

# SEMINARIO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

ATTIVITÀ DELL'A.A. 2000/2001

Calendario e Sunti

18 Settembre, YOSHIHIRO SHIBATA, *Department of Mathematics, Waseda University, Tokyo (Giappone)*, "A stability result on the time-dependent Ginzburg-Landau equation"

25 Settembre, MOHAMEDEN OULD AHMEDOU, *SISSA, Trieste (Italia)*, "On a fourth order elliptic equation involving Sobolev exponent"

28 Settembre, FRANCOISE DEMENGEL, *Université de Cergy Pontoise (Francia)*, "On some nonlinear equation involving the 1-Laplacian and critical Sobolev mapping"

16 Ottobre, MARIA ASSUNTA POZIO, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Problemi parabolici a coefficienti illimitati"

23 Ottobre, BERND KIRCHHEIM, *Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig (Germania)*, "Gradients of Lipschitz mappings"

30 Ottobre, FABIANA LEONI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Convergenza di uno schema di approssimazione per un problema di propagazione di fronti"

6 Novembre, FRANCESCO LEONETTI, *Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di L'Aquila*, "Differenziabilità per i minimi di alcuni funzionali integrali"

9 Novembre, FRANCOIS BOUCHUT, *Departement de Mathematiques, Universite d'Orleans (Francia)*, "On transport equations with BV coefficients"

13 Novembre, GIUSEPPE DA PRATO, *Istituto Matematico, Scuola Normale Superiore (Pisa)*, "Alcuni risultati su sistemi di tipo gradiente"

17 Novembre, STEFAN MÜLLER, *Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig (Germania)*, "Surprising solutions of first and second order partial differential equations" (Colloquio di Dipartimento)

20 Novembre, ENRICO SERRA, *Facoltà di Architettura, Politecnico di Torino*, "Un metodo variazionale per la ricerca di fenomeni caotici"

27 Novembre, ISABEAU BIRINDELLI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Equazioni semi-lineari in domini illimitati: proprietà di monotonia e una congettura di De Giorgi"

4 Dicembre, MARIA AGOSTINA VIVALDI, *Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate (MeMoMat), Università di Roma "La Sapienza"*, "Regolarità nei problemi di trasmissione"

11 Dicembre, ELENA BERETTA, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Unicità e stabilità in alcuni problemi inversi al contorno per equazioni ellittiche"

18 Dicembre, UMBERTO MOSCO, *Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza"*, "Interpolando violini e tamburi"

15 Gennaio, VINCENZO NESI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Mappe  $\sigma$ -armoniche, mappe quasiconformi e mezzi disomogenei"

22 Gennaio, KARI ASTALA, *Department of Mathematics, University of Jyväskylä (Finlandia)*, "Quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane"

29 Gennaio, GIOVANNI ALBERTI, *Dipartimento di Matematica Applicata, Università di Pisa*, "Misure rettificabili in senso generalizzato e struttura degli insiemi di misura nulla nel piano"

5 Febbraio, S. L. YADAVA, *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR), Center Indian Institute of Science, Bangalore (India)*, "Exact number of positive solutions of some Dirichlet problems in a ball"

12 Febbraio, LUCIO BOCCARDO, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Il termine  $\operatorname{div}(u(x) E(x))$  in alcuni problemi differenziali"

19 Febbraio, LUCIO DAMASCELLI, *Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"*, "Simmetria e monotonia delle soluzioni positive di equazioni ellittiche in  $\mathbb{R}^N$  e su varietà non compatte"

26 Febbraio, E. NORMAN DANCER, *School of Mathematics and Statistics, University of Sydney (Australia)*, "Nonlinear Elliptic equations on infinite strips"

5 Marzo, CHANG SHOU LIN, *Department of Mathematics, National Chung Cheng University (Taiwan)*, "Estimate for boundary-bubbling solutions to a Elliptic Neumann problem"

12 Marzo, GIANNI DAL MASO, *Dipartimento di Matematica, Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA/ISAS)*, "Un modello quasi-statico per la crescita di fratture fragili"

19 Marzo, GIORGIO TALENTI, *Dipartimento di Matematica, Università di Firenze*, "Some equations of non-geometrical optics"

2 Aprile, BRUNO FRANCHI, *Dipartimento di Matematica, Università di Bologna*, "Superficie regolari nei gruppi di Carnot"

9 Aprile, PIERO D'ANCONA, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Equazioni d'onda geometriche"

23 Aprile, LUIGI AMBROSIO, *Istituto Matematico, Scuola Normale Superiore (Pisa)*, "Equazioni ellittiche semilineari e una congettura di De Giorgi"

7 Maggio, HENRI BERESTYCKI, *Laboratoire d'Analyse Numerique, Université de Paris VI (Pierre et Marie Curie)*, "Propagazione di fronti in mezzi periodici"

14 Maggio, ALBERTO TESEI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Existence and Nonexistence of Solutions of Some Singular Elliptic Problems"

21 Maggio, VSELOLOD A. SOLONNIKOV, *V. A. Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences*, "Cauchy-Dirichlet Problem for Generalized Stokes Equation"

24 Maggio, MICHAEL VOGELIUS, *Department of Mathematics, Rutgers University (U S A)*, "A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities"

28 Maggio, GIOVANNI ALESSANDRINI, *Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Trieste*, "Problemi al contorno inversi in elasticità"

11 Giugno, ANDREI AGRACHEV, *Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste) e Steklov Institute of Mathematics (Mosca)*, "Singularities of Carnot-Caratheodory Distances"

18 Giugno, ITALO CAPUZZO DOLCETTA, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Rappresentazione di soluzioni di equazioni di Hamilton-Jacobi"

18 Giugno, ANDREA TERRACINA, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Condizioni al bordo per equazioni paraboliche-iperboliche"

19 Giugno, ADRIANA GARRONI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Vincoli differenziali e microgeometrie ottimali"

25 Giugno, GEORGE C. PAPANICOLAOU, *Mathematics Department, Stanford University*, "Variational problems for convection-diffusion, eddy viscosity of cellular flows"

9 Luglio, MANOUSSOS G. GRILLAKIS, *Department of Mathematics, University of Maryland* "Global existence for Schrödinger maps with radial symmetry"

# A stability result on the time-dependent Ginzburg-Landau equation

Yoshihiro SHIBATA

Waseda University (Tokyo)

In this seminar I shall talk about a result of stability for small perturbations of the initial data of constant state solutions of type  $(1,0)$  to the time-dependent Ginzburg-Landau equation.

## On a fourth order elliptic equation involving Sobolev exponent

Mohameden Ould AHMEDOU

SISSA, Trieste (Italy)

In the recent years, a fourth order elliptic operator on 4-manifolds, namely the Paneitz operator, has been extensively studied. These works display a wide and deep connection with the conformal Laplacian operator. In particular this operator gives rise to a fourth order conformal invariant which can be seen as the analogous of the scalar curvature. This operator was extended also to higher dimensions.

In this talk we report some new results obtained by the author, with the collaboration of Z. Djadli (Cergy Pointoise) and A. Malchiodi (SISSA), related to the prescription of this new conformal invariant of the standard spheres  $S^n$ ,  $n \geq 5$ .

By means of topological methods and blow-up analysis, a perturbation result is obtained in all dimension, and a global one is also derived in lower dimensions.

**On some nonlinear equation involving  
the 1-Laplacian and critical Sobolev mapping**

Francoise DEMENGEL  
Universite' de Cergy Pontoise (Francia)

## Problemi parabolici a coefficienti illimitati

Maria Assunta POZIO

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Universita' di Roma "La Sapienza"

I risultati classici di esistenza e unicit  del problema di Cauchy per equazioni paraboliche erano stati estesi gi  alla fine degli anni '60 al caso di coefficienti illimitati con crescita al pi  quadratica. A partire da tali risultati, si vogliono presentare quelli pi  recenti che mostrano fenomeni di non-unicita'. Si ottiene infatti la non-unicita' nella classe delle funzioni limitate, considerando crescite dei coefficienti di ordine superiore al secondo, nel caso di dimensione spaziale  $N \geq 3$ .



# Gradients of Lipschitz mappings

Bernd KIRCHHEIM

Max-Planck Institute for Mathematics in the Sciences  
Leipzig (Germany)

The process of differentiation, i.e. the (approximate) decomposition of general mappings into many linear pieces, has developed for at least three centuries and is certainly one of the main sources for the successful application of mathematics in the sciences.

Very little is known about the inverse process - the synthesis of mappings, in particular in higher dimensions, out of given linear pieces. We summarize the knowledge concerning the approximate solutions of such problems and present a new class of mappings, giving a non-trivial example of such a synthesis.

## **Convergenza di uno schema di approssimazione per un problema di propagazione di fronti**

Fabiana LEONI

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

Scopo del seminario e' di presentare il recente approccio ai problemi di evoluzione geometrica introdotto da G.Barles e P.E.Souganidis [Arch. Rat. Mech. Anal. 141 (1998)], che, oltre ad essere equivalente al piu' classico approccio per insiemi di livello, risulta particolarmente adatto per lo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di equazioni singolari di tipo reazione-diffusione modello Allen-Cahn. Sfruttando proprio questa caratteristica della nuova nozione di evoluzione di fronti, si prova la convergenza del cosiddetto schema di Bence-Merriman-Osher, che fornisce una semplice approssimazione del moto secondo curvatura media, e si estende tale algoritmo approssimativo a piu' generali evoluzioni anisotropiche.

# Differenziabilità per i minimi di alcuni funzionali integrali

Francesco LEONETTI

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata  
Università di L'Aquila

Nell'ambito della regolarità dei minimi di funzionali integrali, ci occuperemo delle condizioni che assicurano l'esistenza delle derivate seconde dei minimi. La convessità del funzionale gioca un ruolo importante e ne analizzeremo alcuni aspetti.

# On transport equations with BV coefficients

Francois BOUCHUT

Departement de Mathematiques et Applications  
Ecole Normale Superieure, Parigi (Francia)

We discuss the uniqueness problem for linear transport equations with BV coefficients, which is related to the renormalization property. The main result is that uniqueness holds for weak bounded solutions to Vlasov's equation with BV force field.

## Alcuni risultati su sistemi di tipo gradiente

Giuseppe DA PRATO

Istituto Matematico  
Scuola Normale Superiore (Pisa)

Sia dato un operatore autoaggiunto negativo  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  in uno spazio di Hilbert  $H$  e un'applicazione  $U : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ .

Consideriamo l'operatore differenziale

$$N_0\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} [D^2\varphi] + \langle Ax, D\varphi \rangle - \langle DU(x), D\varphi \rangle,$$

che è una perturbazione dell'operatore di Ornstein–Uhlenbeck

$$L\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} [D^2\varphi] + \langle Ax, D\varphi \rangle.$$

$e^{tL}$  descrive in genere una dinamica libera ed ha una misura invariante gaussiana  $N_Q$  dove  $Q = -\frac{1}{2} A^{-1}$ .

Daremo condizioni sufficienti affinché  $N_0$  sia essenzialmente autoaggiunto in  $L^2(H, \nu)$ , dove  $\nu$  è la misura di "Gibbs"

$$\nu(dx) = Z^{-1} e^{-2U(x)} N_Q(dx)$$

e  $Z$  è una costante di normalizzazione.

Verrà data un'applicazione al problema della Quantizzazione Stocastica.

### BIBLIOGRAFIA

Albeverio S., Kondratiev V. e Röckner (1995), DIRICHLET OPERATORS VIA STOCHASTIC ANALYSIS, *Journal of Functional Analysis* **128**, n.1, 102–138.

Albeverio S. e Röckner (1991), STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS IN INFINITE DIMENSIONS: SOLUTIONS VIA DIRICHLET FORMS, *Probab. Th. Rel. Fields* **89**, 347–386.

Da Prato G. (1998), THE ORNSTEIN-UHLENBECK GENERATOR PERTURBED BY THE GRADIENT OF A POTENTIAL, *Bollettino U.M.I. (8) I-B*, 501–519.

Da Prato G. (in corso di stampa), SOME PROPERTIES OF MONOTONE GRADIENT SYSTEMS, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*.

Da Prato G. e Tubaro L. (2000), SELF-ADJOINTNESS OF SOME INFINITE DIMENSIONAL ELLIPTIC OPERATORS AND APPLICATIONS TO STOCHASTIC QUANTIZATION, *Probab. Rel. Field* **118**, 1, 131–145.

Eberle A. (1999), "Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators", *Lecture Notes in Mathematics* **1718**, Berlin, Springer-Verlag.

Liskevich V. e Röckner M. (1998), STRONG UNIQUENESS FOR A CLASS OF INFINITE DIMENSIONAL DIRICHLET OPERATORS AND APPLICATION TO STOCHASTIC QUANTIZATION, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, Vol. XXVII, 69–91.

Lumer G. e Phillips R.S. (1961), DISSIPATIVE OPERATORS IN BANACH SPACES, *Pacific J. Math.* **11**, 679–698.

Ma Z.M. e Röckner M. (1992), “Introduction to the theory of (non symmetric) Dirichlet forms”, Springer-Verlag.

Stannat W. (1999), THE THEORY OF GENERALIZED DIRICHLET FORMS AND ITS APPLICATIONS IN ANALYSIS AND STOCHASTICS, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **142**, n.678.

Zabczyk J. (1989), SYMMETRIC SOLUTIONS OF SEMILINEAR STOCHASTIC EQUATIONS, *Lecture Notes in Mathematics* **1390**, eds. G. Da Prato e L. Tubaro, Springer-Verlag, 237–256.

Zambotti Z. (2000), A REFLECTED STOCHASTIC HEAT EQUATIONS AS SYMMETRIC DYNAMICS WITH RESPECT TO 3-D BESSEL BRIDGE, *preprint SNS*, Pisa.

Colloquio di Dipartimento

## Surprising solutions of first and second order partial differential equations

Stefan MÜLLER

Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften  
Leipzig (Germania)

In this talk I will discuss joint work with Vladimír Šverák on general strategy to obtain solutions of the system  $\nabla u \in K$ , where  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  and where  $K$  is a given subset of  $m \times n$  matrices.

Our approach is based on Gromov's method of convex integration, originally invented for problems in differential geometry and differential topology. Our own work was originally inspired by mathematical models of solid-solid phase transitions but has led to surprising other applications. In particular we were able to construct an elliptic  $2 \times 2$  system (in variational form) which has Lipschitz solutions that are nowhere  $C^1$ . In another direction, Kirchheim and Preiss have recently investigated maps where the gradient takes only finitely many values and have shown that these have a unexpectedly rich structure.

## **Un metodo variazionale per la ricerca di fenomeni caotici**

Enrico SERRA

Facolta' di Architettura  
Politecnico di Torino

Il seminario intende descrivere una linea di ricerca che nell'ultimo decennio ha fornito risultati molto precisi su problemi classici. Si tratta della ricerca e della descrizione di fenomeni caotici in equazioni o sistemi di equazioni ordinarie. Nonostante questi problemi siano stati studiati per almeno un secolo, recentemente l'applicazione di metodi variazionali propri della teoria dei punti critici ha fornito nuovi e profondi risultati. Il seminario vuole da una parte fornire un'introduzione a queste tematiche, e dall'altra mostrare alcuni risultati recentissimi riguardo ad equazioni del secondo ordine con non-linearita' e termini forzanti periodici.



## Equazioni semi-lineari in domini illimitati: proprietà di monotonia e una congettura di De Giorgi

Isabeau BIRINDELLI

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

Nel 1978, De Giorgi faceva la seguente congettura "Sia  $u$  una soluzione dell'equazione  $\Delta u = u^3 - u$  in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $|u| \leq 1$  e  $\partial_{x_n} u > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . E' vero che tutti gli insiemi di livello di  $u$ :  $\{u = \lambda\}$  sono iperpiani, per lo meno se  $n \leq 8$ ?"

Recentemente sono stati ottenuti svariati risultati in questo ambito, in particolare Ambrosio e Cabre' l'hanno dimostrata per  $n \leq 3$  (e per una classe molto piu generale di equazioni). Nella sua versione "debole", cioè richiedendo che il limite uniforme in più (risp. meno) infinito nella direzione  $x_n$  di  $u$  sia 1 (risp.  $-1$ ), la congettura è stata dimostrata per tutte le dimensioni.

In questo seminario, dopo aver dato una panoramica sullo stato dell'arte rispetto a queste problematiche, illustrerò più in dettaglio in che modo i risultati di monotonia delle soluzioni sono una possibile chiave per la dimostrazione della congettura "debole" sia in ambito Euclideo sia nello spazio di Heisenberg. Particolare rilievo verrà dato ad alcuni Principi del Massimo in domini illimitati.

## Regolarità nei problemi di trasmissione

Maria Agostina VIVALDI

Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici  
per le Scienze Applicate (MeMoMat)

Università di Roma "La Sapienza"

In questo seminario mi propongo di esporre un risultato di regolarità per la soluzione debole di un problema di trasmissione del secondo ordine, con interfaccia lipschitziana. Tale regolarità consente, in particolare, di provare che la condizione di trasmissione della formulazione forte è soddisfatta nel senso di  $L^2$ .

# Unicità e stabilità in alcuni problemi inversi al contorno per equazioni ellittiche

Elena BERETTA

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"

Università di Roma "La Sapienza"

L'utilizzo di test non distruttivi per la determinazione di difetti quali fratture, inhomogeneità piccole e perdite di materiale in mezzi conduttori conduce allo studio di alcuni problemi al contorno sovradeterminati. Si tratta di problemi per equazioni ellittiche, in domini limitati  $\Omega$  del piano (dello spazio), in cui si vogliono determinare curve (superfici) interne ad  $\Omega$  o parti della frontiera di  $\Omega$  da dati al bordo sovradeterminati. Tali problemi sono mal posti nel senso di Hadamard. Presenterò alcuni risultati di unicità delle soluzioni ed illustrerò alcune stime di stabilità condizionata, ossia ottenute con opportune limitazioni a priori delle soluzioni.

## Interpolando violini e tamburi

Umberto MOSCO

Dipartimento di Fisica  
Università di Roma "La Sapienza"

Certi insiemi geometrici frattali, come i cosiddetti "Sierpinski gaskets" e "Sierpinski carpets", possono essere utilizzati per costruire modelli di corpi fisici dotati di proprietà elastiche e diffusive insolite. L'interesse per le applicazioni delle strutture di questo tipo risiede nel fatto che esse forniscono una scala di comportamenti spettrali "interpolanti", per così dire, quelli delle corde elastiche e delle membrane elastiche bidimensionali.

Noi descriveremo come questi modelli frattali sono costruiti e mostreremo come sia possibile ottenere alcune proprietà fondamentali delle loro configurazioni di equilibrio, come le disuguaglianze di Harnack, sulla base di relazioni metriche di scala che riflettono l'invarianza per autosimilarità delle strutture in esame e delle loro ramificazioni.

# Mappe $\sigma$ -armoniche, mappe quasiconformi e mezzi disomogenei

Vincenzo NESI

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapeinza"

Presenteremo una rassegna di risultati ottenuti prevalentemente in collaborazione con G. Alessandrini, F. Leonetti e K. Astala.

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^2$  e sia  $\sigma$  una matrice simmetrica uniformemente ellittica con elementi misurabili. Una mappa  $U \in W_{loc}^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2)$  si dice  $\sigma$ -armonica se le sue componenti sono soluzioni deboli dell'equazione  $\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u(x)) = 0$ . Mappe armoniche ( $\sigma = \text{identità}$ ) e mappe quasiconformi sono esempi interessanti di mappe  $\sigma$ -armoniche. Inizialmente presenteremo risultati ottenuti con G. Alessandrini che riguardano le mappe  $\sigma$ -armoniche. In particolare teoremi che garantiscano rispettivamente la loro iniettività e la condizione  $\det DU > 0$  quasi ovunque. Cercheremo poi di mettere in luce le connessioni, classiche e recenti, con le mappe quasiconformi (e quasiregolari). Come applicazione presenteremo i risultati ottimali di maggiore sommabilità per il gradiente ottenuti con F. Leonetti e basati sui lavori di K. Astala. Infine illustreremo applicazioni alla branca della teoria dei "materiali compositi" che studia la determinazione della "G-chiusura" di classi di operatori ellittici.

## BIBLIOGRAFIA

Stannat W. (1999), THE THEORY OF GENERALIZED DIRICHLET FORMS AND ITS APPLICATIONS IN ANALYSIS AND STOCHASTICS, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* **142**, n.678.

Alessandrini G. & Nesi V., *Univalence of  $\sigma$ -harmonic mappings and applications* Apparirà su *Arch. Rational Mech. Analysis*

Astala, K., *Area distortion of quasiconformal mappings*, *Acta Math.*, 173 (1994), 37-60.

Astala, K. & Miettinen, M., *On quasiconformal mappings and 2-dimensional G-closure problems*, *Arch. Rational Mech. Anal.* 143 (3) (1998), 207-240.

Astala K. & Nesi V., *Composites and quasiconformal mappings: new optimal bounds* University of Jyväskylä, preprint 233, Ottobre 2000, Jyväskylä, Finlandia.

Bers, L., John, F. & Schechter, M., *Partial Differential Equations*, Interscience, New York, 1964.

Choquet, G., *Sur un type de transformation analytique généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques*, *Bull. Sci. Math.* 69 (1945), 156-165.

- Kneser, H., *Lösung der Aufgabe 41*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 35, 1926, 123-124.
- Kohn, R.V. & Strang, G., *Optimal design and relaxation of variational problems I, II, III*, Commun. Pure Appl. Math., 39 (1986), 113-137, 139-182, 353-377.
- Leonetti, F. & Nesi, V., *Quasiconformal solutions to certain first order systems and the proof of a conjecture of G. W. Milton*, J. Math. Pures Appl. (9) 76 (1997), 109-124.
- Meyers, N., *An  $L^p$ -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence form equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(3) 17 (1963), 189-206.
- Nesi, V., *Quasiconformal mappings as a tool to study the effective conductivity of two dimensional composites made of  $n \geq 2$  anisotropic phases in prescribed volume fraction*, Arch. Ration. Mech. Anal. 134 (1996), 17-51.
- Radó, T., *Aufgabe 41*, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 35 (1926), 49.
- Tartar, L., *Estimations fines des coefficients homogénéisés*, in: Ennio De Giorgi's Colloquium, ed. P. Kree, Pitman, Boston, (1985), 168-187.

# Quasiconformal mappings and elliptic PDE in the plane

Kari ASTALA

Department of Mathematics  
University of Jyväskylä (Finlandia)

We discuss the notion of quasiconformal mappings and some of its many connections to other fields of analysis. The emphasis is on the relations and applications to elliptic PDE in the plane.

# **Misure rettificabili in senso generalizzato e struttura degli insiemi di misura nulla nel piano**

Giovanni ALBERTI

Dipartimento di Matematica Applicata  
Università di Pisa

Si introduce una generalizzazione del concetto di misura rettificabile, motivata dallo studio delle derivate delle funzioni a variazione limitata, come pure delle correnti normali in spazi euclidei. Il teorema fondamentale sulla struttura di queste misure, almeno nel piano, è collegato ad un teorema di decomposizione degli insiemi di misura nulla. L'estensione di questi risultati a dimensione superiore è un problema aperto.



# Exact number of positive solutions of some Dirichlet problems in a ball

S. L. YADAVA

Tata Institute of Fundamental Research (TIFR)  
Center Indian Institute of Science, Bangalore (India)

We consider the exact number of positive solutions of the problem:

$$-\Delta u = u^p + \lambda u^q \quad \text{in } B(R), \quad u = 0 \quad \text{on } \partial B(R),$$

where  $0 < q < p \leq (n+2)/(n-2)$ ,  $\lambda \geq 0$  and  $B(R)$  is a ball of radius  $R$ . For  $\lambda = 0$ , it was observed by Gidas-Ni-Nirenberg that the problem admits a unique solution. For  $\lambda > 0$ , this problem is not yet completely resolved. We present some recent advances, conjectures and open problems for the exact number of solutions of the problem.

## Il termine $\operatorname{div}(u(x) E(x))$ in alcuni problemi differenziali

Lucio BOCCARDO

Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

In alcuni problemi differenziali (ellittici o parabolici, talvolta sistemi) è presente il termine  $\operatorname{div}(u(x) E(x))$ . Motivazioni possono essere la teoria delle equazioni ellittiche in ipotesi generali, modellizzazione di pozzi di petrolio, questioni di semi-conduttori.

A titolo di esempio, si consideri il semplice problema al contorno

$$(*) \quad \begin{cases} -\Delta u = -\operatorname{div}(E(x)u) + f(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con  $f(x)$  funzione regolare e  $\Omega$  aperto limitato di  $R^N$ .

Avendo scelto (per semplificare la presentazione) come parte principale il laplaciano e come termine noto  $f$  una funzione regolare, saranno le proprietà di sommabilità del campo vettoriale  $E$  a determinare i risultati che saranno esposti. Va notato che proprio la teoria dei semi-conduttori porta a considerare  $E$  in  $L^2$ , perché  $E$  è il gradiente della soluzione di un problema di Dirichlet.

Se  $|E| \in L^m(\Omega)$ , con  $m > N$ , il problema (\*) ammette una unica soluzione debole limitata.

Se  $|E| \in L^N(\Omega)$ , il problema (\*) ammette una unica soluzione debole.

Se  $|E| \in L^m(\Omega)$ , con  $2 \leq m < N$ , il problema (\*) può non avere soluzioni deboli. Non si può provare altro che  $\log(1 + |u|) \in L^2(\Omega)$  e che le sue troncate a ogni quota  $k$  hanno gradiente di quadrato sommabile; pur con soltanto queste informazioni, si riesce a dare un senso al fatto che  $u$  è soluzione di (\*).

## **Simmetria e monotonia delle soluzioni positive di equazioni ellittiche in $\mathbb{R}^N$ e su varietà non compatte**

Lucio DAMASCELLI

Dipartimento di Matematica  
Università di Roma "Tor Vergata"

Sarà presentata una breve rassegna sul metodo di spostamento di iperpiani di Alexandrov-Serrin per lo studio di proprietà qualitative delle soluzioni positive di problemi ellittici, sia in domini limitati di  $\mathbb{R}^N$  che in tutto lo spazio. Sarà poi illustrata una variante 'variazionale' basata sulle classiche disuguaglianze di Sobolev e Hardy, e tempo permettendo si accennerà ad applicazioni del metodo alla dimostrazione di

- 1) simmetria delle soluzioni positive di equazioni ellittiche su  $\mathbb{R}^N$  in presenza di operatori degeneri, come il  $p$ -laplaciano
- 2) simmetria delle soluzioni positive di equazioni ellittiche su varietà non compatte, come lo spazio iperbolico  $\mathbb{H}^N$ .
- 3) teoremi di nonesistenza di soluzioni di alcuni problemi.

# Nonlinear Elliptic equations on infinite strips

E. Norman DANCER

School of Mathematics and Statistics  
University of Sydney (Australia)

We discuss two problems on infinite strips (one rather briefly).

Firstly, we discuss

$$-\Delta u = \lambda f(u) \quad \text{on } [-1, 1] \times \mathbb{R}^n$$

where we look for positive solutions which decay in the unbounded directions and are periodic in the other direction.

Secondly we discuss solutions with Dirichlet boundary and their applications to some expanding domain problems.

# **Estimate for boundary-bubbling solutions to a Elliptic Neumann problem**

Chang Shou LIN

Department of Mathematics  
National Chung Cheng University (Taiwan)

In this talk, I will discuss the behavior of solutions with one single peak on the boundary to a elliptic Neumann problem. I will talk about the pointwise estimate and how to derive some asymptotic formulas for all dimension.

## **Un modello quasi-statico per la crescita di fratture fragili**

Gianni DAL MASO

Dipartimento di Matematica  
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (SISSA/ISAS),  
Trieste

Verranno presentati risultati di esistenza e di approssimazione per le soluzioni di un modello variazionale quasi-statico per la crescita di fratture fragili, proposto recentemente da Francfort e Marigo. Questi risultati si basano su un'analisi accurata del comportamento delle soluzioni di problemi di Neumann in domini bidimensionali con dei tagli.

## Some equations of non-geometrical optics

Giorgio TALENTI

Dipartimento di Matematica  
Università di Firenze

We present remarks and results about the following system

$$\begin{cases} u|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 + n^2(x, y) = 0, \\ \nabla u \cdot \nabla v = 0, \end{cases}$$

which is a convenient, two-dimensional version of one introduced by Kravtsov, Ludwig and others in the 1960s, credited to account for both the standard propagation of light in the region illuminated by geometrical optical rays and the rise of evanescent waves beyond a caustic. Here  $x$  and  $y$  denote rectangular coordinates in the Euclidean plane;  $n$ ,  $u$  and  $v$  stand for functions of  $x$  and  $y$ ;  $n$  is given, nonnegative and sufficiently well-behaved.

## Superficie regolari nei gruppi di Carnot

Bruno FRANCHI

Dipartimento di Matematica  
Università di Bologna

Un gruppo di Carnot è un gruppo di Lie nilpotente connesso e semplicemente connesso, con algebra di Lie stratificata; munito della metrica di Carnot-Carathéodory associata a una famiglia di campi vettoriali invarianti a sinistra che genera il primo strato dell'algebra è uno spazio metrico non-Euclideo (anzi non-Riemanniano), pur essendo dotato di una struttura 'ricca', con traslazioni e dilatazioni. Nella prospettiva dello sviluppo di una teoria geometrica della misura nell'ambito dei gruppi di Carnot, si studia quale sia una definizione naturale di superficie regolare in questo contesto, in quanto la tradizionale definizione di superficie dovuta a Federer come immagine Lipschitz di uno spazio euclideo non si adatta all'ambito dei gruppi di Carnot. Si introduce una definizione alternativa che permette di provare che tali superficie regolari hanno la corretta misura di Hausdorff intrinseca e, nel caso del gruppo di Heisenberg, di provare un teorema di rettificabilità alla De Giorgi.



## Equazioni d'onda geometriche

Piero D'ANCONA

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

Le mappe d'onda sono punti critici del funzionale dell'energia da una varietà pseudoriemanniana (più in particolare, di Minkowski) a valori in una varietà riemanniana. Si possono considerare l'analogo iperbolico delle mappe armoniche, e il problema naturale per tali equazioni è il problema di Cauchy. Tali problemi sorgono in modo naturale sia in teoria della relatività che in altri settori della fisica teorica. Esistono pochi risultati di carattere generale, e anzi alcuni problemi centrali della teoria sono ancora aperti. Nel seminario si illustreranno vari metodi e congetture, con particolare attenzione al caso che la varietà di arrivo sia una sfera, e si daranno risultati di cattiva positura del problema in spazi di bassa regolarità.

## **Equazioni ellittiche semilineari e una congettura di De Giorgi**

Luigi AMBROSIO

Istituto Matematico  
Scuola Normale Superiore (Pisa)

Si descriverà lo stato attuale delle ricerche su una congettura di De Giorgi risalente al 1978 relativa al carattere unidimensionale di certe soluzioni intere di equazioni ellittiche semilineari. Recentemente la congettura è stata dimostrata per  $n=2$  (Berestycki-Caffarelli-Nirenberg) e  $n=3$  (Ambrosio-Cabre') ma il caso generale è ancora aperto. Verranno anche illustrati dei risultati parziali sull'argomento.

# Propagazione di fronti in mezzi periodici

Henri BERESTYCKI

Laboratoire d'Analyse Numerique  
Universite de Paris VI (Pierre et Marie Curie)

Equazioni di tipo reazione-diffusione intervengono in contesti vari come la teoria della combustione oppure in biologia. Il tema di questa presentazione sarà il fenomeno di propagazione in mezzi eccitabili. Estensioni della nozione di fronte progressivo (travelling front) saranno presentati quando c'è una struttura periodica dovuta alla geometria o ai coefficienti dell'equazione. Verranno discussi risultati recenti che riguardano fronti progressivi pulsanti che sono generalizzazioni dei fronti progressivi e le equazioni alle derivate parziali non lineari che ne risultano.

# Existence and Nonexistence of Solutions of Some Singular Elliptic Problems

Alberto TESEI

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

We study existence and nonexistence of nonnegative solutions to semilinear elliptic equations of the following type:

$$-\Delta u - \lambda|x|^{-\mu}(x, \nabla u) = |x|^{-\alpha}u^{q-1} \quad \text{in } \Omega.$$

Here  $\Omega$  is a bounded subset of  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) which contains the origin,  $q > 2$  and  $\lambda, \mu, \alpha$  are real parameters; by  $(\cdot, \cdot)$  we denote the scalar product in  $\mathbb{R}^n$ . We shall discuss connections with previous work (Brezis - Vazquez, Brezis - Cabre'..) on the same subject, as well as well-posedness results concerning related parabolic problems.

# Cauchy-Dirichlet Problem for Generalized Stokes Equations

Vselolod A. SOLONNIKOV

V. A. Steklov Institute of Mathematics  
Russian Academy of Sciences

The system of generalized Stokes Equations, which is obtained from the Stokes system by replacement of the Laplacian with elliptic matrix second order differential operator, arises as a result of linearization of equations of motion on non-Newtonian fluids. It belongs to the class of degenerate parabolic systems for which there does not exist any general theory. The communication is devoted to the analysis of the Cauchy-Dirichlet problem for this system in Hölder and Sobolev spaces.

## **A direct impedance tomography algorithm for locating small inhomogeneities**

Michael VOGELIUS

Department of Mathematics  
Rutgers University (USA)

Impedance tomography seeks to recover the electrical conductivity distribution inside a body from measurements of current flows and voltages on its surface. In this talk I shall review some recent work when the goal is to find a number of small objects (inhomogeneities) inside an otherwise known conductor. In particular I will focus on the design of a direct reconstruction algorithm. The viability of this algorithm is documented by computational experiments.

## **Problemi al contorno inversi in elasticità**

Giovanni ALESSANDRINI

Dipartimento di Scienze Matematiche  
Università di Trieste

Si presentano nuove limitazioni che danno risultati quantitativi di unicità del prolungamento per il sistema di Lamé con parametri variabili. Se ne discute l'applicazione a questione di analisi non distruttiva, quali la individuazione di cavità o inclusioni in corpi elastici.

# Singularities of Carnot–Caratheodory Distances

Andrei AGRACHEV

Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati (Trieste)

e

Steklov Mathematical Institute (Mosca)

A Carnot–Caratheodory or sub-Riemannian distance on a smooth  $n$ -dimensional manifold  $M$  is defined by a set  $\{X_1, \dots, X_k\}$  of  $k$  vector fields on  $M$ , which satisfies the Hörmander condition. The Hörmander condition allows to connect any two points  $q_0, q_1$  on  $M$  by a smooth curve  $q(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , whose velocity belongs to the linear hull of the given fields:

$$q'(t) = u_1'(t)X_1(q(t)) + \dots + u_k'(t)X_k(q(t)), \quad q(0) = q_0, \quad q(1) = q_1. \quad (*)$$

Carnot–Caratheodory distance between  $q_0$  and  $q_1$  is the infimum of the lengths of the curves  $(u_1(t), \dots, u_k(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ , in  $\mathbb{R}^k$  satisfying relations (\*).

Carnot–Caratheodory distance functions are always continuous but never smooth and we try to observe appearing singularities, in particular, for generic  $X_1, \dots, X_k$ .



# Rappresentazione di soluzioni di equazioni di Hamilton-Jacobi

Italo CAPUZZO DOLCETTA

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

La soluzione generalizzata significativa (massimale, di entropia ovvero nel senso di viscosità) di una equazione di Hamilton-Jacobi con Hamiltoniana convessa può essere ottenuta in condizioni piuttosto generali attraverso la minimizzazione parametrica di un funzionale del calcolo delle variazioni. Di particolare interesse sono i casi in cui è possibile ottenere la soluzione attraverso procedure di minimizzazione finito-dimensionali che danno luogo a rappresentazioni note in letteratura come formule di Hopf-Lax. Dopo una rassegna di risultati classici sull'argomento (trasformata di Hopf-Cole e metodo di viscosità evanescente e sue relazioni con l'approccio di analisi idempotente di Maslov) descriverò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con H. Ishii che estendono al caso di Hamiltoniane dipendenti dalla posizione il metodo delle soluzioni inviluppo di Hopf. Il risultato principale è una formula di tipo Hopf-Lax per il problema di Cauchy

$$u_t + H(x, Du) = 0, \quad u(x, 0) = g(x)$$

espressa in termini di una metrica di Carnot-Caratheodory associata ad  $H$ .

## Condizioni al bordo per equazioni paraboliche-iperboliche

Andrea TERRACINA

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

Lo scopo di questo seminario è di analizzare la buona formulazione delle condizioni al contorno per un problema di Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta b(u) + \operatorname{div} \Phi(u) = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\Omega \times (0, T)} = a_0, \end{cases} \quad (1)$$

dove  $\Omega$  è un aperto limitato di classe  $C^2$  e  $b$  è una funzione continua non decrescente.

Trattandosi di un problema che, per certi valori della soluzione può essere puramente iperbolico, sarà necessario dare una formulazione entropica di questo.

Per quanto riguarda la condizione al bordo, l'idea per la formulazione viene in modo euristico dal problema iperbolico. Una volta data la definizione di soluzione entropica di (1), presenteremo dei risultati ottenuti in collaborazione con C. Mascia e A. Porretta in cui si prova l'unicità della soluzione e la consistenza di questa con una approssimazione uniformemente parabolica del problema dato.

Uno strumento utile per studiare il problema è lo spazio dei campi a divergenza misura, in questo contesto è possibile trattare la condizione al bordo in un senso debole.

Inoltre in tale ambito si potrà generalizzare la condizione di Rankine-Hugoniot e la condizione della corda che servono a trattare le discontinuità della soluzione per equazioni iperboliche nonlineari.

# Vincoli differenziali e microgeometrie ottimali

Adriana GARRONI

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"  
Università di Roma "La Sapienza"

Partendo da un modello della teoria dei materiali compositi si studia il problema di trovare una funzione lipschitziana  $u$  che verifichi

$$|\lambda(x)Du(x)| \leq 1 \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

dove  $\Omega$  è un dominio limitato di  $\mathbf{R}^n$  e  $\lambda(x)$  una funzione discontinua, e con media del gradiente di  $u$  assegnata. Per questo problema da una parte si studiano le relazioni con la teoria dell'"infinito laplaciano anisotropo" e dei "funzionali supremali", dall'altra si considerano questioni di ottimalità ad esso collegate. Per ciò che riguarda la prima questione si dimostra che il problema (1) può essere approssimato con problemi del tipo  $p$ -laplaciano anisotropo. Tale approssimazione permette di selezionare una "buona" soluzione del problema (1) e lo collega alla teoria dell'"infinito laplaciano e sue generalizzazioni molto sviluppata sia con l'approccio della viscosità (Barron, Jensen, ecc.) sia più recentemente con approcci variazionali (Buttazzo).

Per ciò che riguarda le questioni di ottimalità queste portano a dei risultati di "rigidità differenziale" collegati al problema "degli  $N$  gradienti" studiato tra gli altri da Tartar, Sverak e Ball.

# Variational problems for convection-diffusion, eddy viscosity of cellular flows

George C. PAPANICOLAOU

Mathematics Department  
Stanford University

I will discuss how min-max variational principles can be formulated and used to study the enhancement of the effective diffusivity in periodic and random cellular convective flows. I will explain how these variational principles can be used to analyze the asymptotic behavior of the effective diffusivity for large Peclet number (small diffusion, large convection). I will then extend this analysis to the eddy viscosity of periodic cellular flows at high Reynolds number, after introducing suitable variational principles for it.

# **Global existence for Schroedinger maps with radial symmetry**

Manoussos G. GRILLAKIS

Department of Mathematics  
University of Maryland

I will formulate a Schrodinger type evolution of a map from a Riemannian manifold to a Riemann surface. Then I will describe the structure of the conservation laws and apriori estimates. Finally I will give a global existence result assuming radial symmetry.