(k)} = \begin{cases} 0 \;\text{ pour } k = 1,\\ \text{polynôme quadratique en } x^{(1)}, \ldots, x^{(k-1)} \text{ pour } k > 1, \end{cases} \tag{4.4}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice jacobienne de (12). Les trois paramètres libres α, β, γ apparaissent respectivement dans l'équation (12), l'équation (13) pour $k = 1$ et $k = 6$. Explicitement, l'équation (12) s'écrit sous la forme

$$y_1^{(0)} + y_1^{(0)}y_2^{(0)} = 0, \qquad y_2^{(0)} + \left(y_2^{(0)}\right)^2 = 0,$$

d'où $y_1^{(0)} = \alpha =$ paramètre libre et $y_2^{(0)} = -1$. Le système (13) s'écrit explicitement sous la forme des équations suivantes avec leurs solutions correspondantes :
a) Pour $k = 1$,

$$y_1^{(0)}y_2^{(1)} + y_1^{(1)}y_2^{(0)} = 0, \qquad y_2^{(1)} + 6y_2^{(0)}y_2^{(1)} = 0,$$

d'où $y_1^{(1)} = y_2^{(1)} = 0$.

b) Pour $k=2$,

$$\begin{aligned}2y_1^{(2)}y_2^{(0)}+2y_1^{(0)}y_2^{(2)}+2y_1^{(1)}y_2^{(1)}+Ay_1^{(0)}&=0,\\ \left(y_1^{(0)}\right)^2+6\left(y_2^{(1)}\right)^2+12y_2^{(0)}y_2^{(2)}+By_2^{(0)}&=0,\end{aligned}$$

d'où $y_1^{(2)}=\frac{\alpha^3}{12}+\frac{\alpha A}{2}-\frac{\alpha B}{12}$ et $y_2^{(2)}=\frac{\alpha^2}{12}-\frac{B}{12}$.
c) Pour $k=3$,

$$\begin{aligned}2y_1^{(1)}y_2^{(2)}+2y_1^{(2)}y_2^{(1)}+2y_1^{(3)}y_2^{(0)}+2y_1^{(0)}y_2^{(3)}+2y_1^{(3)}+Ay_1^{(1)}&=0,\\ 2y_1^{(0)}y_1^{(1)}+12y_2^{(0)}y_2^{(3)}+12y_2^{(1)}y_2^{(2)}+By_2^{(1)}&=0,\end{aligned}$$

d'où $y_1^{(3)}=\beta=$ paramètre libre et $y_2^{(3)}=0$.
d) Pour $k=4$,

$$\begin{aligned}6y_1^{(4)}+2y_1^{(3)}y_2^{(1)}+2y_1^{(4)}y_2^{(0)}+2y_1^{(1)}y_2^{(3)}+2y_1^{(2)}y_2^{(2)}+2y_1^{(0)}y_2^{(4)}+Ay_1^{(2)}&=0,\\ 2y_2^{(4)}+2y_1^{(0)}y_1^{(2)}+\left(y_1^{(1)}\right)^2+6\left(y_2^{(2)}\right)^2+12y_2^{(0)}y_2^{(4)}+12y_2^{(1)}y_2^{(3)}+By_2^{(2)}&=0,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}y_1^{(4)}&=\frac{\alpha AB}{24}-\frac{\alpha^5}{72}+\frac{11\alpha^3B}{720}-\frac{11\alpha^3A}{120}-\frac{\alpha B^2}{720}-\frac{\alpha A^2}{8},\\ y_2^{(4)}&=\frac{\alpha^4}{48}+\frac{\alpha^2A}{10}-\frac{\alpha^2B}{60}-\frac{B^2}{240}.\end{aligned}$$

e) Pour $k=5$,

$$\begin{aligned}&12y_1^{(5)}+2y_1^{(3)}y_2^{(2)}+2y_1^{(4)}y_2^{(1)}+2y_1^{(1)}y_2^{(4)}+2y_1^{(2)}y_2^{(3)}+2y_1^{(0)}y_2^{(5)}\\ &\quad+2y_1^{(5)}y_2^{(0)}+Ay_1^{(3)}=0,\\ &6y_2^{(5)}+2y_1^{(0)}y_1^{(3)}+2y_1^{(1)}y_1^{(2)}+12y_2^{(1)}y_2^{(4)}+12y_2^{(2)}y_2^{(3)}\\ &\quad+12y_2^{(0)}y_2^{(5)}+By_2^{(3)}=0,\end{aligned}$$

d'où $y_1^{(5)}=-\frac{\beta\alpha^2}{12}+\frac{\beta B}{60}-\frac{A\beta}{10}$ et $y_2^{(5)}=\frac{\alpha\beta}{3}$.
f) Pour $k=6$,

$$\begin{aligned}&20y_1^{(6)}+2y_1^{(0)}y_2^{(6)}+2y_1^{(2)}y_2^{(4)}+2y_1^{(3)}y_2^{(3)}+2y_1^{(6)}y_2^{(0)}+2y_1^{(5)}y_2^{(1)}\\ &\quad+2y_1^{(1)}y_2^{(5)}+2y_1^{(4)}y_2^{(2)}+Ay_1^{(4)}=0,\\ &12y_2^{(6)}+2y_1^{(0)}y_1^{(4)}+\left(y_1^{(2)}\right)^2+6\left(y_2^{(3)}\right)^2+2y_1^{(1)}y_1^{(3)}+12y_2^{(0)}y_2^{(6)}\\ &\quad+12y_2^{(1)}y_2^{(5)}+12y_2^{(2)}y_2^{(4)}+By_2^{(4)}=0,\end{aligned}$$

d'où

$$y_1^{(6)} = -\frac{\alpha\gamma}{9} - \frac{\alpha^7}{15552} - \frac{\alpha^5 A}{2160} + \frac{\alpha^5 B}{12960} + \frac{\alpha^3 B^2}{25920} + \frac{\alpha^3 A^2}{1440} - \frac{\alpha^3 AB}{4320}$$
$$+ \frac{\alpha AB^2}{1440} - \frac{\alpha B^3}{19440} - \frac{\alpha A^2 B}{288} + \frac{\alpha A^3}{144},$$
$$y_2^{(6)} = \gamma = \text{paramètre libre.}$$

La convergence de ces séries est assurée par la méthode des majorantes. Considérons maintenant l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \text{coefficient de } t^0 \text{ dans } \{x : H_1(x) = c_i,\ H_2(x) = c_2\}, \\ &= \text{deux relations polynomiales entre les variables } \alpha, \beta \text{ et } \gamma, \\ &= \text{une courbe hyperelliptique de genre 3 d'équation affine :} \\ &\quad a_1\beta^2 + a_2\alpha^8 + a_3\alpha^6 + a_4\alpha^4 + a_5\alpha^2 + a_6 = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

où

$$a_1 = 36,\ a_2 = \frac{7}{432},\ a_3 = \frac{5}{12}a - \frac{13}{216}b,\ a_4 = \frac{671}{15120}b^2 + \frac{17}{7}a^2 - \frac{943}{1260}ab,$$
$$a_5 = \frac{2}{9}ab^2 - \frac{1}{2520}b^3 - \frac{10}{7}c_1 - \frac{13}{6}a^2 b + 4a^3,\ a_6 = -c_2.$$

Notons que l'application

$$\sigma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (-\alpha, \beta), \tag{4.6}$$

est une involution sur $\mathcal{H}$ et que cette dernière est un revêtement double

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad (\alpha, \beta) \longmapsto (\zeta, \beta), \tag{4.7}$$

ramifié en quatre points de la courbe elliptique $\mathcal{E} = \mathcal{H}/\sigma$ d'équation affine :

$$\mathcal{E} : a_1\beta^2 + a_2\zeta^4 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^2 + a_5\zeta + a_6 = 0. \tag{4.8}$$

Par conséquent, on a le

THÉORÈME 4.1. *Les solutions du système* (10) *sous forme de séries de Laurent dépendent de trois paramètres libres. Le premier paramètre libre α apparait dans l'équation* (12) *et les deux autres paramètres β, γ apparaissent lors de la résolution du système* (13) *pour $k = 1$, $k = 6$. Ces séries s'écrivent sous la forme*

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{y_1^{(0)}}{t} + y_1^{(2)}t + y_1^{(3)}t^2 + y_1^{(4)}t^3 + y_1^{(5)}t^4 + y_1^{(6)}t^5 + \cdots, \\ y_2 = \dfrac{y_2^{(0)}}{t^2} + y_2^{(2)} + y_2^{(4)}t^2 + y_2^{(5)}t^3 + y_2^{(6)}t^4 + \cdots, \\ x_1 = -\dfrac{y_1^{(0)}}{t^2} + y_1^{(2)} + 2y_1^{(3)}t + 3y_1^{(4)}t^2 + 4y_1^{(5)}t^3 + 5y_1^{(6)}t^4 + \cdots, \\ x_2 = -2\dfrac{y_2^{(0)}}{t^3} + 2y_2^{(4)}t + 3y_2^{(5)}t^2 + 4y_2^{(6)}t^3 + \cdots, \end{cases} \tag{4.9}$$

où les coefficients sont données explicitement ci-dessus. En outre, le diviseur des pôles des fonctions $x = (y_1, y_2, x_1, x_2)$ est une courbe $\mathcal{H}$ (14) *lisse hyperelliptique de genre* 3*; c'est un revêtement* (16) *double ramifié en quatre points d'une courbe elliptique $\mathcal{E}$* (17)*.*

Soit

$$M_c = \left\{x \equiv (p_1, p_2, q_1, q_2) \in \mathbb{C}^4 : H_1(x) = c_i,\ H_2(x) = c_2\right\}, \tag{4.10}$$

(où $c \equiv (c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2$ n'est pas une valeur critique), la variété affine définie par l'intersection des intégrales premières du système différentiel de Hénon-Heiles. On va procéder maintenant à la compactification de M_c en une surface abélienne $\widetilde{M_c}$. La méthode consiste à plonger M_c dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ à l'aide des fonctions de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ où $\mathcal{D} \equiv 2\mathcal{H}$. Ce sont des fonctions polynomiales $(f_0, f_1, \ldots, f_7)$ ayant au plus un pôle double de telle façon que: $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) =$ genre de $\mathcal{D} - 1 = 8$. Explicitement, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{D}) &= \{f_0, f_1, \ldots, f_7\},\\
&= \left\{1,\ y_1,\ y_1^2,\ y_2,\ x_1,\ x_1^2 + y_1^2 y_2,\ x_2 y_1 - 2x_1 y_2,\ x_1 x_2 + 2Ay_1 y_2 + 2y_1 y_2^2\right\},\\
&= \left\{1,\ \frac{\alpha}{t},\ \frac{\alpha^2}{t^2},\ -\frac{1}{t^2}, -\frac{\alpha}{t^2},\ -\frac{\alpha^2(\alpha^2 - 8A - B)}{t^2},\ \frac{\alpha(\alpha^2 + 4A - B)}{2t^2},\ \frac{6\beta}{t^2}\right\}\\
&\qquad + \text{termes d'ordre supérieur en } t.
\end{aligned}$$

L'application

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{C}),\ p \longmapsto \lim_{t \to 0} t^2 \left[f_0(p), f_1(p), \ldots, f_7(p)\right] = \left[0, f_1^{(0)}(p), \ldots, f_7^{(0)}(p)\right],$$

applique la courbe $\mathcal{D}$ sur $\widetilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ et le genre de $\mathcal{D}$ est 9. Considérons sur $\widetilde{M_c}$ deux différentielles holomorphes dt_1 et dt_2 avec $dt_i(X_j) = \delta_{ij}$. Comme $\mathcal{H}$ est une courbe hyperelliptique de genre 3, alors

$$\omega_0 = \frac{\alpha d\alpha}{\beta}, \quad \omega_1 = \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta}, \quad \omega_2 = \frac{d\alpha}{\beta}, \tag{4.11}$$

forment une base de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$ avec ω_0 une différentielle holomorphe sur $\mathcal{E}$. En utilisant les séries de Laurent (18), on montre que $dt_1 \mid_{\mathcal{D}} = \frac{\alpha^2 d\alpha}{\beta} = \omega_1$, $dt_2 \mid_{\mathcal{D}} = \frac{d\alpha}{\beta} = \omega_2$. En outre, l'espace des différentielles holomorphes sur $\mathcal{D}$ est $\left\{f_i^{(0)}\omega_2, 1 \leq i \leq 7\right\} \oplus \{\omega_1, \omega_2\}$, où les $f_i^{(0)}$ sont les premiers coefficients des fonctions $f_i \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ et le plongement de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ est à deux différentielles holomorphes près le plongement canonique : $(\alpha, \beta) \in \Gamma \longmapsto [\omega_2, f_1^{(0)}\omega_2, \ldots, f_7^{(0)}\omega_2] \in \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$. En utilisant un raisonnement similaire à celui fait dans les théorème 6, on montre que les orbites du champ de vecteurs (10) passant à travers $\mathcal{D}$ forment une surface lisse Σ tout le long de $\mathcal{D}$ tel que : $\Sigma \backslash \mathcal{D} \subseteq M_c$. Alors, on prouve que $\widetilde{M_c} = M_c \cup \Sigma$ est une variété compacte gràce au fait que les solutions issues des points de $\mathcal{D}$ pénètrent dans la partie affine M_c, plongée dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ à l'aide des fonctions de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$. Cette variété est munie de deux champs de vecteurs réguliers, indépendants en chaque point et commutants. Ces champs se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur $\widetilde{M_c}$. D'après le théorème 6, la variété $\widetilde{M_c}$ est un tore complexe et comme celui-ci possède un plongement projectif, alors $\widetilde{M_c}$ est une surface abélienne. Par conséquent, on a le

Théorème 4.2. *Le système* (10) *est algébriquement complètement intégrable et le flot correspondant évolue sur une surface abélienne* $\widetilde{M_c} \simeq \mathbb{C}^2/$*réseau.*

Théorème 4.3. *Le diviseur* $\mathcal{D} \equiv 2\mathcal{H}$ *détermine sur* $\widetilde{M_c}$ *une polarisation du type* $(2, 4)$. *Autrement dit, on a*

$$M_c = \left\{ \begin{array}{l} \textit{surface abélienne } \widetilde{M_c} \simeq \mathbb{C}^2/\textit{réseau où le réseau} \\ \textit{est engendré par les périodes de la matrice} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & b \\ 0 & 4 & b & c \end{pmatrix} \textit{ avec } Im \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\backslash \left\{ \textit{courbe algébrique } \mathcal{S} \textit{ de genre } 9 \textit{ tracée sur } \widetilde{M_c} \right\}.$$

Démonstration. Notons que $\sigma : (y_1, y_2, x_1, x_2) \longmapsto (y_1, y_2, -x_1, -x_2)$, est une involution sur la surface invariante $M_c(19)$. Cette involution applique X_j sur $-X_j$, $j = 1, 2$, où X_1 désigne le flot (10) et X_2 le second flot, ainsi σ se ramène à une reflexion autour de l'origine sur $\widetilde{M_c}$ choisi d'une manière appropriée. Cette application agit sur les paramètres des séries de Laurent (18) comme suit : $(t, \beta, \alpha) \longmapsto (-t, \beta, -\alpha)$. Puisque $\mathcal{L}$ est symétrique ($\sigma^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$), σ apparait dans $\mathcal{L}$ comme une involution $\widetilde{\sigma}$ agissant de deux manières différentes (selon le signe) et dès lors pour chaque section (fonction thêta) $s \in H^0(\mathcal{L})$, on a $\widetilde{\sigma} s = \pm s$. Rappelons qu'une section $s \in H^0(\mathcal{L})$ est dite paire (resp. impaire) si $\widetilde{\sigma} s = +s$ (resp. $\widetilde{\sigma} s = -s$). Sous $\widetilde{\sigma}$ l'espace vectoriel $H^0(\mathcal{L})$ se décompose en deux sous espaces : $H^0(\mathcal{L}) = H^0(\mathcal{L})^{\text{paire}} \oplus H^0(\mathcal{L})^{\text{impaire}}$, où $H^0(\mathcal{L})^{\text{paire}}$ contient toutes les sections paires et $\mathcal{H}^0(\mathcal{L})^{\text{impaire}}$ toutes les sections impaires. Le calcul des dimensions des espaces $\dim H^0(\mathcal{L})^{\text{paire}}$ et $\dim H^0(\mathcal{L})^{\text{odd}}$ s'obtient à l'aide des formules suivantes [35]:

$$\dim H^0(\mathcal{L})^{\text{paire}} = \begin{cases} \dfrac{\delta_1\delta_2}{2} + 2\left(1 + \left[\dfrac{\delta_2}{2}\right] - \dfrac{\delta_2}{2}\right) & \text{pour } \delta_1 \text{ paire} \\ \dfrac{\delta_1\delta_2}{2} + \left(1 + \left[\dfrac{\delta_2}{2}\right] - \dfrac{\delta_2}{2}\right) & \text{pour } \delta_1 \text{ impaire} \end{cases} \tag{4.12}$$

et

$$\dim H^0(\mathcal{L})^{\mathrm{odd}} = \begin{cases} \dfrac{\delta_1\delta_2}{2} - 2\left(1 + \left[\dfrac{\delta_2}{2}\right] - \dfrac{\delta_2}{2}\right) & \text{pour } \delta_1 \text{ paire} \\ \dfrac{\delta_1\delta_2}{2} - \left(1 + \left[\dfrac{\delta_2}{2}\right] - \dfrac{\delta_2}{2}\right) & \text{pour } \delta_1 \text{ impaire} \end{cases}$$

où $\delta_1 \mid \delta_2$, $\delta_i \in \mathbb{N}^*$. D'après la théorie de la classification des fibrés en droites amples sur les variétés abéliennes et le théorème précédent, on a $\widetilde{M_c} \simeq \mathbb{C}^2/L_\Omega$ où L_Ω est le réseau associé à la matrice des périodes $\Omega = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & a & c \\ 0 & \delta_2 & c & b \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0$, avec $\delta_1\delta_2 = \dim H^0\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right) = \dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = g\ \ (\mathcal{D}) - 1 = 8$ et $\delta_1 \mid \delta_2$, $\delta_i \in \mathbb{N}^*$. Dès lors, on a deux possibilités : (i) $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 8$ et (ii) $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 4$. Compte tenu de la formule (21), le fibré en droites $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ a dans le cas (i), 5 sections paires et 3 sections impaires tandis que dans le cas (ii), il a 6 sections paires et 2 sections impaires. L'espace $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ se décompose en deux sous espaces $\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{paire}}$ et $\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{impaire}}$ de fonctions paires et impaires respectivement pour l'involution σ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\otimes 2} &= \left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{even}} \oplus \left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{odd}} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_7\} \oplus \{f_4, f_6\} \\ &= \{1, y_1, y_1^2, y_2, x_1^2 + y_1^2 y_2, x_1x_2 + 2Ay_1y_2 + 2y_1y_2^2\} \oplus \{x_1,\ x_2y_1 - 2x_1y_2\}. \end{aligned}$$

Parmi les fonctions de $\mathcal{L}^{\otimes 2}$, ils y en a 6 qui sont paires et 2 impaires par rapport à l'involution σ, ce qui montre que (ii) est le seul cas acceptable et par conséquent la matrice des périodes a la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0$. Ceci termine la preuve du théorème. □

Remarque 4.1. Le diviseur $\mathcal{H}$ détermine sur la surface abélienne $\widetilde{M_c}$ une polarisation du type $(1, 2)$. On a vu que l'espace des sections du fibré en droites $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ se décompose en deux sous espaces $\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{paire}}$ et $\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{impaire}}$ des sections (fonctions thêta) paires et impaires respectivement $\mathcal{L}^{\otimes 2} = \left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{paire}} \oplus \left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{impaire}} = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_5, f_7\} \oplus \{f_4, f_6\}$. Une propriété remarquable est que $\left[\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{paire}}, \left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{impaire}}\right] \subset \left(\left(\mathcal{L}^{\otimes 2}\right)^{\text{paire}}\right)^{\otimes 2}$ où $[,]$ désigne le Wronskien $[f_i, f_j] \equiv f_iX(f_j) - f_jX(f_i)$ entre deux fonctions thêta, relatif à un champ X arbitraire de vecteurs holomorphes sur $\widetilde{M_c}$. Dès lors, la surface abélienne $\widetilde{M_c}$, plongée dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ peut être décrite à l'aide de six relations quadratiques entre les fonctions thêta; trois relations renfermant seulement des sections paires et trois autres relations renfermant des sections paires et impaires.

Théorème 4.4. *La surface abélienne $\widetilde{M_c}$ qui complète la variété affine M_c peut être identifiée à la duale d'une variété de Prym $Prym^\vee(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ du revêtement double*

(16) *où $\mathcal{H}$ est la courbe hyperelliptique de genre* 3 *d'équation* (14) *et $\mathcal{E}$ la courbe elliptique d'équation* (17). *En outre, le système différentiel de Hénon-Heiles se linéarise sur cette variété de Prym.*

Démonstration. Soit $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ une base de cycles de $H_1(\mathcal{H}, \mathbb{Z})$ de telle façon que les indices d'intersection de cycles deux à deux s'écrivent : $(a_i, a_i) = (b_i, b_i) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$. On a $\sigma(a_1) = a_3$, $\sigma(b_1) = b_3$, $\sigma(a_2) = -a_2$, $\sigma(b_2) = -b_2$, tandis que $\varphi(a_2), \varphi(b_2)$ sont homologues à zéro dans $\mathcal{E}$. Reprenons la base $(\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ (20) de différentielles holomorphes sur $\mathcal{H}$ avec ω_0 une différentielle holomorphe sur $\mathcal{E}$. On a $\sigma^*(\omega_1) = -\omega_1$, $\sigma^*(\omega_2) = -\omega_2$, $\sigma^*(\omega_3) = \omega_0$. Rappelons que l'involution σ échangeant les feuillets du revêtement double $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{E}$, identifie $\mathcal{E}$ au quotient $\mathcal{H}/\sigma$. Cette involution induit une involution $\sigma : Jac(\mathcal{H}) \longrightarrow Jac(\mathcal{H})$ et modulo un sous-groupe discret, la variété jacobienne $Jac(\mathcal{H})$ se décompose en deux parties : une partie paire à savoir $\mathcal{E}$ et une partie impaire qui n'est autre que la variété de Prym $Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E})$. On montre que si

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \int_{a_2}\omega_1 & \int_{a_3}\omega_1 & \int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 & \int_{b_3}\omega_1 \\ \int_{a_1}\omega_2 & \int_{a_2}\omega_2 & \int_{a_3}\omega_2 & \int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 & \int_{b_3}\omega_2 \\ \int_{a_1}\omega_0 & \int_{a_2}\omega_0 & \int_{a_3}\omega_0 & \int_{b_1}\omega_0 & \int_{b_2}\omega_0 & \int_{b_3}\omega_0 \end{pmatrix},$$

est la matrice des périodes de la variété jacobienne $Jac(\mathcal{H})$, alors celle-ci peut s'écrire sous la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \int_{a_2}\omega_1 & -\int_{a_1}\omega_1 & \int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 & -\int_{b_1}\omega_1 \\ \int_{a_1}\omega_2 & \int_{a_2}\omega_2 & -\int_{a_1}\omega_2 & \int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 & -\int_{b_1}\omega_2 \\ \int_{a_1}\omega_0 & 0 & \int_{a_1}\omega_0 & \int_{b_1}\omega_0 & 0 & \int_{b_1}\omega_0 \end{pmatrix}.$$

En outre et toujours d'après le même théorème, les matrices des périodes de $Jac(\mathcal{E})$, de $Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ et du dual $Prym^\vee(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ de $Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E})$, sont respectivement $\Delta = \begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_0 & \int_{b_1}\omega_0 \end{pmatrix}$,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2\int_{a_1}\omega_1 & \int_{a_2}\omega_1 & 2\int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 \\ 2\int_{a_1}\omega_2 & \int_{a_2}\omega_2 & 2\int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 \end{pmatrix},$$

et

$$\Gamma^\vee = \begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \int_{a_2}\omega_1 & \int_{b_1}\omega_1 & \int_{b_2}\omega_1 \\ \int_{a_1}\omega_2 & \int_{a_2}\omega_2 & \int_{b_1}\omega_2 & \int_{b_2}\omega_2 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$L_\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^{3} (m_i \int_{a_i} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_0 \end{pmatrix} + n_i \int_{b_i} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_0 \end{pmatrix}) : m_i, n_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

le réseau engendré par $\mathbb{Z}^3$ et les colonnes de la matrice des périodes Ω. De même, on désigne par L_Δ le réseau correspondant à la matrice Δ. D'après ce qui précéde, on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathcal{E} & & \mathcal{H} & & \\
 & & & & \downarrow \varphi^* & \swarrow & \downarrow \varphi & & \\
0 & \to & KerN_\varphi & \longrightarrow & Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E}) \oplus \mathcal{E} = Jac(\mathcal{H}) & \xrightarrow{N_\varphi} & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \searrow \tau & \downarrow & & & & \\
 & & & & \widetilde{M_c} = M_c \cup 2\mathcal{H} \simeq \mathbb{C}^2/réseau & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

Le noyau de la polarisation $\tau : Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E}) \longrightarrow \widetilde{M_c} = Prym^\vee(\mathcal{H}/\mathcal{E})$, est $(\varphi^*\mathcal{E}) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, et dès lors la polarisation induite sur $Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ est de type $(1,2)$. Considérons l'application (uniformisante)

$$\widetilde{M_c} \longrightarrow \mathbb{C}^2/L_\Lambda : p \longmapsto \int_{p_0}^{p} \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix},$$

où (dt_1, dt_2) est une base de différentielles holomorphes sur $\widetilde{M_c}$ telles que: $dt_1 \mid_{\mathcal{H}} = \omega_1$ et $dt_2 \mid_{\mathcal{H}} = \omega_2$,

$$L_\Lambda = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} \int_{\nu_k} dt_1 \\ \int_{\nu_k} dt_2 \end{pmatrix} : n_k \in \mathbb{Z} \right\},$$

et $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ une base de cycles dans le groupe d'homologie $H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$. D'après le théorème de Lefschetz [12, 31] sur les sections hyperplanes, l'application $H_1(\mathcal{H}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion $\mathcal{H} \hookrightarrow \widetilde{M_c}$ est surjective et par conséquent on peut trouver quatre cycles $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ sur la courbe $\mathcal{H}$ tels que :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \int_{\nu_1} \omega_1 & \int_{\nu_2} \omega_1 & \int_{\nu_3} \omega_1 & \int_{\nu_4} \omega_1 \\ \int_{\nu_1} \omega_2 & \int_{\nu_2} \omega_2 & \int_{\nu_3} \omega_2 & \int_{\nu_4} \omega_2 \end{pmatrix},$$

et

$$L_\Lambda = \left\{ \sum_{k=1}^{4} n_k \begin{pmatrix} \int_{\nu_k} \omega_1 \\ \int_{\nu_k} \omega_2 \end{pmatrix} : n_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ces cycles sont $\nu_1 = a_1, \nu_2 = b_1, \nu_3 = a_2, \nu_4 = b_2$ et ils engendrent $H_1(\widetilde{M_c}, \mathbb{Z})$ de telle sorte que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \int_{a_1} \omega_1 & \int_{a_2} \omega_1 & \int_{b_1} \omega_1 & \int_{b_2} \omega_1 \\ \int_{a_1} \omega_2 & \int_{a_2} \omega_2 & \int_{b_1} \omega_2 & \int_{b_2} \omega_2 \end{pmatrix},$$

soit une matrice de Riemann. On montre que $\Lambda = \Gamma^\vee$; la matrice des périodes de $Prym^\vee(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ duale de $Prym(\mathcal{H}/\mathcal{E})$. Dès lors, les deux variétés abéliennes $\widetilde{M_c}$ et $Prym^\vee(\mathcal{H}/\mathcal{E})$ sont analytiquement isomorphes au même tore complexe $\mathbb{C}^2/L_\Lambda$ et d'après le théorème de Chow [12, 31], ces variétés sont algébriquement isomorphes. Compte tenu des différentielles (20), les solutions du problème se ramènent à

$$\int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_1 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_1 = \mu_1 t, \qquad \int_{s_1(0)}^{s_1(t)} \omega_2 + \int_{s_2(0)}^{s_2(t)} \omega_2 = \mu_2 t,$$

où μ_1 et μ_2 sont des coordonnées appropriées. □

5 – Un système "généralement" algébriquement complètement intégrable

Considérons le système

$$\ddot{q}_1 - q_1\left(q_1^2 + 3q_2^2\right) = 0, \qquad \ddot{q}_2 - q_2\left(3q_1^2 + 8q_2^2\right) = 0, \tag{5.1}$$

correspondant au hamiltonien

$$H_1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{3}{2}q_1^2 q_2^2 - \frac{1}{4}q_1^4 - 2q_2^4. \tag{5.2}$$

Ce système a été obtenu par Ramani, Dorizzi et Grammaticos [42] et il est intégrable au sens de Liouville, la seconde intégrale première (de degré 8) étant

$$H_2 = p_1^4 - 6q_1^2 q_2^2 p_1^2 + q_1^4 q_2^4 - q_1^4 p_1^2 + q_1^6 q_2^2 + 4q_1^3 q_2 p_1 p_2 - q_1^4 p_2^2 + \frac{1}{4}q_1^8. \tag{5.3}$$

Les intégrales premières H_1 et H_2 sont bien en involution, $\{H_1, H_2\} = 0$. Le système (22) admet deux familles de solutions de Laurent

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) = (t^{-1/2}, t^{-1}, t^{-3/2}, t^{-2}) \times \text{série de puissances en } t,$$

dépendant de trois paramètres libres u, v, w et où les exposants sont des fractions. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left(u - \frac{1}{4}u^3 t + vt^2 - \frac{5}{128}u^7 t^3 + \frac{1}{8}u(\frac{3}{4}u^3 v - \frac{7}{256}u^8 + 3\varepsilon w)t^4 + \cdots\right),\\
q_2 &= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon u^2 t + \frac{1}{8}\varepsilon u^4 t^2 + \frac{1}{4}\varepsilon u(\frac{1}{32}u^5 - 3v)t^3 + wt^4 + \cdots\right),\\
p_1 &= \frac{1}{2t\sqrt{t}}\left(-u - \frac{1}{4}u^3 t + 3vt^2 - \frac{25}{128}t^3 u^7\right.\\
&\qquad \left. + \frac{7}{8}u\left(\frac{3}{4}u^3 v - \frac{7}{256}u^8 + 3\varepsilon w\right)t^4 + \cdots\right),\\
p_2 &= \frac{1}{t^2}\left(-\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon u^4 t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon u(\frac{1}{32}u^5 - 3v)t^3 + 3wt^4 + \cdots\right),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

où $\varepsilon = \pm 1$. La convergence de ces séries est garantie par la méthode des fonctions majorantes. En substituant ces développements dans les équations $H_1 = b_1$ (23), $H_2 = b_2$ (24) où $(b_1, b_2) \in \mathbb{C}^2$, on obtient deux relations polynomiales entre u, v et w. Le paramètre w s'élimine de façon linéaire et on obtient une courbe Γ d'équation affine :

$$\begin{aligned}\Gamma :\ \delta(u,v) \equiv \frac{65}{4}uv^3 + \frac{93}{64}u^6v^2 + \frac{3}{8192}\left(-9829u^8 + 26112H_1\right)u^3v \\ - \frac{10299}{65536}u^{16} - \frac{123}{256}H_1u^8 + H_2 + \frac{15362\,98731}{52} = 0.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Pour déterminer le genre de la surface de Riemann Γ, considérons δ comme un revêtement par rapport à u et cherchons ce qui se passe quand $u \nearrow \infty$. On a

$$\delta(u,v) = \frac{65}{4}uv^3 + \frac{93}{64}u^6v^2 - \frac{29487}{8192}u^{11}v - \frac{10299}{65536}u^{16} + \text{termes d'ordre inférieur},$$

et $(u)_\infty = -P - Q - R$, $(v)_\infty = -3P - 3Q - 3R$. Posons $t = \frac{1}{u}$, d'où

$$\delta(u,v) = \frac{1}{t^{16}}\left(\frac{65}{4}v^3t^{15} + \frac{93}{64}v^2t^{10} - \frac{29487}{8192}vt^5 - \frac{10299}{65536}\right) + \dots$$

Ceci suggère le changement de cartes suivant : $(u,v) \longmapsto (w = vt^5, t = \frac{1}{u})$. La fonction

$$\frac{\partial\delta(u,v)}{\partial v} = \frac{195}{4}uv^2 + \frac{93}{32}u^6v - \frac{29487}{8192}u^{11} = \frac{195}{4}\frac{w^2}{t^{11}} + \frac{93}{32}\frac{w}{t^{11}} - \frac{29487}{8192}\frac{1}{t^{11}},$$

étant méromorphe sur la surface de Riemann Γ, alors le nombre de zéros de $\frac{\partial\delta}{\partial v}$ est égal au nombre de pôles de $\frac{\partial\delta}{\partial v}$. Comme $\left(\frac{\partial\delta}{\partial v}\right)_P = -11P$, $\left(\frac{\partial\delta}{\partial v}\right)_Q = -11Q$, $\left(\frac{\partial\delta}{\partial v}\right)_P = -11R$, alors le nombre de zéros de $\frac{\partial\delta}{\partial v}$ dans la partie affine $\Gamma \backslash P, Q, R$ est égal à 33. En tenant compte de l'infini et de la formule de Riemann-Hurwitz, on obtient $g = -3 + 1 + \frac{44}{2} = 20$. Donc les séries de Laurent du système (22) sont donc paramètrées par deux copies Γ_1 et Γ_{-1} d'une même courbe Γ de genre 20.

Soit A la variété invariante,

$$A = \{x : H_1 = b_1, H_2 = b_2\}, \tag{5.6}$$

où b_1 et b_2 sont des constantes génériques.

Théorème 5.1. *Le système* (22) *se prolonge en un système* (29) *de cinq équations algébriquement complètement intégrable ayant trois intégrales premières quartiques* (30)*. Génériquement, la variété invariante* B(33) *définie par l'intersection de ces quartiques forme la partie affine d'une surface abélienne* $\widetilde{B}$*. Le diviseur réduit à l'infini* $\widetilde{B} \backslash B = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$ *est très ample et a deux composantes* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_{-1}$*, d'une courbe* $\mathcal{C}$(32) *de genre* 7*. Les seize fonctions de l'espace* $L^{(4)}$(34) *plongent ces courbes dans un hyperplan de* $\mathbb{CP}^{15}$ *et ces dernières ont deux points en commun en lequel* $\mathcal{C}_1$ *est tangente à* $\mathcal{C}_{-1}$*.*

DÉMONSTRATION. Soit $A \longrightarrow \mathbb{C}^5$, $(q_1, q_2, p_1, p_2) \longmapsto (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, le morphisme défini sur la variété affine $A(27)$ par

$$z_1 = q_1^2, \quad z_2 = q_2, \quad z_3 = p_2, \quad z_4 = q_1 p_1, \quad z_5 = p_1^2 - q_1^2 q_2^2. \tag{5.7}$$

En utilisant ces variables et les équations (22), on obtient

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = 2z_4, \qquad \dot{z}_2 = z_3, \qquad \dot{z}_3 = z_2(3z_1 + 8z_2^2), \\ &\dot{z}_4 = z_1^2 + 4z_1 z_2^2 + z_5, \qquad \dot{z}_5 = 2z_1 z_4 + 4z_2^2 z_4 - 2z_1 z_2 z_3. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ce nouveau système sur $\mathbb{C}^5$ admet les trois intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2} z_5 - z_1 z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 - \frac{1}{4} z_1^2 - 2z_2^4, \\ F_2 &= z_5^2 - z_1^2 z_5 + 4z_1 z_2 z_3 z_4 - z_1^2 z_3^2 + \frac{1}{4} z_1^4 - 4z_2^2 z_4^2, \\ F_3 &= z_1 z_5 + z_1^2 z_2^2 - z_4^2, \end{aligned} \tag{5.9}$$

et il est complètement intégrable. La structure hamiltonienne est définie par le crochet de Poisson : $\{F, H\} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, J \frac{\partial H}{\partial z} \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{5} J_{kl} \frac{\partial F}{\partial z_k} \frac{\partial H}{\partial z_l}$, où

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \frac{\partial H}{\partial z_2}, \frac{\partial H}{\partial z_3}, \frac{\partial H}{\partial z_4}, \frac{\partial H}{\partial z_5} \right)^\top,$$

et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2z_1 & 4z_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2z_1 z_2 \\ -2z_1 & 0 & 0 & 0 & 2z_5 + 4z_1 z_2^2 \\ -4z_4 & 0 & -2z_1 z_2 & -2z_5 - 4z_1 z_2^2 & 0 \end{pmatrix},$$

une matrice antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi. Le système (28) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{z} = J \frac{\partial H}{\partial z}, \quad z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)^\top,$$

où $H = F_1$. Les deux intégrales premières F_1 et F_2 sont en involution : $\{F_1, F_2\} = 0$, tandis que F_3 est triviale (fonction de Casimir), *i.e.*, $J \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$. Les solutions de

Laurent du système (29) dépendant de quatre paramètres libres, sont de la forme

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{t}\left(z_1^{(0)} + z_1^{(1)}t + z_1^{(2)}t^2 + z_1^{(3)}t^3 + z_1^{(4)}t^4 + \cdots\right),\\
z_2 &= \frac{1}{t}\left(z_2^{(0)} + z_2^{(1)}t + z_2^{(2)}t^2 + z_2^{(3)}t^3 + z_2^{(4)}t^4 + \cdots\right),\\
z_3 &= \frac{1}{t^2}\left(-z_2^{(0)} + z_2^{(2)}t^2 + 2z_2^{(3)}t^3 + 3z_2^{(4)}t^4 + \cdots\right),\\
z_4 &= \frac{1}{2t^2}\left(-z_1^{(0)} + z_1^{(2)}t^2 + 2z_1^{(3t)}t^3 + 3z_1^{(4)}t^4 + \cdots\right),\\
z_5 &= \frac{1}{t^3}\left(z_5^{(0)} + z_5^{(1)}t + z_5^{(2)}t^2 + z_5^{(3)}t^3 + z_5^{(4)}t^4 + \cdots\right).
\end{aligned}
$$

On substitue ces développements dans les équations

$$
\begin{aligned}
\ddot{z}_1 &= 2z_5 + 2z_1^2 + 8z_1z_2^2,\\
\ddot{z}_2 &= 3z_1z_2 + 8z_2^3,\\
\dot{z}_5 &= z_1\dot{z}_1 + 2z_2^2\dot{z}_1 - 2z_1z_2\dot{z}_2,
\end{aligned}
$$

déduites du système (22) et on détermine par induction les $z_k^{(j)}(k = 1, 2, 5)$. On obtient pour $j = 0$ un paramètre libre α, pour $j = 2$ un autre paramètre libre β et pour $j = 4$ deux paramètres libres γ et θ. Explicitement, on a

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{t}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \beta t - \frac{1}{16}\alpha\left(\alpha^3 + 4\beta\right)t^2 + \gamma t^3 + \cdots,\\
z_2 &= \frac{1}{2t}\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon\alpha + \frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2 t - \frac{1}{32}\varepsilon\left(-\alpha^3 + 12\beta\right)t^2 + \theta t^3 + \cdots,\\
z_3 &= -\frac{1}{2t^2}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon\alpha^2 - \frac{1}{16}\varepsilon\left(-\alpha^3 + 12\beta\right)t + 3\theta t^2 + \cdots,\\
z_4 &= -\frac{1}{2t^2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{16}\alpha\left(\alpha^3 + 4\beta\right)t + \frac{3}{2}\gamma t^2 + \cdots,\\
z_5 &= \frac{1}{2t^2}\alpha^2 - \frac{1}{4t}\left(\alpha^3 + 4\beta\right) + \frac{1}{4}\alpha\left(\alpha^3 + 2\beta\right) - \left(\alpha^2\beta - 2\gamma + 4\varepsilon\theta\alpha\right)t + \cdots,
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon = \pm 1$. Donc le système (22) admet deux familles de solutions de Laurent dépendant de 4 paramètres libres α, β, γ et θ. La convergence de ces séries est garantie par la méthode des fonctions majorantes. En substituant ces développements dans les équations $F_1 = c_1$, $F_2 = c_2$ et $F_3 = c_3$, (c_1, c_2, c_3 étant des constantes génériques) on obtient trois relations polynomiales entre α, β, γ et θ :

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \frac{7}{64}\alpha^4 - \frac{1}{8}\alpha\beta - \frac{5}{2}\varepsilon\theta = c_1,\\
F_2 &= \frac{1}{16}\left(4\beta - \alpha^3\right)\left(4\alpha^2\beta - \alpha^5 + 64\varepsilon\theta\alpha - 32\gamma\right) = c_2,\\
F_3 &= -\frac{1}{32}\alpha^6 - \beta^2 - \frac{1}{4}\alpha^3\beta - 3\varepsilon\theta\alpha^2 + 4\alpha\gamma = c_3.
\end{aligned}
$$

Les paramètres γ et θ s'éliminent de façon linéaire et on obtient une courbe d'équation affine :

$$\mathcal{C} : \Delta(\alpha, \beta) = 0, \tag{5.10}$$

où

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha, \beta) \equiv\ & 64\beta^3 - 16\alpha^3\beta^2 - 4\left(\alpha^6 - 32\alpha^2 c_1 - 16c_3\right)\beta \\ & + \alpha\left(32c_2 - 32\alpha^4 c_1 + \alpha^8 - 16\alpha^2 c_3\right).\end{aligned}$$

Les séries de Laurent (25) sont donc paramétrées par deux copies $\mathcal{C}_{\pm 1}$, d'une même courbe $\mathcal{C}$. Nous allons maintenant calculer le genre de cette courbe. On a

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha, \beta) &= 64\beta^3 - 16\alpha^3\beta^2 - 4\alpha^6\beta - \alpha^9 + \text{termes d'ordre inférieur}, \\ &= \prod_{j=1}^{3}(\beta + a_j\alpha^3) + \text{termes d'ordre inférieur}.\end{aligned}$$

Considérons Δ comme un revêtement par rapport à α. Au voisinage de $\alpha = \infty$, on a $\beta = -a_j\alpha^3 + \cdots$, et $(\alpha)_\infty = -P - Q - R$, $(\beta)_\infty = -3P - 3Q - 3R$. Posons $t = \frac{1}{\alpha}$, alors

$$\Delta(\alpha, \beta) = \frac{1}{t^9}(64t^9\beta^3 - 16t^6\beta\beta^2 - 4t^3\beta - 97) + \cdots .$$

Ceci suggère le changement de cartes suivant : $(\alpha, \beta) \longmapsto \left(w = t^3\beta, t = \frac{1}{\alpha}\right)$. Notons que la fonction $\frac{\partial\Delta}{\partial\beta} = 192\frac{w^2}{t^6} - 32\frac{w}{t^6} - \frac{4}{t^6} + \cdots$, est méromorphe sur $\mathcal{C}$. Dès lors #zéros de$\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}$ = #ples de$\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}$ et $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)_P = -6P$, $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)_Q = -6Q$, $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)_R = -6R$, $\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}\right)_\infty = -6(P+Q+R)$. Par conséquent, le nombre de zéros de $\frac{\partial\Delta}{\partial\beta}$ dans la partie affine $\mathcal{C}\backslash\{P, Q, R\}$ est 18. D'après la formule de Riemann-Hurwitz, le genre de $\mathcal{C}$ est $g = -3 + 1 + \frac{18}{2} = 7$.

Soit

$$B = \bigcap_{k=1}^{3}\{z : F_k(z) = c_k\} \subset \mathbb{C}^5, \tag{5.11}$$

où c_k n'est pas une valeur critique, la variété affine définie par l'intersection des trois constantes du mouvement. Nous allons voir en détail comment complèter B en une variété abélienne. La méthode consiste à trouver une base de l'espace des fonctions polynomiales des coordonnées

$$L^{(r)} = \left\{\begin{array}{l} f = f(z_1, \ldots, z_5) \quad \text{polynmes} \\ \text{de degré} \leq r, \quad \text{tels que :} \\ f(z(t)) = t^{-1}(z^{(0)} + \ldots), \\ \text{avec} \quad z^{(0)} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{D} \quad \text{où} \\ z(t) \quad \text{est donné par(7.24)} \end{array}\right\} / [F_k = c_k, k = 1, 2, 3],$$

de telle façon que le plongement $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_{-1}$ dans $\mathbb{CP}^N$ à l'aide de ces fonctions, satisfasse à la relation : *genre géométrique de* $\mathcal{D}^{(r)}=N_r+2$, où $\mathcal{D}^{(r)}\subset\mathbb{CP}^{N_r}$. Nous allons voir que $L^{(4)}$ fournit un plongement de $\mathcal{D}^{(4)}$ dans l'espace projectif $\mathbb{CP}^{15}$, que le diviseur $\mathcal{D}^{(4)}$ ainsi obtenu est de genre 17 et qu'il est très ample. On a $L^{(1)}=\{f_0,f_1,f_2\}$, $L^{(2)}=L^{(1)}\oplus\{f_3,f_4,f_5,f_6\}$, $L^{(3)}=L^{(2)}\oplus\{f_7,f_8,f_9,f_{10}\}$, $L^{(4)}=L^{(3)}\oplus\{f_{12},f_{13},f_{14},f_{15}\}$, où

$$f_0=1,\quad f_1=z_1=\frac{1}{t}\alpha+\ldots,\qquad f_2=z_2=\frac{1}{2t}\varepsilon+\ldots,$$

$$f_3=2z_5-z_1^2=-\frac{1}{2}\frac{4\beta-\alpha^3}{t}+\ldots,\qquad f_4=z_3+2\varepsilon z_2^2=-\frac{1}{2t}\varepsilon\alpha+\ldots,$$

$$f_5=z_4+\varepsilon z_1z_2=-\frac{1}{2t}\alpha^2+\ldots,\qquad f_6=[f_1,f_2]=\frac{1}{4}\varepsilon\frac{4\beta-\alpha^3}{t}+\cdots,$$

$$f_7=f_1a=\frac{1}{2t}\alpha^3+\cdots,\qquad f_8=f_2a=\frac{1}{4t}\varepsilon\alpha^2+\cdots,$$

$$f_9=z_4b=\frac{1}{8t}\alpha^3\left(-\alpha^3+4\beta\right)+\cdots,\qquad f_{10}=z_5b=-\frac{1}{8t}\alpha^4\left(-\alpha^3+4\beta\right)+\cdots,$$

$$f_{11}=f_5a=-\frac{1}{4t}\alpha^4+\cdots,\qquad f_{12}=f_1f_2b=-\frac{1}{8t}\alpha^3\varepsilon\left(-\alpha^3+4\beta\right)+\cdots,$$

$$f_{13}=f_4f_5+[f_1,f_4]=\frac{3}{8}\alpha\varepsilon\frac{4\beta-\alpha^3}{t}+\cdots,$$

$$f_{14}=[f_1,f_3]+2\varepsilon\,[f_1,f_6]=\frac{1}{2}\alpha^3\frac{4\beta-\alpha^3}{t}+\cdots,$$

$$f_{15}=f_3-2z_5+4f_4^2=-\frac{\alpha^3}{t}+\cdots,$$

où $[s_j,s_k]=\dot{s}_js_k-s_j\dot{s}_k$ est le wronskien de s_k et s_j, $a=f_1+2\varepsilon f_4$ et $b=f_3+2\varepsilon f_6$. Notons tout d'abord que les espaces $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ et $L^{(3)}$ ne fournissent pas le plongement en question car $g(\mathcal{D}^{(r)})\neq\dim L^{(r)}+1$, $r=1,2,3$. Plus précisément, comme le plongement dans $\mathbb{CP}^2$ via $L^{(1)}$ ne sépare pas les feuillets, on passe à $L^{(2)}$ et on constate que le plongement dans $\mathbb{CP}^6$ est aussi inacceptable puisque $g(\mathcal{D}^{(2)})>6$ et $\mathcal{D}^{(2)}\subset\mathbb{CP}^6\neq\mathbb{CP}^{g-2}$, ce qui contredit le fait que $N_r=g(\mathcal{D}^{(2)})-2$. De la même manière, on utilise les fonctions $(f_0,\ldots,f_{10})$ de l'espace $L^{(3)}$ et on considère le plongement correspondant dans $\mathbb{CP}^{10}$. Pour des valeurs finies de α et β, on divise le vecteur $(f_0,\ldots,f_{10})$ par f_2, ensuite on fait tendre t vers 0 et on obtient

$$[0:2\varepsilon\alpha:1:-\varepsilon(4\beta-\alpha^3):-\alpha:-\varepsilon\alpha^2:\frac{1}{2}(4\beta-\alpha^3):\varepsilon\alpha^3:\frac{1}{2}\alpha^2:$$

$$\frac{1}{4}\varepsilon\alpha^3(4\beta-\alpha^3):-\frac{1}{4}\varepsilon\alpha^4(4\beta-\alpha^3)].$$

Le point $\alpha=0$ nécessite une attention particulière. En effet autour de ce point, le paramètre β se comporte comme suit : $\beta\sim 0,i\sqrt{c_3},-i\sqrt{c_3}$. Donc au voisinage de

$(\alpha, \beta) = (0, 0)$, le point correspondant est envoyé vers le point

$$[0:0:1:0:0:0:0:0:0:0:0] \in \mathbb{CP}^{10},$$

lequel est indépendant de $\varepsilon = \pm 1$, tandis qu'au voisinage du point $(\alpha, \beta) = (0, i\sqrt{c_3})$ (resp. $(\alpha, \beta) = (0, -i\sqrt{c_3})$) on obtient deux points distincts :

$$[0:0:1:-4\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:2\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:0:0]$$

$$(\text{resp.}[0:0:1:4\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:-2\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:0:0]),$$

en tenant compte du signe de ε. Au voisinage de $\alpha = \infty$, la surface de Riemann (32) possède trois points en lesquels, elle se comporte comme suit :

$$\beta \sim -\frac{1279}{216}\alpha^3, \frac{1}{432}\alpha^3\left(1333 - 1295i\sqrt{3}\right), \frac{1}{432}\alpha^3\left(1333 + 1295i\sqrt{3}\right).$$

Dès lors, en divisant le vecteur $(f_0, \ldots, f_{10})$ par f_{10}, le point correspondant est envoyé vers le point

$$[0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:1] \in \mathbb{CP}^{10}.$$

Donc $g(\mathcal{D}^{(3)}) - 2 > 10$ et $\mathcal{D}^{(3)} \subset \mathbb{CP}^{10} \neq \mathbb{CP}^{g-2}$, ce qui contredit le fait que $N_r = g(\mathcal{D}^{(3)}) - 2$. Considérons maintenant le plongement de $\mathcal{D}^{(4)}$ dans $\mathbb{CP}^{15}$ via les 16 fonctions $f_0, \ldots, f_{15}$ de $L^{(4)}(34)$. On vérifie aisément que que ces fonctions séparent tous les points de la surface de Riemann (à l'exception peut-être des points $\alpha = \infty$ et $\alpha = \beta = 0$) : Les surfaces de Riemann $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ sont disjoints pour des valeurs finies de α et β à l'exception de $\alpha = \beta = 0$; en divisant le vecteur $(f_0, \ldots, f_{15})$ par f_2 et en prenant la limite $t \to 0$, on obtient

$$\Big[0:2\varepsilon\alpha:1:-\varepsilon(4\beta-\alpha^3):-\alpha:-\varepsilon\alpha^2:\frac{1}{2}(4\beta-\alpha^3):\varepsilon\alpha^3:\frac{1}{2}\alpha^2:$$
$$\frac{1}{4}\varepsilon\alpha^3(4\beta-\alpha^3):-\frac{1}{4}\varepsilon\alpha^4(4\beta-\alpha^3):-\frac{1}{2}\varepsilon\alpha^4:-\frac{1}{4}\alpha^3(4\beta-\alpha^3):$$
$$\frac{3}{4}\alpha\left(4\beta-\alpha^3\right):\varepsilon\alpha^3\left(4\beta-\alpha^3\right):-2\varepsilon\alpha^3\Big].$$

Comme précédemment, le point $\alpha = 0$ nécessite une attention particulière et le paramètre β se comporte comme suit : $\beta \sim 0, i\sqrt{c_3}, -i\sqrt{c_3}$. Donc autour de $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, le point correspondant est envoyé vers le point

$$[0:0:1:0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:0] \in \mathbb{CP}^{15},$$

lequel est indépendant de $\varepsilon = \pm 1$, tandis qu'autour du point $(\alpha,\beta) = (0, i\sqrt{c_3})$ (resp. $(\alpha,\beta) = (0, -i\sqrt{c_3})$) on obtient deux points distincts :

$$[0:0:1:-4\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:2\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:0:0:0:0:0:0:0]$$
$$(\text{resp.}[0:0:1:4\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:-2\varepsilon i\sqrt{c_3}:0:0:0:0:0:0:0:0:0]),$$

en tenant compte du signe de ε. Concernant le point $\alpha = \infty$, il est opportun de diviser par f_{10}; dès lors le point correspondant est envoyé vers le point

$$[0:0:0:0:0:0:0:0:0:0:1:0:0:0:0:0] \in \mathbb{CP}^{15},$$

lequel est indépendant de ε. Le genre du diviseur $\mathcal{D}^{(4)}$ obtenu de cette manière est égale à 17 et la condition $\mathcal{D}^{(4)} \subset \mathbb{CP}^{15} = \mathbb{CP}^{g-2}$, est satisfaite. Soit $\mathcal{L} \equiv L^{(4)}$ et $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}^{(4)}$. Nous allons voir que les orbites du champ de vecteur (29) passant à travers $\mathcal{D}$ forment une surface lisse Σ autour de $\mathcal{D}$ telle que : $\Sigma \backslash B \subseteq \widetilde{B}$ et la variété $\widetilde{B} = B \cup \Sigma$ est lisse, compacte et connexe. En effet, soit $\psi(t,p) = \{z(t) = (z_1(t),\ldots,z_5(t)) : t \in \mathbb{C}, 0 < |t| < \epsilon\}$, l'orbite du champ de vecteurs (7.22) passant à travers le point $p \in \mathcal{D}$. Soit $\Sigma_p \subset \mathbb{CP}^{15}$ un élément de la surface formée par le diviseur $\mathcal{D}$ et les orbites passant à travers p. Posons $\Sigma \equiv \cup_{p\in\mathcal{D}}\Sigma_p$ et considérons la surface de Riemann $\mathcal{D}' = \mathcal{H} \cap \Sigma$ où $\mathcal{H} \subset \mathbb{CP}^{15}$ est un hyperplan transversal à la direction du flot. Si $\mathcal{D}'$ est lisse, alors d'après le théorème des fonctions implicites la surface Σ est lisse. Par contre, si $\mathcal{D}'$ est singulière en 0, alors Σ doit-être singulière le long de la trajectoire (axe des t) laquelle pénètre immédiatement dans la partie affine B. Donc B est singulière ce qui est absurde car B où c_k n'est pas une valeur critique, est le fibré d'un morphisme de $\mathbb{C}^5$ dans $\mathbb{C}^3$, donc lisse. Soient $\overline{B}$ la fermeture projective de B dans $\mathbb{CP}^5$, $Z = [Z_0 : Z_1 : \ldots : Z_5] \in \mathbb{CP}^5$ et $I = \overline{B} \cap \{Z_0 = 0\}$ le lieu à l'infini. Considérons l'application $\overline{B} \subseteq \mathbb{CP}^5 \longrightarrow \mathbb{CP}^{15}$, $Z \longmapsto f(Z)$, où $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{15}) \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ et soit $\widetilde{B} = f(\overline{B})$. Dans un voisinage $V(p) \subseteq \mathbb{CP}^{15}$ de p, on a $\Sigma_p = \widetilde{B}$ et $\Sigma_p \backslash \mathcal{D} \subseteq B$. Sinon, il existe un élément de surface $\Sigma'_p \subseteq \widetilde{B}$ tel que : $\Sigma_p \cap \Sigma'_p$ =(axe des t), orbite $\psi(t,p)$ =(axe des t)$\backslash$ $p \subseteq B$, et donc B serait singulière le long de l'axe des t ce qui est impossible. Puisque la variété $\overline{B} \cap \{Z_0 \neq 0\}$ est irréductible et puisque la section générique hyperplane $\mathcal{H}_{\text{gen.}}$ de $\overline{B}$ est aussi irréductible, alors toutes les sections hyperplanes sont connexes et par conséquent I est aussi connexe. Considérons maintenant le graphe $\Gamma_f \subseteq \mathbb{CP}^5 \times \mathbb{CP}^{15}$ de l'application f, celle-ci et $\overline{B}$ sont irréductibles. Il s'ensuit de l'irréductibilité de I qu'une section générique hyperplane $\Gamma_f \cap \{\mathcal{H}_{\text{gen.}} \times \mathbb{CP}^{15}\}$ est irréductible, dès lors la section hyperplane spéciale $\Gamma_f \cap \{\{Z_0 = 0\} \times \mathbb{CP}^{15}\}$ est connexe et donc la projection $proj_{\mathbb{CP}^{15}}\{\Gamma_f \cap \{\{Z_0 = 0\} \times \mathbb{CP}^{15}\}\} = f(I) \equiv \mathcal{D}$, est connexe. D'où, la variété $B \cup \Sigma = \widetilde{B}$ est compacte, connexe et admet un plongement dans $\mathbb{CP}^{15}$ via f. On veut montrer que $\widetilde{B}$ est une surface abélienne munie de deux champs de vecteurs indépendants et commutatifs. Soit ϕ^{τ_1} and ϕ^{τ_2} les flots correspondants aux champs de vecteurs X_{F_1} et X_{F_2}. Ces derniers sont engendrés respectivement par F_1 et F_2. Pour $p \in \mathcal{D}$ et pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\phi^{\tau_1}(p), \forall\tau_1, 0 < |\tau_1| < \epsilon$, est bien défini et on a $\phi^{\tau_1}(p) \in \widetilde{B}\backslash B$. Donc on peut définir ϕ^{τ_2} sur $\widetilde{B}$ par $\phi^{\tau_2}(q) = \phi^{-\tau_1}\phi^{\tau_2}\phi^{\tau_1}(q)$, $q \in U(p) = \phi^{-\tau_1}(U(\phi^{\tau_1}(p)))$, où $U(p)$ désigne un voisinage de p. D'après la commutativité des champs de vecteurs, on voit que ϕ^{τ_2} est indépendant de τ_1; $\phi^{-\tau_1-\epsilon_1}\phi^{\tau_2}\phi^{\tau_1+\epsilon_1}(q) = \phi^{-\tau_1}\phi^{-\epsilon_1}\phi^{\tau_2}\phi^{\tau_1}\phi^{\epsilon_1}\phi^{-\tau_1}\phi^{\tau_2}\phi^{\tau_1}(q)$. Nous affirmons que $\phi^{\tau_2}(q)$ est holomorphe en dehors de $\mathcal{D}$. Celà est dû au fait que $\phi^{\tau_2}\phi^{\tau_1}(q)$ est holomorphe en dehors de $\mathcal{D}$ et que ϕ^{τ_1} est holomorphe dans $U(p)$ et applique de manière bi-holomorphe $U(p)$ sur $U(\phi^{\tau_1}(p))$. Maintenant puisque les flots ϕ^{τ_1} et ϕ^{τ_2} sont holomorphes et indépendants sur $\mathcal{D}$, on peut utiliser un raisonnement similaire à celui fait précédemment et montrer que $\widetilde{B}$ est un tore complexe $\mathbb{C}^2$/réseau et en particulier $\widetilde{B}$ est une variété kählérienne. Il suffit pour celà de considérer le difféomorphisme local $\mathbb{C}^2 \longrightarrow \widetilde{B}$, $(\tau_1, \tau_2) \longmapsto \phi^{\tau_1}\phi^{\tau_2}(p)$, où $p \in B$ est fixé. Le sous groupe additif $\{(\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{C}^2 : \phi^{\tau_1}\phi^{\tau_2}(p) = p\}$ est un réseau de $\mathbb{C}^2$, donc $\mathbb{C}^2$/réseau $\longrightarrow \widetilde{B}$ est un difféomorphisme biholomorphe et $\widetilde{B}$ est une variété kählérienne munie de la métrique (de Kähler) suivante : $d\tau_1 \otimes d\overline{\tau}_1 + d\tau_2 \otimes d\overline{\tau}_2$. D'après le théorème de Moishezon [15], une variété complexe kählérienne compacte ayant un nombre suffisant (égal à sa dimension) de fonctions méromorphes indépendantes est une variété projective. Ici, on a $\widetilde{B} \subseteq \mathbb{CP}^{15}$. Donc $\widetilde{B}$ est en même temps une variété projective et un tore complexe $\mathbb{C}^2$/réseau et en vertu du théorème de Chow $\widetilde{B}$ est une surface abélienne. $\square$

Nous allons montrer (d'après une méthode de Piovan [40]) que la variété A se complète en un revêtement cyclique double de la surface abélienne $\widetilde{B}$, ramifié le long du diviseur $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$. C'est ce qui explique pourquoi les solutions de Laurent (notamment q_1) contiennent des fractions du type $t^{1/2}$.

Théorème 5.2. *Le système* (22) *est "généralement" algébriquement complètement intégrable. La surface invariante* $A(27)$ *se complète en un revêtement cyclique double* $\overline{A}$ *de la surface abélienne* $\widetilde{B}$*, ramifié le long du diviseur* $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$*. En outre,* $\overline{A}$ *est lisse sauf aux points doubles d'intersection des courbes* $\mathcal{C}_1$ *et* $\mathcal{C}_{-1}$*; il s'agit de points singuliers du type* A_3*. L'équation analytique locale autour de ces singularités est :* $X^4 + Y^2 + Z^2 = 0$*, où* X, Y *et* Z *sont des coordonnées locales appropriées. La résolution* $\widetilde{A}$ *de* $\overline{A}$*, est une surface ayant comme invariants:* $\mathcal{X}(\widetilde{A}) = 1$ *et* $p_g(\widetilde{A}) = 2$.

Démonstration. Le morphisme

$$\varphi \ : A \longrightarrow B, \quad (q_1, q_2, p_1, p_2) \longmapsto (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5),$$

prolonge le champ de vecteurs (22) en un système algébriquement intégrable (29) et la variété affine A (27) sur la partie affine B (33) d'une variété abélienne $\widetilde{B}$ avec $\widetilde{B}\backslash B = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$. Notons que φ est un revêtement non ramifié. La surface de Riemann $\Gamma(26)$ va jouer un rôle important dans la construction du compactifié $\overline{A}$ de A. Soit U_ε^j une carte affine de Γ_ε $(\varepsilon = \pm 1)$ dans laquelle les séries de

Laurent (25) sont définies et soit G un groupe cyclique de deux éléments $\{-1,1\}$ sur $V_\varepsilon^j = U_\varepsilon^j \times \{\tau \in \mathbb{C} : 0 < |\tau| < \delta\}$, où $\tau = t^{1/2}$. L'action de G est définie par $(-1)\circ(u,v,\tau) = (-u,-v,-\tau)$, et n'a pas de points fixes sur V_ε^j. On peut donc identifier le quotient V_ε^j/G avec l'image de l'application lisse $h_\varepsilon^j : V_\varepsilon^j \longrightarrow A$ définie par les développements (25). On a $(-1,1).(u,v,\tau) = (-u,-v,\tau)$ et $(1,-1).(u,v,\tau) = (u,v,-\tau)$, *i.e.*, $G \times G$ agit séparément sur chaque coordonnée. Donc, V_ε^j/G^2 s'identifie à l'image de $\varphi \circ h_\varepsilon^j$ dans B. Notons que $A_\varepsilon^j = V_\varepsilon^j/G$ est lisse (excepté en un nombre fini de points) et l'adhérence de A_ε^j se déduit de celle de V_ε^j et de l'action de G. Maintenant, on adjoint à A les différentes variétés $A_\varepsilon^j\backslash\{\text{quelques points}\}$, on obtient une variété complexe lisse $\widehat{A}$ laquelle est un revêtement double de la variété abélienne $\widetilde{B}$ (construite dans le théorème précédent) ramifié le long de $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$ et par conséquent peut être complété en un revêtement cyclique algébrique de $\widetilde{B}$. Pour voir ce qui se passe au niveau des points manquants, on doit examiner l'image de $\Gamma \times \{0\}$ dans $\cup A_\varepsilon^j$. Le quotient $\Gamma \times \{0\}/G$ est birationnellement équivalent à la surface de Riemann Υ de genre 7 :

$$\Upsilon : \frac{65}{4}y^3 + \frac{93}{64}x^3y^2 + \frac{3}{8192}\left(-9829x^4 + 26112b_1\right)x^2y,$$
$$+x\left(-\frac{10299}{65536}x^8 - \frac{123}{256}b_1x^4 + b_2 + \frac{15362\,98731}{52}\right) = 0,$$

où $y = uv, x = u^2$. La surface de Riemann Υ est birationnellement équivalente à $\mathcal{C}$. Les seuls points de Υ fixés sous $(u,v) \longmapsto (-u,-v)$ sont les points à l'infini correspondant aux points de ramifications de l'application $\Gamma \times \{0\} \xrightarrow{2-1} \Upsilon$, $(u,v) \longmapsto (x,y)$ et coincident avec les points à l'infini de la surface de Riemann $\mathcal{C}$. Donc la variété $\widehat{A}$ construite précédemment est birationnellement équivalente au compactifié $\overline{A}$ de la surface générique invariante A. Dès lors, $\overline{A}$ est un revêtemnt double cyclique de la surface abélienne $\widetilde{B}$ ramifié le long du diviseur $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$, où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ ont deux points en commun en lesquels $\mathcal{C}_1$ est tangente à $\mathcal{C}_{-1}$. On en déduit que le système (22) est "généralement" algébriquement complètement intégrable. En outre, $\overline{A}$ est lisse sauf aux points doubles d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$. Plus précisément, il s'agit de points singuliers du type A_3. L'équation analytique locale autour de ces singularités s'écrit sous la forme : $X^4 + Y^2 + Z^2 = 0$, où X, Y et Z sont des coordonnées locales appropriées. Soient $\widetilde{A}$ la résolution de $\overline{A}$, $\mathcal{X}(\widetilde{A})$ la charactéristique d'Euler de $\widetilde{A}$ et $p_g(\widetilde{A})$ le genre géométrique de $\widetilde{A}$. Alors, $\widetilde{A}$ est une surface ayant comme invariants: $\mathcal{X}(\widetilde{A}) = 1$ et $p_g(\widetilde{A}) = 2$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

Remarque 5.1. Soient dt_1, dt_2 deux 1-formes holomorphes sur $\widetilde{B}$ correspondant respectivement aux champs de vecteurs X_{F_1} et X_{F_2}. Posons $\zeta = \frac{1}{z_2}$ et $\xi = \frac{z_1}{z_2}$. En utilisant ces champs de vecteurs et les séries de Laurent (31), on obtient les différentielles :

$$\omega_1 = dt_1|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{1}{\triangle}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t_2}d\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t_2}d\xi\right)\Big|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{8}{\alpha\left(-4\beta+\alpha^3\right)}d\alpha,$$

$$\omega_2 = dt_2|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{1}{\triangle}\left(\frac{-\partial \xi}{\partial t_1}d\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial t_1}d\xi\right)\Big|_{\mathcal{C}_\varepsilon} = \frac{2}{\left(-4\beta+\alpha^3\right)^2}d\alpha,$$

où $\triangle \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial t_1}\frac{\partial \xi}{\partial t_2} - \frac{\partial \zeta}{\partial t_2}\frac{\partial \xi}{\partial t_1}$. En outre, le champ de vecteur X_{F_1} est tangent à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_{-1}$ au point double correspondant à $\alpha = \infty$. L'involution $\sigma : (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \longmapsto (z_1, -z_2, z_3, -z_4, z_5)$ sur B agit sur les paramètres libres comme suit, $\sigma : (t, \alpha, \beta, \gamma, \theta) \longmapsto (-t, -\alpha, -\beta, -\gamma, \theta)$ et donc $\mathcal{C}_1 = \sigma\mathcal{C}_{-1}$. Géométriquement, celà signifie que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_{-1}$ sont déduites l'une de l'autre par une translation dans la surface abélienne $\widetilde{B}$.

Remarque 5.2. On peut déduire les solutions (25) à partir des développements (31) et du changement de variables : $q_1 = \sqrt{z_1}$, $q_2 = z_2$, $p_1 = \frac{z_4}{q_1}$, $p_2 = z_3$. La fonction z_1 a un pôle simple le long du diviseur $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$ et un zéro double le long de la surface de Riemann de genre 7 définissant un revêtement double de $\widetilde{A}$ ramifié le long de $\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_{-1}$.

6 – La toupie de Goryachev-Chaplygin et le réseau de Toda

Nous allons voir dans cette section que le réseau de Toda et la toupie de Goryachev-Chaplygin sont intimement liés et font partie d'un système intégrable de sept variables. Ce système est algébriquement complètement intégrable tandis que celui du réseau de Toda et de la toupie de Goryachev-Chaplygin sont généralement algébriquement complètement intégrable.

– Un système intégrable de sept variables

Considèrons le système diffèrentielles [6] de sept variables $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = -8x_7, & \dot{x}_4 = 4x_2x_5 - x_7, \\ \dot{x}_2 = 4x_5, & \dot{x}_5 = x_6 - 4x_2x_4, \\ \dot{x}_3 = 2(x_4x_7 - x_5x_6), & \dot{x}_6 = -x_1x_5 + 2x_2x_7, \\ \multicolumn{2}{c}{\dot{x}_7 = x_1x_4 - 2x_2x_6 - 4x_3.} \end{array} \tag{6.1}$$

Ce système admet les cinq intègrales premières suivantes :

$$\begin{array}{ll} F_1 = x_1 - 8x_4 + 4x_2^2 = 6c_1, & F_3 = x_3 + x_4^2 + x_5^2 = c_3, \\ F_2 = x_1x_2 + 4x_6 = 2c_2, & F_4 = x_2x_3 + x_4x_6 + x_5x_7 = c_4, \\ \multicolumn{2}{c}{F_5 = x_6^2 + x_7^2 - x_1x_3 = c_5,} \end{array} \tag{6.2}$$

où c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 désignent des constantes génériques. Il est complètement intégrable et la structure symplectique est définie par le crochet de Poisson $\{F, H\} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, J\frac{\partial H}{\partial x}\right\rangle = \sum_{k,l=1}^{7} J_{kl}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial H}{\partial x_k}$, où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & x_7 & -x_6 & B & -C \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x_5 & \frac{1}{4}x_4 & -\frac{1}{2}x_7 & \frac{1}{2}x_6 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3x_5 & x_3x_4 \\ -x_7 & \frac{1}{2}x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x_3 \\ x_6 & -\frac{1}{2}x_4 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x_3 & 0 \\ -B & \frac{1}{2}x_7 & x_3x_5 & 0 & -\frac{1}{2}x_3 & 0 & -x_2x_3 \\ C & -\frac{1}{2}x_6 & -x_3x_4 & \frac{1}{2}x_3 & 0 & x_2x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A \equiv 2x_4x_7 - 2x_5x_6, \quad B \equiv x_1x_5 + 2x_2x_7, \quad C \equiv x_1x_4 + 2x_2x_6,$$

est une matrice antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi. Le système (35) peut s'écrire sous la forme

$$\dot{x} = J\frac{\partial H}{\partial x}, \quad H = F_1, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^\top.$$

Les deux intégrales F_1 et F_2 sont en involution : $\{F_1, F_2\} = 0$, tandis que F_3, F_4 et F_5 sont des fonctions de Casimir : $J\frac{\partial F_k}{\partial x} = 0$, $k = 3, 4, 5$. Le système (35) admet des solutions de Laurent dépendant de six paramètres libres :

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2\varepsilon\alpha}{t} + 2\alpha^2 - 2\varepsilon(\alpha(\alpha^2 - 2c_1) + \zeta)t - (2\xi + \zeta)\alpha t^2 + o(t^3), \\ x_2 &= -\frac{\varepsilon}{2t} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha^2 - 2c_1)t - \frac{1}{4}(2\xi + \zeta)\alpha t^2 + o(t^3), \\ x_3 &= \frac{\varepsilon}{8t}(\xi + \zeta) + \frac{3\alpha}{8}(\xi + \zeta) - \frac{\varepsilon}{8}((5\alpha^2 - c_1)(\xi + \zeta) - 8(2c_3\alpha + c_4))t + o(t^2), \\ x_4 &= -\frac{1}{8t^2} + \frac{1}{8}(\alpha^2 - 2c_1) + \frac{\varepsilon}{8}(2\xi + \zeta)t + o(t^2), \\ x_5 &= \frac{\varepsilon}{8t^2} - \frac{\varepsilon}{8}(\alpha^2 - 2c_1) - \frac{1}{8}(2\xi + 3\zeta)t + o(t^2), \\ x_6 &= \frac{\alpha}{4t^2} + \frac{1}{4}(2\xi - (\alpha^2 - 2c_1)\alpha + \zeta) - \frac{\varepsilon\alpha}{4}(2\xi + 3\zeta)t + o(t^2), \\ x_7 &= -\frac{\varepsilon\alpha}{4t^2} + \frac{\varepsilon}{4}(\alpha(\alpha^2 - 2c_1) + \zeta) + \frac{\alpha}{4}(2\xi + \zeta)t + o(t^2), \end{aligned} \tag{6.3}$$

où $\varepsilon = \pm i$, $\xi(\alpha) = 2\alpha^3 - 3c_1\alpha + c_2$ et les paramètres α, ζ appartiennent à une courbe hyperelliptique de genre 2,

$$\mathcal{H} : \zeta^2 = (2\alpha^3 - 3c_1\alpha + c_2)^2 - 4(4c_3\alpha^2 + 4c_4\alpha + c_5). \tag{6.4}$$

La convergence des séries (37) est garantie par la méthode des fonctions majorantes. Les séries de Laurent du système (35) sont donc paramétrées par deux copies $\mathcal{H}_{+i}$ et $\mathcal{H}_{-i}$ (respectivement pour $\varepsilon = i$ et $\varepsilon = -i$) d'une même courbe hyperelliptique $\mathcal{H}$ (38) de genre 2. En utilisant un raisonnement similaire à celui fait précédemment, on montre que le plongement $\mathcal{D}$ de $\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{-i}$ se fait dans un hyperplan de l'espace projectif $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$ via les fonctions de l'espace

$$\mathcal{L}(2(\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{-i})) = \{1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{14}\} \oplus \{x_5, x_7, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{15}\},$$

où x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, sont données ci-dessus et

$$\begin{aligned}
x_8 &\equiv x_2x_3 = \frac{1}{16t^2}(\xi+\zeta) - \frac{\varepsilon}{4t}\alpha(\xi+\zeta) + o(1),\\
x_9 &\equiv x_1x_3 = \frac{1}{4t^2}\alpha(\xi+\zeta) - \frac{\varepsilon}{2t}\alpha^2(\xi+\zeta) + o(1),\\
x_{10} &\equiv x_1x_4 + 2x_2x_6 = -\frac{1}{2t^2}\alpha^2 - \frac{\varepsilon}{2t}(\xi+\zeta) + o(1),\\
x_{11} &\equiv \frac{1}{4}[x_1, x_2] = x_1x_5 + 2x_2x_7 = \frac{\varepsilon}{2t^2}\alpha^2 + \frac{\zeta}{2t} + o(1),\\
x_{12} &\equiv \frac{1}{2}\dot{x_3} = -x_5x_6 + x_4x_7 = -\frac{\varepsilon}{16t^2}(\xi+\zeta) + o(1),\\
x_{13} &\equiv \frac{1}{2}[x_2, x_3] = x_2x_{12} - 2x_3x_5 = -\frac{\varepsilon}{16t^2}\alpha(\xi+\zeta) + o\left(\frac{1}{t}\right),\\
x_{14} &\equiv x_3^2 = -\frac{1}{64t^2}(\xi+\zeta)^2 + \frac{3\varepsilon}{32t}\alpha(\xi+\zeta)^2 + o(1),\\
x_{15} &\equiv \frac{1}{2}[x_1, x_3] = x_1x_{12} + 4x_3x_7 = -\frac{\varepsilon}{2t^2}\alpha^2(\xi+\zeta) + o\left(\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}$$

où $[s_j, s_k] = \dot{s_j}s_k - s_j\dot{s_k}$ est le wronskien de s_j et s_k. En plongeant les courbes $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$ dans un hyperplan de $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$, on constate qu'elles ont un seul point en commun en lesquel $\mathcal{H}_i$ et tangente à $\mathcal{H}_{-i}$. Au voisinage de $\alpha = \infty$, la courbe $\mathcal{H}$ possède deux points en lesquel : $\xi + \zeta = 4\alpha^3 + o(\alpha)$, en choisissant le signe $+$ pour ζ et $\xi + \zeta = \frac{4c_3\alpha^2 + 4c_4\alpha + c_5}{\alpha^3}$ + termes d'ordre inférieur, en choisissant le signe - pour ζ. Dès lors, en choisissant le signe + pour ζ et en divisant le vecteur $(1, x_1, \ldots, x_{15})$ par $x_{14} = x_3^2$, le point correspondant est envoyé vers le point $[0 : \cdots : 1 : 0] \in \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$, lequel est indépendant de ε. Le choix du signe - pour ζ mène a deux points différents, en tenant compte du signe de ε. Par conséquent, le diviseur $\mathcal{D}$ obtenu est de genre 5 et donc $2\mathcal{D}$ est de genre 17 satisfaisant ainsi à la relation : *genre géométrique de* $2\mathcal{D} = N + 2$, c-à-d., $2\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^{15}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{g-2}(\mathbb{C})$. Comme précédemment, on montre que la variété affine

$$B = \bigcap_{k=1}^{5} \{x : F_k(z) = c_k\} \subset \mathbb{C}^7, \tag{6.5}$$

définie en égalant les invariants F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, à des constantes génériques, se complète en une variété abélienne $\widetilde{B}$ par l'adjonction du diviseur $\mathcal{D} = \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{-i}$. La variété $\widetilde{B}$ est munie de deux champs de vecteurs commutants et linéairement indépendants en chaque point. Soient dt_1 et dt_2 deux 1-formes holomorphes sur $\widetilde{B}$ correspondant respectivement aux champs de vecteurs X_{F_1} et X_{F_2}. En posant $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $\Delta = \frac{\partial y_2}{\partial t_1}\frac{\partial y_1}{\partial t_2} - \frac{\partial y_2}{\partial t_2}\frac{\partial y_1}{\partial t_1}$, on obtient les formes différentielles

$$\omega_1 = dt_1|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_2}dy_2 - \frac{\partial y_2}{\partial t_2}dy_1\right) = \frac{a\alpha}{\zeta}d\alpha,$$
$$\omega_2 = dt_2|_{\mathcal{H}_\varepsilon} = -\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial y_1}{\partial t_1}dy_2 - \frac{\partial y_2}{\partial t_1}dy_1\right) = \frac{b}{\zeta}d\alpha,$$

où a et b sont des constantes. Les points où le champ de vecteurs X_{F_1} est tangent aux courbes $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$ sur $\widetilde{B}$ sont fournis par les zéros de la forme ω_2. Le champ X_{F_1} est tangent à $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$ au point double en lequel les courbes $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$ se touchent; ce point correspond à $\alpha = \infty$. L'involution $\sigma : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, x_4, -x_5, x_6, -x_7)$ sur B agit sur les paramètres libres comme suit $\sigma : (t, \alpha, \zeta, \varepsilon, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \longmapsto (-t, \alpha, \zeta, -\varepsilon, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$. D'où $\mathcal{H}_i = \sigma\mathcal{H}_{-i}$ et géométriquement cela signifie que $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$ sont déduites l'une de l'autre par une translation dans la varété abélienne $\widetilde{B}$. Par conséquent, on a

Proposition 6.1. *Le système différentiel* (35) *est algébriquement complètement intégrable. La variété affine B* (39) *admet un plongement dans un hyperplan de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^{15}(\mathbb{C})$. Génériquement, cette variété forme la partie affine d'une surface abélienne $\widetilde{B}$. Le diviseur réduit à l'infini $\widetilde{B}\backslash B = \mathcal{H}_i + \sigma\mathcal{H}_{-i}$ a deux composantes $\mathcal{H}_i$ et $\sigma\mathcal{H}_{-i}$ d'une même courbe hyperelliptique $\mathcal{H}$(38) de genre* 2 *et ces dernières ont un seul point en commun en lesquel $\mathcal{H}_i$ est tangente à $\sigma\mathcal{H}_{-i}$*

– La toupie de Goryachev-Chaplygin

Dans le cas particulier où $c_4 = c_5 = 0$, on obtient le système différentiel décrivant la toupie de Goryachev-Chaplygin

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= 3m_2m_3, & \dot{\gamma}_1 &= 4m_3\gamma_2 - m_2\gamma_3,\\ \dot{m}_2 &= -3m_1m_3 - 4\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= m_1\gamma_3 - 4m_3\gamma_1,\\ \dot{m}_3 &= 4\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2, \end{aligned} \tag{6.6}$$

et admet les quatre invariants suivants :

$$\begin{aligned} H_1 &= m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2 - 8\gamma_1,\\ H_2 &= (m_1^2 + m_2^2)m_3 + 4m_1\gamma_3,\\ H_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2,\\ H_4 &= m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3. \end{aligned}$$

En effet, considérons le morphisme

$$(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \longmapsto (m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

où $\gamma_3 = \sqrt{x_3}$, $m_1 = \frac{x_6}{\gamma_3}$, $m_2 = \frac{x_7}{\gamma_3}$, $m_3 = x_2$, $\gamma_1 = x_4$, $\gamma_2 = x_5$. Notons que x_3 a un pôle simple sur le diviseur $\mathcal{D} = \mathcal{H}_{+i} + \mathcal{H}_{-i}$ et un zéro double sur une courbe hyperelliptique de genre 2 définissant un revêtement double de $\widetilde{B}$ ramifié le long de $\mathcal{D}$. Puisque $c_5 = 0$, l'invariant $F_5 = 0$ devient $x_1 x_3 = x_6^2 + x_7^2$. Or $x_3 = \gamma_3^2$, $x_6 = m_1\gamma_3$ et $x_7 = m_2\gamma\gamma_3$, donc $x_1 = m_1^2 + m_2^2$. La transformation inverse s'écrit explicitement

$$(x_1, \ldots, x_7) = (m_1^2 + m_2^2, m_3, \gamma_3^2, \gamma_1, \gamma_2, m_1\gamma_3, m_2\gamma_3). \tag{6.7}$$

En remplaçant ces variables dans les équations $F_1 = 6c_1$, $F_2 = 2c_2$, $F_3 = c_3$, $F_4 = c_4$ (36), on obtient

$$\begin{aligned}
&F_1 = x_1 - 8x_4 + 4x_2^2 = 6c_1 \Longleftrightarrow F_1 = m_1^2 + m_2^2 + 4m_3^2 - 8\gamma_1 = H_1,\\
&F_2 = x_1x_2 + 4x_6 = 2c_2 \Longleftrightarrow F_2 = (m_1^2 + m_2^2)m_3 + 4m_1\gamma_3 = H_2,\\
&F_3 = x_3 + x_4^2 + x_5^2 = c_3 \Longleftrightarrow F_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = H_3,\\
&F_4 = x_2x_3 + x_4x_6 + x_5x_7 = c_4 \Longleftrightarrow F_4 = \gamma_3 H_4,\\
&F_5 = x_6^2 + x_7^2 - x_1x_3 = c_5 \Longleftrightarrow F_5 = m_1^2\gamma_3^2 + m_2^2\gamma_3^2 - (m_1^2 + m_2^2)\gamma_3^2 = 0.
\end{aligned}$$

Par hypothèse $F_4 = c_4 = 0$ et $F_5 = c_5 = 0$. On a vu ci-dessus que $F_5 = 0$ et comme $F_4 = \gamma_3 H_4$, alors on a aussi (en dehors de $\gamma_3 = 0$), $H_4 = 0$. On a donc obtenu les invariants pour la toupie de Goryachev-Chaplygin. En utilisant les variables (41) et les équations (35), on obtient

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_2 = 4x_5 \Longleftrightarrow \dot{m}_3 = 4\gamma_2,\\
&\dot{x}_3 = 2(x_4x_7 - x_5x_6) \Longleftrightarrow \dot{\gamma}_3 = m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2,\\
&\dot{x}_4 = 4x_2x_5 - x_7 \Longleftrightarrow \dot{\gamma}_1 = 4m_3\gamma_2 - m_2\gamma_3,\\
&\dot{x}_5 = x_6 - 4x_2x_4 \Longleftrightarrow \dot{\gamma}_2 = m_1\gamma_3 - 4m_3\gamma_1,\\
&\dot{x}_6 = -x_1x_5 + 2x_2x_7 \Longleftrightarrow \dot{m}_1 = 3m_2m_3 \qquad \left(\text{car } \sum_{j=1}^{3} m_j\gamma_j = 0\right),\\
&\dot{x}_7 = x_1x_4 - 2x_2x_6 - 4x_3 \Longleftrightarrow \dot{m}_2 = -3m_1m_3 - 4\gamma_3 \qquad \left(\text{car } \sum_{j=1}^{3} m_j\gamma_j = 0\right).
\end{aligned}$$

Et ces équations ne sont autres que celles décrivant le mouvement dans le cas de la toupie de Goryachev-Chaplygin. Le système de Goryachev-Chaplygin admet deux familles de solutions de Laurent dépendant de quatre paramètres libres :

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \frac{u}{t^{3/2}} - \frac{3uv}{t^{1/2}} + \frac{3\varepsilon v + 3b_1u^2 - 15u^2v^2}{2u}t^{1/2} + o(t^{3/2}),\\
m_2 &= -\frac{\varepsilon u}{t^{3/2}} - \frac{3uv}{t^{1/2}} - \frac{\varepsilon(3b_1u^2 - 15u^2v^2) + u}{2u}t^{1/2} + o(t^{3/2}),\\
m_3 &= -\frac{\varepsilon}{2t} + v + \varepsilon(b_1 - 2v^2)t - \frac{16b_3u^4 + 5v^2}{4\varepsilon u^2}t^2 + \cdots,\\
\gamma_1 &= -\frac{1}{8t^2} - \frac{b_1 - 2v^2}{4} - \frac{16b_3u^4 - 3v^2}{8u^2}t + \cdots,\\
\gamma_2 &= \frac{\varepsilon}{8t^2} + \frac{\varepsilon(b_1 - 2v^2)}{4} - \frac{16b_3u^4 + 5v^2}{8\varepsilon u^2}t + \cdots,\\
\gamma_3 &= -\frac{v}{2ut^{1/2}} + \frac{3v^2}{2\varepsilon u}t^{1/2} - \frac{\varepsilon(b_1v - 11v^3) + 16b_3u^2}{4\varepsilon u}t^{3/2} + \cdots,
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

où $\varepsilon = \pm i$. Soit A la variété invariante

$$
A = \{x : H_1(x) = 6b_1, H_2(x) = 2b_2, H_3(x) = b_3, H_4(x) = 0\}, \tag{6.9}
$$

définie par l'intersection des constantes du mouvement où b_1, b_2, b_3 sont des constantes génériques. En substituant ces développements dans les équations définissant la varété A, on obtient une courbe $\mathcal{C}$ de genre 4 :

$$
\mathcal{C} : 16b_3u^4 + \varepsilon u^2(b_2 + 6b_1v - 16v^3) - v^2 = 0.
$$

Les solutions de Laurent du système (40) sont donc paramétrées par deux copies $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}_{-i}$ d'une même courbe $\mathcal{C}$ de genre 4. Dès lors, [40] :

THÉORÈME 6.1. *Pour la toupie de Goryachev-Chaplygin, la surface invariante A(43) se complète en un revêtement double cyclique, noté $\overline{A}$, de la variété jacobienne d'une courbe de genre 2 ramifié le long du diviseur $\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_{-i}$ où $\mathcal{H}_{\pm i}$ est birationellement équivalent à la courbe hyperelliptique $\mathcal{H}$(38) de genre 2. En outre, $\overline{A}$ est une surface lisse sauf au point double (un tacnode) d'intersection des courbes $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_{-i}$. L'équation analytique locale autour de cette singularité du type A_3 est $x^2+y^2+z^4 = 0$ où x, y, z sont des coordonnées locales appropriées. La résolution $\widetilde{A}$ de $\overline{A}$ est une surface de type général ayant les invariants suivants : charactéristique d'Euler de $\widetilde{A} = 1$ et genre géométrique de $\widetilde{A} = 2$.*

– Le réseau de Toda

On considère le hamiltonien du réseau de Toda [43] sous la forme

$$
H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} y_j^2 + \sum_{j=1}^{3} e^{x_j - x_{j+1}}, \quad x_{3+j} = x_j.
$$

En utilisant les transformations de Flaschka [9] : $z_j = e^{x_j - x_{j+1}}$, $z_{j+j} = -y_j$, le système de Toda s'écrit explicitement

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(z_5 - z_4), & \dot{z}_4 &= z_3 - z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_2(z_6 - z_5), & \dot{z}_5 &= z_1 - z_2, \\ \dot{z}_3 &= z_3(z_4 - z_6), & \dot{z}_6 &= z_2 - z_3, \end{aligned} \tag{6.10}$$

et admet les quatre intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned} G_1 &= z_1 z_2 z_3 = a_1, \\ G_2 &= z_4 + z_5 + z_6 = a_2 = 0, \\ G_3 &= -z_1 - z_2 - z_3 + \frac{1}{2}(z_4^2 + z_5^2 + z_6^2) = a_3, \\ G_4 &= z_1 z_6 + z_2 z_4 + z_3 z_5 + z_4 z_5 z_6 = a_4. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Notons que sans restreindre la généralité, on pourra choisir $a_2 = 0$. Le système (44) est complètement intégrable et la structure hamiltonienne est définie par le crochet de Poisson $\{F, H\} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial z}, J \frac{\partial H}{\partial z} \right\rangle = \sum_{k,l=1}^{6} J_{kl} \frac{\partial F}{\partial z_k} \frac{\partial H}{\partial z_l}$, où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -z_1 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -z_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & z_3 & 0 & -z_3 \\ z_1 & 0 & -z_3 & 0 & 0 & 0 \\ -z_1 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_2 & z_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

une matrice antisymétrique à éléments polynomiaux satisfaisant à l'identité de Jacobi. Le système (44) est algébriquement intégrable et admet des solutions de Laurent dépendant de cinq paramètres libres :

$1^{\text{ère}}$ famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{t^2} + w - \frac{u+v}{4} t + \cdots, \quad z_2 = ut - u(\beta - \gamma)t^2 + \cdots, \\ z_3 &= vt + v(\beta - \gamma)t^2 + \cdots, \quad z_4 = \frac{1}{t} + \beta - wt + \frac{u+5v}{8} t^2 + \cdots, \\ z_5 &= -\frac{1}{t} + \beta + wt - \frac{5u+v}{8} t^2 + \cdots, \\ z_6 &= \gamma + \frac{u-v}{2} t^2 + \frac{(u+v)(\gamma - \beta)}{3} t^3 + \cdots \end{aligned}$$

$(**)$ $2^{\text{ème}}$ famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned}
z_1 &= vt + v(\beta-\gamma)t^2 + \cdots, & z_2 &= \frac{1}{t^2} + w - \frac{u+v}{2}t + \cdots,\\
z_3 &= ut - u(\beta-\gamma)t^2 + \cdots, & z_4 &= \gamma + \frac{u-v}{2}t^2 + \cdots,\\
z_5 &= \frac{1}{t} + \beta - wt + \cdots, & z_6 &= -\frac{1}{t} + \beta + wt + \cdots
\end{aligned}$$

$(***)$ $3^{\text{ème}}$ famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned}
z_1 &= ut - u(\beta-\gamma)t^2 + \cdots, & z_2 &= vt + v(\beta-\gamma)t^2 + \cdots,\\
z_3 &= \frac{1}{t^2} + w + \cdots, & z_4 &= -\frac{1}{t} + \beta + wt + \cdots,\\
z_5 &= \gamma + \frac{u-v}{2}t^2 + \cdots, & z_6 &= \frac{1}{t} + \beta - wt + \cdots
\end{aligned}$$

En substituant ces développements dans les équations (45), on obtient trois copies $\mathcal{D}_j$, $j = 1, 2, 3$ (correspondant chacune à une famille de solutions ci-dessus) d'une courbe hyperelliptique de genre 2, avec

$$\begin{aligned}
&u = \frac{c_1}{u} - P(\gamma), \qquad P(\gamma) = \gamma^3 - 2c_2\gamma^2 + (2c_2^2 - c_3)\gamma - c_4, \qquad v = \frac{c_1}{u},\\
&\beta = c_2 - \frac{1}{2}\gamma, \qquad w = \frac{1}{4}\gamma^2 - \frac{c_2}{3}\gamma + \frac{c_2^2 - c_3}{3}, \quad u + v = \pm\sqrt{P^2(\gamma) + 4c_1}.
\end{aligned}$$

Les séries de Laurent ci-dessus sont donc paramétrées par trois copies $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ d'une courbe hyperelliptique de genre 2. Il n'est pas difficile de montrer que les équations (44) se linéarisent sur la variété jacobienne d'une courbe hyperelliptique de genre 2 et que la variété affine définie par les constantes (45) se complète en cette variété jacobienne par l'adjonction des trois copies $\mathcal{D}_j$ de cette courbe hyperelliptique de genre 2. Ces courbes ont chacun un point double en commun (tacnode) avec l'autre et le flot (44) est tangent en ce point à chaque courbe $\mathcal{D}_j$. En outre l'involution $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \longmapsto (z_2, z_1, z_3, z_6, z_5, z_4)$ sur la variété invariante agit sur les paramètres libres comme suit : $(u, v, w, t, \beta, \gamma) \longmapsto (-v, -u, w, -t, \beta, \gamma)$, $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) \longmapsto (\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3)$ et se ramène à une reflexion autour de l'origine sur la variété jacobienne. Le plongement de cette variété jacobienne se fait dans l'espace projectif $\mathbb{P}^8(\mathbb{C})$ à l'aide des fonctions de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3)$ dont une base est fournie à l'aide des solutions de Laurent par

$$(1, z_5, z_6, z_1 + z_4z_5, z_2 + z_5z_6, z_2z_4 - z_5(z_1 + z_4z_5), z_1z_2, z_2z_3, z_1z_3).$$

Considérons maintenant le cas particulier $c_3 = c_4 = 0$ du système (36). En vue de voir la relation avec le système correspondant au réseau de Toda, considérons le changement de variables suivant :

$$
\begin{aligned}
&x_1 = z_1 + z_4 z_5, \quad x_2 = -\frac{i}{2} z_6, \quad x_3 = -\frac{1}{16} z_2 z_3,\\
&x_4 = -\frac{1}{8}(z_2 + z_3), \quad x_5 = \frac{i}{8}(z_2 - z_3),\\
&x_6 = -\frac{i}{8}(z_2 z_4 + z_3 z_5), \quad x_7 = -\frac{1}{8}(z_2 z_4 - z_3 z_5),
\end{aligned}
\tag{6.12}
$$

et on peut évidemment exprimer les variables $z_1, \ldots, z_6$, de manière rationnelle en termes de $x_1, \ldots, x_7$ (voir ci-dessous). En remplaçant ces variables dans les constantes (36), on obtient

$$
\begin{aligned}
&F_1 = x_1 - 8x_4 + 4x_2^2 \Longleftrightarrow F_1 = -G_3 + \frac{1}{2}(z_4 + z_5 - z_6) G_2,\\
&F_2 = x_1 x_2 + 4x_6 \Longleftrightarrow F_2 = -\frac{i}{2} G_4,\\
&F_3 = x_3 + x_4^2 + x_5^2 \Longleftrightarrow F_3 = 0,\\
&F_4 = x_2 x_3 + x_4 x_6 + x_5 x_7 \Longleftrightarrow F_4 = \frac{i}{32} G_2,\\
&F_5 = x_6^2 + x_7^2 - x_1 x_3 \Longleftrightarrow F_5 = \frac{1}{16} G_1.
\end{aligned}
$$

Par hypothèse $F_3 = c_3 = 0$ et $F_4 = c_4 = 0$. On a vu ci-dessus que $F_3 = 0$ et comme $F_4 = \frac{i}{32} G_2$, on doit avoir aussi, $G_2 = 0$. Dès lors,

$$
\begin{aligned}
G_1 &= 16F_5 = 16c_5, \qquad & G_2 &= -32iF_4 = 0,\\
G_3 &= -F_1 = -6c_1, \qquad & G_4 &= 2iF_2 = 4ic_2.
\end{aligned}
$$

On a donc obtenu les invariants pour le réseau de Toda. Les équations différentielles décrivant ce problème s'obtiennent à l'aide de la transformation inverse de (46), c-à-d.,

$$
(z_1, \ldots, z_6) \longmapsto \left(-\frac{c_5}{x_3}, -4(x_4 + ix_5), -4(x_4 - ix_5), \frac{x_7 - ix_6}{x_4 + ix_5}, -\frac{x_7 + ix_6}{x_4 - ix_5}, 2ix_2 \right).
$$

7 – La toupie de Kowalewski

Les équations décrivant ce problème [1, 5, 22, 23] s'écrivent sous la forme du champ de vecteurs hamiltonien suivant :

$$
\dot{x} = J \frac{\partial H}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\intercal}, \tag{7.1}
$$

avec $H = \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2\right) + m_3^2 + 2\gamma_1$, l'hamiltonien et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -m_3 & m_2 & 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ m_3 & 0 & -m_1 & \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système différentiel admet quatre intégrales premières

$$\begin{aligned} &H_1 \equiv H, \\ &H_2 = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3, \\ &H_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \\ &H_4 = \left(\left(\frac{m_1 + im_2}{2}\right)^2 - (\gamma_1 + i\gamma_2)\right)\left(\left(\frac{m_1 - im_2}{2}\right)^2 - (\gamma_1 - i\gamma_2)\right). \end{aligned}$$

Le second champ de vecteurs

$$\dot{x} = J\frac{\partial H_4}{\partial x}, \quad x = (m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^{\intercal}, \tag{7.2}$$

est quartique. Les intégrales premières H_1 et H_4 sont en involution, tandis que H_1 et H_3 sont triviaux. Soit M_c la variété affine définie par l'intersection de ces quatre constantes du mouvenent, c-à-d.,

$$M_c = \bigcap_{k=1}^{4} \left\{x \in \mathbb{C}^6 : H_k(x) = c_k\right\}, \quad c_3 = 1.$$

En étudiant l'intégrabilité algébrique du système hamiltonien de Kowalewski, on obtient les résultats suivants [23] :

a) Le système (47), admet deux familles de solutions en séries de Laurent méromorphes

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)} t^{k-1}, \quad \Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^{(k)} t^{k-2},$$

dépendant de cinq paramètres libres tels que : les coefficients $M^{(0)}$ et $\Gamma^{(0)}$ satisfont au système non-linéaire

$$\begin{aligned} &M^{(0)} + \left[M^{(0)}, \Lambda M^{(0)}\right] + \left[\Gamma^{(0)}, L\right] = 0, \\ &2\Gamma^{(0)} + \left[\Gamma^{(0)}, \Lambda M^{(0)}\right] = 0, \end{aligned} \tag{7.3}$$

et dépendent d'une variable libre α. Tandis que $M^{(k)}$ et $\Gamma^{(k)}$ satisfont aux systèmes linéaires

$$(\mathcal{M}-kI)\begin{pmatrix} M^{(k)} \\ \Gamma^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k=1 \\ \begin{bmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(M^{(i)},\Lambda M^{(k-i)}\right) \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1}\left(\Gamma^{(i)},\Lambda M^{(k-i)}\right) \end{bmatrix} & \text{si} \quad k\geq 2 \end{cases}$$

où $\mathcal{M}$ est la matrice jacobienne de (49). Ces systèmes fournissent une variable libre à chacun des niveaux $k=1,2,3$ et 4. Explicitement, on a

$(*)$ 1$^{\text{ère}}$ famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{\alpha}{t} + i\left(\alpha^2-2\right)\beta + \circ(t), & \gamma_1(t) &= \frac{1}{2t^2} + \circ(t), \\ m_2(t) &= \frac{i\alpha}{t} - \alpha^2\beta + \circ(t), & \gamma_2(t) &= \frac{i}{2t^2} + \circ(t), \\ m_3(t) &= \frac{i}{t} + \alpha\beta + \circ(t), & \gamma_3(t) &= \frac{\beta}{t} + \circ(t). \end{aligned}$$

$(**)$ 2$^{\text{ème}}$ famille de solutions en séries de Laurent méromorphes :

$$\begin{aligned} m_1(t) &= \frac{\alpha}{t} - i\left(\alpha^2-2\right)\beta + \circ(t), & \gamma_1(t) &= \frac{1}{2t^2} + \circ(t), \\ m_2(t) &= -\frac{i\alpha}{t} - \alpha^2\beta + \circ(t), & \gamma_2(t) &= -\frac{i}{2t^2} + \circ(t), \\ m_3(t) &= -\frac{i}{t} + \alpha\beta + \circ(t), & \gamma_3(t) &= \frac{\beta}{t} + \circ(t). \end{aligned}$$

Les diviseurs des pôles des fonctions M et Γ sont deux surfaces de Riemann

$$\mathcal{D}_\epsilon : \beta^4\left(\alpha^2-1\right)^2 - \left(c_1\beta^2 - 2\epsilon c_2\beta - 1\right)\left(\alpha^2-1\right) + c_4 = 0,\ \epsilon^2 = -1,$$

irréductibles isomorphes et chacune de genre 3. Ce sont deux revêtements

$$\mathcal{D}_\epsilon \longrightarrow \mathcal{D}_\epsilon^0, \quad (\alpha, u, \beta) \longmapsto (u, \beta), \tag{7.4}$$

doubles ramifiés en quatre points de courbes elliptiques :

$$\mathcal{D}_\epsilon^0 : u^2 = \left(c_1\beta^2 - 2\epsilon c_2\beta - 1\right)^2 - 4c_4\beta^4.$$

b) Posons $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\epsilon=i} + \mathcal{D}_{\epsilon=-i}$. Alors l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ des fonctions ayant au plus un pôle simple est engendré par les huit fonctions suivantes:

$$\begin{aligned} &f_0 = 1,\ f_1 = m_1,\ f_2 = m_2,\ f_3 = m_3,\ f_4 = \gamma_3,\ f_5 = f_1^2 + f_2^2, \\ &f_6 = 4f_1f_4 - f_3f_5,\ f_7 = (f_2\gamma_1 - f_1\gamma_2) f_3 + 2f_4\gamma_2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

En outre, l'application $\mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$, définie par

$$p = (\alpha, u, \beta) \longmapsto \lim_{t\to 0} t(1, f_1(p), \ldots, f_7(p)) = \left(0, f_1^{(0)}(p), \ldots, f_7^{(0)}(p)\right),$$

plonge $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ de telle façon que $\mathcal{D}_{\epsilon=i}$ intersecte $\mathcal{D}_{\epsilon=-i}$ transversalement en quatre points à l'infini $\left(\alpha = \pm 1,\ u = \pm\beta^2\sqrt{c_1^2 - 4c_4},\ \beta = \infty\right)$ et que le genre géométrique de $\mathcal{D}$ est 9.

c) Les orbites du champ de vecteurs (47) passant à travers $\mathcal{D}$ forment une surface lisse Σ tout le long de $\mathcal{D}$ tel que : $\Sigma\backslash\mathcal{D} \subset M_c$. En outre, la variété $\widetilde{M}_c = M_c \cup \Sigma$ est lisse, compacte et connexe.

d) Le diviseur $2\mathcal{D}$ est projectivement normal et possède un plongement lisse dans $\mathbb{P}^{17}(\mathbb{C})$. En particulier, les séries solutions convergent partout.

e) Les champs de vecteurs (47) et (48) se prolongent de façon holomorphe et demeurent indépendants sur la variété $\widetilde{M}_c$. La variété $\widetilde{M}_c$ est une surface abélienne sur laquelle les flots hamiltoniens (47) et (48) se linéarisent.

f) Il existe sur la surface abélienne $\widetilde{M}_c$ deux différentielles holomorphes dt_1 et dt_2 telles que :

$$dt_{1|\mathcal{D}_\epsilon} = \omega_1 = \frac{k_1\left(\alpha^2 - 1\right)\beta^2 d\beta}{\alpha u}, \qquad dt_{2|\mathcal{D}_\epsilon} = \omega_2 = \frac{k_2 d\beta}{\alpha u},$$

où $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ et ω_1, ω_2 sont des différentielles holomorphes sur $\mathcal{D}_\epsilon$. Le champ de vecteur (47)(resp. (48)) est régulier le long du diviseur $\mathcal{D}$, transversal en tout point $\beta \neq 0$ (resp. $\beta \neq \infty$) et doublement tangent en $\beta = 0$ (resp. $\beta = \infty$). L'espace des différentielles holomorphes sur le diviseur $\mathcal{D}$ est $\left\{f_1^{(0)}\omega_2\ f_2^{(0)}\omega_2, \ldots, f_7^{(0)}\omega_2\right\} \oplus \{\omega_1, \omega_2\}$, où $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots f_7^{(0)}$ sont les premiers coefficients des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_7 \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ (51) et le plongement de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{P}^7(\mathbb{C})$ est à deux différentielles holomorphes près le plongement canonique $p = (\alpha, u, \beta) \in \mathcal{D} \longmapsto \left\{\omega_2, f_1^{(0)}\omega_2, f_2^{(0)}\omega_2, \ldots, f_7^{(0)}\omega_2\right\} \in \mathbb{P}^7(\mathbb{C})$.

g) La surface abélienne $\widetilde{M}_c$ est caractérisée comme étant la duale de la variété Prym $\left(\mathcal{D}_\epsilon/\mathcal{D}_\epsilon^0\right)$ du revêtement double (50).

8 – Flot géodésique sur le groupe $SO(n)$ pour des métriques invariantes à gauche

Considérons le flot géodésique sur le groupe $SO(n)$ pour une métrique invariante à gauche. Rappelons que pour $n = 3$, on obtient le corps solide d'Euler et ce cas est toujours algébriquement complètement intégrable. Déjà pour $n = 4$, les choses se compliquent. Les équations de Kirchhoff décrivant le mouvement d'un solide dans un fluide parfait sont un cas particulier des équations d'Euler-Arnold associées aux flots géodésiques sur les groupes de Lie pour une métrique invariante à gauche. Il s'agit du flot géodésique sur le groupe $E(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions. Le problème du mouvement d'un solide dans un fluide parfait est un cas limite du flot géodésique sur $SO(4)$, ce qui suggère que les cas intégrables de Clebsch et Lyapunov-Steklov soient limites de situations intégrables sur $SO(4)$. Par un éclatement de $SO(3)$, on peut obtenir le groupe $E(3)$ à partir de $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$. L'énergie cinétique du système est la somme de l'énergie cinétique du corps solide et de l'énergie cinétique du liquide entrainé par le corps. Dès lors, il est plus intéressant de considérer les coordonnées $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (x_4, x_5, x_6)$ avec $u \oplus v \in so(4) \simeq so(3) \oplus so(3)$. Les équations du flot géodésique s'écrivent

$$\dot{u} = \left[u, \frac{\partial H}{\partial u}\right], \qquad \dot{v} = \left[v, \frac{\partial H}{\partial v}\right],$$

pour la métrique définie par la forme quadratique

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{6} \lambda_j x_j^2 + \sum_{j=1}^{3} \mu_j x_j x_{j+3},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_6, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$ et $\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}\lambda_{45}\lambda_{56}\lambda_{64}\mu_1\mu_2\mu_3 \neq 0$ avec $\lambda_{jk} \equiv \lambda_j - \lambda_k$. Explicitement, les équations ci-dessus s'écrivent

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \lambda_{32}x_2x_3 + \mu_3x_2x_6 - \mu_2x_3x_5,\\
\frac{dx_2}{dt} &= \lambda_{13}x_3x_1 + \mu_1x_3x_4 - \mu_3x_1x_5,\\
\frac{dx_3}{dt} &= \lambda_{21}x_1x_2 + \mu_2x_1x_5 - \mu_1x_2x_4,\\
\frac{dx_4}{dt} &= \lambda_{65}x_5x_6 + \mu_3x_3x_5 - \mu_2x_2x_6,\\
\frac{dx_5}{dt} &= \lambda_{46}x_6x_4 + \mu_1x_1x_6 - \mu_3x_3x_4,\\
\frac{dx_6}{dt} &= \lambda_{54}x_4x_5 + \mu_2x_2x_4 - \mu_1x_1x_5.
\end{aligned}$$

En plus de l'énergie $H_1 = H$, le système ci-dessus admet les deux intégrales premières triviales (invariants d'orbite) suivantes :

$$H_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad H_3 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2.$$

Lors de la classification des métriques invariantes à gauche sur $SO(4)$ pour lesquels le flot géodésique est algébriquement complètement intégrable, M. Adler et P. van Moerbeke [3] ont montré qu'il y a trois types de telles métriques :

a) La forme H est la métrique de Manakov,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j<k}}^{4} \Lambda_{jk} x_{jk}^2,$$

où x_{jk} sont des coordonnées dans $so(4)$ et Λ_{jk} des coefficients satisfaisant à $\Lambda_{jk} = \frac{\beta_j - \beta_k}{\alpha_j - \alpha_k}$, $(\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C})$. Le système possède un quatrième invariant H_4 (diagonal par rapport aux x_{jk}) donc également quadratique. Pour ce cas, le système se linéarise sur une surface abélienne $\widetilde{A} = \mathbb{C}^2 / L_\Omega$ de réseau défini par la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 4 & c & b \end{pmatrix}, \ \mathrm{Im} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}),$$

avec

$$\bigcap_{j=1}^{4} \left\{ x \in \mathbb{C}^6 \ : H_j(x) = c_j \right\} = \widetilde{A} \backslash \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est une courbe de genre 9 tracée sur $\widetilde{A}$. En outre, la variété $\widetilde{A}$ peut-être identifiée à une variété de Prym [13]. Le problème du corps solide dans un fluide pour le cas de de Clebsch est un cas particulier de cette métrique.

b) La forme H satisfait à la condition

$$(\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2) = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}\lambda_{45}\lambda_{56}\lambda_{64}}{(\lambda_{46}\lambda_{32} - \lambda_{65}\lambda_{13})^2} \left(\frac{(\lambda_{23} - \lambda_{56})^2}{\lambda_{23}\lambda_{56}}, \frac{(\lambda_{31} - \lambda_{64})^2}{\lambda_{31}\lambda_{64}}, \frac{(\lambda_{12} - \lambda_{45})^2}{\lambda_{12}\lambda_{45}} \right),$$

avec

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31}\lambda_{45}\lambda_{56}\lambda_{64}}{(\lambda_{46}\lambda_{32} - \lambda_{65}\lambda_{13})^3} (\lambda_{12} - \lambda_{45})(\lambda_{23} - \lambda_{56})(\lambda_{31} - \lambda_{64}),$$

une fonction rationnelle de $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ ce qui détermine son signe. M. Adler et P. van Moerbeke [3] ont montré que le flot géodésique possède aussi un quatrième invariant H_4 quadratique et qu'en outre le système en question se linéarise sur une variété jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$ d'une courbe hyperelliptique $\mathcal{C}$ de genre 2 avec

$$\bigcap_{j=1}^{4} \left\{ x \in \mathbb{C}^6 \ : H_j(x) = c_j \right\} = \mathrm{Jac}(\mathcal{C}) \backslash \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est un diviseur de genre 17, contenant quatre translatés de la courbe $\mathcal{C}$ tracée sur la jacobienne (Θ-diviseur). Le problème du corps solide dans un fluide pour le cas de Lyapunov-Steklov est un cas particulier de cette métrique.

c) La forme H satisfait à la condition

$$\left(\mu_1^4, \mu_2^4, \mu_3^4\right) = \lambda_{13}\lambda_{46}\lambda_{21}\lambda_{54}\lambda_{32}\lambda_{65}\left(\frac{1}{\lambda_{32}\lambda_{65}}, \frac{1}{\lambda_{13}\lambda_{46}}, \frac{1}{\lambda_{21}\lambda_{54}}\right).$$

Les quantités ζ, ξ et η définies par $\zeta^2 \equiv \frac{\lambda_{46}}{\lambda_{13}}$, $\xi^2 \equiv \frac{\lambda_{54}}{\lambda_{21}}$, $\eta^2 \equiv \frac{\lambda_{65}}{\lambda_{32}}$, satisfont aux relations quadratiques $\zeta\xi + \xi\eta + \eta\zeta + 1 = 0$, $3\xi\eta + \eta - \xi + 1 = 0$. Pour ce cas, M. Adler et P. van Moerbeke [3] ont montré qu'ici le flot géodésique possède un quatrième invariant H_4 cette fois-ci quartique et qu'en outre le système en question se linéarise sur une variété abélienne $\widetilde{A} = \mathbb{C}^2/L_\Omega$ de réseau défini par la matrice des périodes

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & c \\ 0 & 12 & c & b \end{pmatrix}, \ \mathrm{Im}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} > 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{C}),$$

avec

$$\bigcap_{j=1}^{4}\left\{x \in \mathbb{C}^6 \ : H_j(x) = c_j\right\} = \widetilde{A}\backslash\mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est une courbe de genre 25 ayant huit points singuliers. $\mathcal{D}$ est très ample et projectivement normal, c'est un revêtement de degré quatre non ramifié d'une courbe de genre 7. La version lisse de cette dernière est une courbe $\mathcal{C}$ de genre 5 et c'est un revêtement double ramifié en quatre points d'une courbe hyperelliptique $\mathcal{H}$ de genre 2. En outre, il existe une courbe elliptique $\mathcal{E}$ telle que : $\widetilde{A} \oplus \mathcal{E} = \mathrm{Prym}\,(\mathcal{C}/\mathcal{H})$.

Nous avons vu que si le système des équations à étudier est algébriquement compltement intégrable, alors il possède une famille de solutions en séries de Laurent dépendant d'un nombre suffisant de paramètres libres. Or lors de l'étude du flot géodésique sur le groupe $SO(n)$ pour $n \geq 5$, ceci conduit à des calculs insurmontables même avec l'aide d'un ordinateur! L. Haine [14], a résolu ce problème dans le cas de métriques diagonales invariantes à gauche en utilisant la méthode suivante : si le flot est algébriquement complètement intégrable, alors les solutions complexes des équations différentielles sont univaluées pour toutes les données initiales. Exprimer ce fait au voisinage des données initiales correspondant aux différentes copies de $so(3)$ dans $so(n)$, suffit alors à caractériser les flots géodésiques algébriquement complètement intégrable sur $SO(n)$ pour une métrique diagonale invariante à gauche. Plus précisement, les flots géodésiques

$$\frac{dX}{dt} = [X, \Lambda.X], \quad X = (X_{jk}) \in so(n)$$

sur le groupe $SO(n)$ pour des métriques diagonales invariantes à gauche $\Lambda.X = (\lambda_{jk}X_{jk})$, sont algébriquement complètement intégrables si et seulement si $\lambda_{jk} =$

$\frac{\beta_j-\beta_k}{\alpha_j-\alpha_k}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$, $\prod_{j<k}(\alpha_j - \alpha_k) \neq 0$. Autrement dit, si et seulement si $[X, \beta] + [\alpha, \Lambda.X] = 0$, $\forall X$ avec $\alpha = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\prod_{j<k}(\alpha_j - \alpha_k) \neq 0$ ou encore ceci est équivalent à dire que pour $n \geq 5$, les seuls flots géodésiques algébriquement complètement intégrables sont ceux obtenus par M. Adler et P. van Moerbeke par la méthode des orbites de Kostant-Kirillov appliquée aux algèbres de Kac-Moody et pour $n = 4$ par la méthode des développements asymptotiques.

9 – La toupie de Lagrange

Les équations différentielles qui régissent le mouvement de la toupie de Lagrange [3, 5] s'écrivent explicitement sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda_1 \dot{m}_1 &= \lambda_1(\lambda_3 - \lambda_1) m_2 m_3 - \gamma_2, & \dot{\gamma}_1 &= \lambda_3 m_3 \gamma_2 - \lambda_1 m_2 \gamma_3, \\ \lambda_1 \dot{m}_2 &= \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3) m_1 m_3 + \gamma_1, & \dot{\gamma}_2 &= \lambda_1 m_1 \gamma_3 - \lambda_3 m_3 \gamma_1, \\ \dot{m}_3 &= 0, & \dot{\gamma}_3 &= \lambda_1(m_2 \gamma_1 - m_1 \gamma_2). \end{aligned}$$

Montrons que ce système est généralement algébriquement complètement intégrable. Ce système admet les quatre intégrales premières suivantes :

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{\lambda_1^2}{2}(m_1^2 + m_2^2) + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2} m_3^2 - \gamma_3, & H_2 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \\ H_3 &= \lambda_1(m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3), & H_4 &= \lambda_3 m_3, \end{aligned}$$

et forme un champ de vecteurs hamiltonien intégrable au sens de Liouville. La strucure de Poisson est donnée par $\{m_i, m_j\} = -\epsilon_{ijk} m_k$, $\{m_i, \gamma_j\} = -\epsilon_{ijk}\gamma_k$, $\{\gamma_i, \gamma_j\} = 0$, où $1 \leq i, j, k \leq 3$ et ϵ_{ijk} est le tenseur antisymétrique total pour lequel on a $\epsilon_{ijk} = 1$. Soit

$$M_c = \{(m_1, m_2, m_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{C}^6 : H_1 = c_1, H_2 = 1, H_3 = c_3, H_4 = c_4\},$$

la variété affine définie par l'intersection des constantes du mouvement et soit $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ le groupe des rotations défini par le flot du champ de vecteurs engendré par H_4,

$$\dot{m}_1 = m_2, \quad \dot{m}_2 = -m_1, \quad \dot{m}_3 = 0, \quad \dot{\gamma}_1 = \gamma_2, \quad \dot{\gamma}_2 = -\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = 0.$$

On sait que le quotient $M_c/\mathbb{C}^*$ est une courbe elliptique. On montre que génériquement, la variété algébrique M_c n'est pas isomorphe au produit direct de la courbe $M_c/\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{C}^*$. Pour des constantes génériques c_j, la variété invariante complexe M_c est biholomorphe à une partie affine de $\mathbb{C}^2/\Lambda$ où $\Lambda \subset \mathbb{C}^2$ est un réseau de rang 3,

$$\Lambda = \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 2\pi i \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi i \end{pmatrix} \oplus \mathbb{Z}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}(\tau_1) < 0.$$

Dès lors, $\mathbb{C}^2/\Lambda$ est un groupe algébrique non compact et peut être considéré comme une extension non triviale de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\{2\pi i\mathbb{Z}\oplus\tau_1\mathbb{Z}\}$ par $\mathbb{C}^* \sim \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^2/\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}/\{2\pi i\mathbb{Z}\oplus\tau_1\mathbb{Z}\} \longrightarrow 0, \quad \varphi(z_1,z_2)=z_1.$$

Le groupe algébrique $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ est la jacobienne généralisée d'une courbe elliptique avec deux points identifiés à l'infini. La toupie de Lagrange forme un système généralement algébriquement complètement intégrable.

10 – Le réseau périodique de Kac-van Moerbeke

Le réseau périodique de Kac-van Moerbeke formé de 5 particules est défini par le champ de vecteurs suivant :

$$\dot{x}_j = x_j(x_{j-1}-x_{j+1}), \quad j=1,\ldots,5$$

où $(x_1,\ldots,x_5)\in\mathbb{C}^5$ et $x_j = x_{j+5}$. Ce système forme un champ de vecteurs hamiltonien pour la structure de Poisson $\{x_j,x_k\} = x_jx_k(\delta_{j,k+1}-\delta_{j+1,k})$, $1\le j,k\le 5$ et admet trois intégrales premières indépendantes

$$\begin{aligned}
H_1 &= x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_1+x_5x_2,\\
H_2 &= x_1+x_2+x_3+x_4+x_5,\\
H_3 &= x_1x_2x_3x_4x_5.
\end{aligned}$$

Montrons que ce système est algébriquement complètement intégrable. On vérifie aisément que H_1 et H_2 sont en involution tandis que H_3 est un Casimir. Le système en question est donc intégrable au sens de Liouville. En outre, on montre que la variété affine

$$\bigcap_{j=1}^{3}\{x\in\mathbb{C}^5 : H_j(x)=c_j\}, (c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{C}^3, \quad c_3\neq 0$$

définie par l'intersection des constantes du mouvement est isomorphe à $\operatorname{Jac}(\mathcal{C})\backslash\mathcal{D}$ où

$$\mathcal{C} = \{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : w^2 = (z^3-c_1z^2+c_2z)^2-4z\},$$

est une courbe lisse de genre 2 et $\mathcal{D}$ est constitué de cinq copies de $\mathcal{C}$ dans la variété jacobienne $\operatorname{Jac}(\mathcal{C})$. Les flots engendrés par H_1 et H_2 se linéarisent sur $\operatorname{Jac}(\mathcal{C})$ et le système en question est algébriquement complètement intégrable.

11 – Systèmes de Toda périodiques généralisés

Le problème suivant concerne les systèmes de Toda périodiques généralisés. Soient $e_0, \dots, e_l$ des vecteurs linéairement dépendants dans l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^{l+1}, \langle . | . \rangle)$, $l \geq 1$, tels qu'ils soient l à l linéairement indépendants (c-à-d., pour tout j, les vecteurs $e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_l$ sont linéairement indépendants). Supposons que les réels non nuls $\xi_0, \dots, \xi_l$ satisfaisant à $\sum_{j=0}^{l} \xi_j e_j = 0$ sont de somme non nulle; c-à-d., $\sum_{j=0}^{l} \xi_j \neq 0$. Soit $A = (a_{ij})_{0 \leq i,j \leq l}$ la matrice dont les éléments sont définis par

$$a_{ij} = 2\frac{\langle e_i | e_j \rangle}{\langle e_j | e_j \rangle}, \quad 0 \leq i, j \leq l.$$

On considère le champ de vecteurs X_A sur $\mathbb{C}^{2(l+1)}$,

$$X_A : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x.y \\ \dot{y} = Ax \end{array} \right.$$

où $x, y \in \mathbb{C}^{l+1}$ et $x.y = (x_0 y_0, \dots, x_l y_l)$. En utilisant la méthode décrite dans ce chapitre, on montre que si X_A est un champ de vecteurs intégrable d'un système algébriquement complètement intégrable irréductible, alors A est la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie affine éventuellement twistée.

12 – Le système de Gross-Neveu

Le système hamiltonien de Gross-Neveu joue un rôle important en physique des particules et s'écrit sous la forme

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}, \qquad \dot{y}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j},$$

avec $j = 1, \dots, n$ et

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} e^{ic\langle \alpha, x \rangle},$$

où c est une constante, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\langle \alpha, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$. La somme sur α ci-dessus se prolonge au système de racines d'une algèbre de Lie $\mathcal{L}$. Montrer que :

a) Le système hamiltonien ci-dessus pour $j = 1, 2, 3$, $\mathcal{L} = sl(3)$ et

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} y_j^2 + \sum_{j,k=1}^{3} e^{i(x_j - x_k)},$$

avec des fonctions abéliennes y_j, e^{ix_j}, $1 \leq j \leq 3$, n'est pas algébriquement complètement intégrable.

b) Même conclusion pour le système hamiltonien dans $a)$ où $j = 1, 2, 3, 4$ et $\mathcal{L} = sl(4) \simeq o(6)$.

13 – Le potentiel de Kolossof

Etudions l'intégrabilité du système hamiltonien de Kolossof suivant

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\dot{q}_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2}, \qquad \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$

d'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + r + \frac{1}{r} - a\cos\theta, \quad a \in \mathbb{R},$$

où $q_1 = r\cos\theta$ et $q_2 = r\sin\theta$. Ce système décrit le mouvement d'une particule de masse unité dans le plan (q_1, q_2) sous l'effet du potentiel de Kolossof

$$V(q_1, q_2) = r + \frac{1}{r} - a\cos\theta, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Le système de Kolossof admet une seconde intégrale première

$$F = -(a^2 + q_2^2)p_1^2 + (q_1 - a)(2q_2p_1 - q_1p_2 + ap_2)p_2 - 2a(q_1 - a)(aq_1 - 1)(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2},$$

et il est intégrable au sens de Liouville (mais il n'est pas algébriquement complètement intégrable). Soit

$$M_c = \{(q_1, q_2, p_1, p_2, z) \in \mathbb{C}^5 : H = c_1, F = c_2, q_1^2 + q_2^2 = z^2, z \neq 0\},$$

(où $c = (c_1, c_2)$ n'est pas une valeur critique), la variété affine invariante par le flot de Kolossof. Posons

$$P(u) = -2u^3 + 2c_1u^2 - 2(1 - a^2)u + c_2.$$

On montre que si le polynôme $(u^2 - a^2)P(u)$ n'a pas de racine double, alors la variété M_c est lisse et biholomorphe à la variété complexe $\widetilde{M_c}\backslash\mathcal{D}$ où $\widetilde{M_c}$ est une variété abélienne et $\mathcal{D}$ un diviseur sur $\widetilde{M_c}$. En outre, $\widetilde{M_c}$ est un revêtement double non ramifié de la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(\mathcal{C})$ d'une courbe $\mathcal{C}$ de genre 2 définie par

$$\mathcal{C} : w^2 = (u^2 - a^2)P(u).$$

Les trajectoires du flot hamiltonien engendré par H dans M_c sont des droites, toutefois le mouvement est non linéaire. Les trajectoires du flot engendré par $H + sF$, $s \neq 0$ dans M_c ne sont pas linéaires. Par conséquent, les flots engendrés par H et F ne se linéarisent pas sur $\widetilde{M_c}$.

REFERENCES

[1] M. Adler – P. van Moerbeke: *The algebraic complete integrability of geodesic flow on $SO(4)$*, Invent. Math., **67** (1982), 297–331.

[2] M. Adler – P. van Moerbeke: *The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis*, Invent. Math., **97** (1989), 3–51.

[3] M. Adler – P. van Moerbeke – P. Vanhaecke: *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, A series of modern surveys in mathematics, Vol. 47, Springer-Verlag, 2004.

[4] V. I. Arnold: *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York, 1978.

[5] M. Audin: *Spinning tops. A course on integrable systems*, Cambridge studies in Advanced Mathematics, 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[6] C. Bechlivanidis – P. van Moerbeke: *The Goryachev-Chaplygin top and the Toda lattice*, Comm. Math. Phys., **110** (1987), 317–324.

[7] A. Clebsch: *Der Bewegung eines starren Körpers in einen Flüssigkeit*, Math. Ann., **3** (1871), 238–268.

[8] L. Euler: *Mémoires de Berlin*, 1758 ; Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock, 1765.

[9] H. Flaschka: *The Toda lattice I*, Phys. Rev., **B9** (1924-1925); *The Toda lattice II*, Progr. Theor. Phys., **51** (1974), 703–716.

[10] R. Garnier: *Sur une classe de systèmes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires*, Ren. Circ. Math. Palermo, **43** (1919), 155–191.

[11] D. Goryachev: *On the motion of a rigid material body about a fixed point in the case* A=B=4C, Mat. Sb., **21**, (1900).

[12] P. A. Griffiths – J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience 1978.

[13] L. Haine: *Geodesic flow on $SO(4)$ and Abelian surfaces*, Math. Ann., **263** (1983), 435–472.

[14] L. Haine: *The algebraic complete integrability of geodesic flow on $SO(N)$ and Abelian surfaces*, Comm. Math. Phys., **94** (1984), 271–287.

[15] R. Hartshorne: *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, 1977.

[16] M. Hénon – C. Heiles: *The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments*, Astron. J., **69** (1964), 73–79.

[17] C. G. J. Jacobi: *Sur la rotation d'un corps*, J. reine angew. Math., **39** (1850), 293–350.

[18] G. Kirchoff: *Vorlesungen, über Mathematische Physik*, Vol. 1, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1876.

[19] H. Knörrer: *Integrable hamiltonsche systeme und algebraische geometrie*, Jber. d. DT. Math.-Verein, **88** (1986), 82–103.

[20] F. Kötter: *Uber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit I, II*, J. Reine Angew. Math., 109 (1892), 51-81, 89-111.

[21] F. Kötter: *Die von Steklow und Lyapunov entdeckten intgralen Fälle der Bewegung eines Körpers in einen Flüssigkeit Sitzungsber*, Königlich Preussische Akad. d. Wiss. Berlin 6, 1900, 79–87.

[22] S. Kowalewski: *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, Acta Math. **12** (1889), 177–232.

[23] A. Lesfari: *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. École Norm. Sup. Paris, 4^e série, t. 21 (1988), 193–223.

[24] A. Lesfari: *Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym*, Pacific J. Math., **212** (2003), 125–132.
[25] A. Lesfari: *Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems*, Beiträge Algebra Geom., **48** (2007), 95–114.
[26] A. Lesfari: *Prym varieties and applications*, J. Geom. Phys., **58** (2008), 1063–1079.
[27] A. Lesfari: *Integrable systems and complex geometry*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **30** (2009), 292–326.
[28] A. Lesfari: *Théorie spectrale et problèmes non-linéaires*, Surv. Math. Appl., **5** (2010), 151–190.
[29] A. Lesfari: *Algebraic integrability : the Adler-van Moerbeke approach.*, Regul. Chaotic Dyn., **16** (2011), 187–209.
[30] A. Lesfari: *Champ de Yang-Mills avec groupe de jauge SU(2)*, Mathematical Reports, **17** (2015), 133–153.
[31] A. Lesfari: *Introduction à la géométrie algébrique complexe*, Hermann, Paris 2015.
[32] J. Liouville: *Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, **20** (1855), 137–138.
[33] A. M. Lyapunov: *Reports of Kharkov*, Math. Soc. Ser., **2**, **4**, n^{os} (1893), 1–2, 81–85; Gesammelte Werke, Vol. 1, 320–324.
[34] F. Magri: *The Kowalevski's top and the method of Syzygies*, Ann. Inst. Fourier, **55** (2005), 2147–2159.
[35] S. V. Manakov: *Remarks on the integrals of the Euler equations of the n-dimensional heavy top*, Func. Anal. Appl., **10** (1976), 93–94.
[36] D. Mumford: *On the equations defining abelian varieties I, II, III*, Invent. Math., **1** (1966), 287–354; **3** (1967), 75–135; **3** (1967), 215–244.
[37] D. Mumford: *Abelian varieties*, Oxford University press, 1974.
[38] D. Mumford: *Tata lectures on theta I, II*, Progress in Math., Birkhaüser, Boston, 1983.
[39] P. Painlevé: *Oeuvres*, tomes 1,2,3. Edition du C.N.R.S. 1975.
[40] L. Piovan: *Cyclic coverings of abelian varieties and the Goryachev-Chaplygin top*, Math. Ann., **294** (1992), 755–764.
[41] L. Poinsot: *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, Journal de Liouville, **16** (1851).
[42] A. Ramani – B. Dorozzi – B. Grammaticos: *Painlevé conjecture revisited*, Phys. Rev. Lett., **49** (1982), 1539–1541.
[43] M. Toda: *Wave propagation in anharmonic lattices*, J. Phys. Soc. of Japan, **23** (1967), 501–506.
[44] P. van Moerbeke – D. Mumford: *The spectrum of difference operators and algebraic curves*, Acta Math., **143** (1979), 93–154.
[45] P. Vanhaecke: *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, Lecture Notes in Math., 1638, Springer-Verlag, Second edition 2001.

Lavoro pervenuto alla redazione il 2 maggio 2015
ed accettato per la pubblicazione il 1 settembre 2015

Indirizzo dell'Autore:
A. Lesfari – Department of Mathematics – Faculty of Sciences – University of Chouaïb Doukkali – B.P. 20, El-Jadida – Morocco
E-mail: lesfariahmed@yahoo.fr.