Seminario di Equazioni Differenziali

Attività dell'a.a. 1999/2000
Calendario e Sunti

21 Settembre, ADIMURTHI, *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR), Center Indian Institute of Science, Bangalore (India),* "The critical exponent problem in $I\!R^2$"

25 Ottobre, STANISLAV POHOZAEV, *V. A. Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Mosca (Russia),* "On a general approach to blow-up problems"

8 Novembre, JACQUES GIACOMONI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza",* "Blow-up situation for a degenerate parabolic equation"

22 Novembre, ALFONSO VIGNOLI, *Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata",* "Un approccio topologico elementare alla risoluzione di equazioni nonlineari"

29 Novembre, EVGENY GALAKHOV, *Moscow Aviation Institute / Universita' di Trieste,* "Nonlocal operators and Feller semigroups"

6 Novembre, S. PRASHANTH, *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR), Center Indian Institute of Science, Bangalore (India),* "Critical exponent problem in $I\!R^2$ - A sharp condition on the perturbation dividing existence and nonexistence"

13 Dicembre,

ore 14:00, YUXIN GE, *Université Paris XII,* "Some Comparison, Symmetry and Monotonicity Results for Carnot- Carathèodory Spaces"

ore 14:45, AMANDINE AFTALION, *Université Paris VI,* "On the symmetry of solutions of the Ginzburg-Landau equations for small domains"

20 Dicembre, GIGLIOLA STAFFILANI, *Department of Mathematics, Stanford University, California (USA),* "Stima asintotica delle norme di Sobolev per le soluzioni dell'equazione di Schrodinger"

10 Gennaio, ALESSANDRA LUNARDI, *Dipartimento di Matematica, Universit di Parma,* "Soluzioni classiche del problema di Hele-Shaw"

17 Gennaio, BARBARA NIETHAMMER, *Institut für Angewandte Mathematik, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (Germania)*, "Mathematical models for Ostwald Ripening: Derivation by homogenization"

24 Gennaio, ALEXANDER L. SKUBACHEVSKII, *Moscow "S. Ordzhonikidze" Aviation Institute, Mosca (Russia)*, "Elliptic and Parabolic Functional Differential Equations and Applications"

31 Gennaio, LUIGI ORSINA, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Il ruolo della capacità nello studio delle equazioni ellittiche con dati misure"

7 Febbraio, LOUIS NIRENBERG, *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University (USA)*, "A problem arising from economics" (Colloquio di Dipartimento)

14 Febbraio, OTTO LIESS, *Dipartimento di Matematica, Università di Bologna*, "La trasformata di Fourier locale per iperfunzioni"

21 Febbraio, ALICE SIMON, *Département de Mathématiques, Université d'Orléans (Francia)* "About the problem of combustion of a droplet in a hot gas"

28 Febbraio, ANTONIO SICONOLFI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Metriche Finsleriane e non ed equazioni di Hamilton-Jacobi"

6 Marzo, DENISE AREGBA-DRIOLLET, *Università di Bordeaux*, "Kinetic diffusive approximation of nonlinear degenerate parabolic-hyperbolic problems"

13 Marzo, P. N. SRIKANTH, *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Center, Indian Institute of Science, Bangalore (India)*, "On nondegeneracy of solutions of some class of semilinear elliptic problems and applications"

20 Marzo, JEAN-PIERRE PUEL, *Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université de Versailles (Francia)*, "Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems involving quasilinear and semilinear terms"

27 Marzo, ROBERT E.L. TURNER, *Department of Mathematics, University of Wisconsin (USA)*, "Dinamica neurale e locomozione di Ascaris"

3 Aprile, MASSIMO GROSSI, *Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "Unicità della soluzione di equazioni ellittiche semilineari"

10 Aprile, VESSELIN PETKOV, *Département de Mathématiques Appliquées, Université de Bordeaux I, (Francia)*, "Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger operators with trapping perturbations"

17 Aprile, KEVIN ZUMBRUN, *Department of Mathematics, Indiana University (USA)*, "Stability of viscous shock fronts"

8 Maggio, MICHELE MATZEU, *Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"*, "Su una classe di problemi ellittici superlineari con coefficienti di segno variabile"

15 Maggio, MYTHILY RAMASWAMY, *Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Center, Indian Institute of Science, Bangalore, (India)*, "Improved Hardy-Sobolev inequalities and applications to partial differential equations"

22 Maggio, MARIA GIOVANNA GARRONI, *Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza"*, "La funzione di Green in un diedro: esistenza, unicita', stime"

29 Maggio, DAVID INGERMANN, *Department of Mathematics, Massachusettes Institute of Technology, Boston*, "Inverse boundary problems and continued fractions"

7 Giugno, JOEL SPRUCK, *Department of Mathematics, Johns Hopkins University, Baltimore*, "Boundary value problems at infinity for surfaces of constant mean curvature in Hyperbolic space"

12 Giugno, ABBAS BAHRI, *Department of Mathematics, Rutgers University, New Brunswick*, "A homology associated to a contact form on a space of dual Legendrian curves"

19 Giugno, ROGER TEMAM, *Laboratoire d'Analyse Numerique, Universite' de Paris XI (Paris-Sud)*, "Some mathematical problems in meteorology and oceanography"

26 Giugno, JOSÈ LUIS MENALDI, *Department of Mathematics, Wayne State University, Detroit*, "An Impulse Control of a Stochastic Navier-Stokes Equation"

The critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$

Adimurthi

Tata Institute of Fondamental Research (TIFR) Center
Indian Institute of Science, Bangalore (India)

The talk is a survey of the results on critical exponent problem on bounded domains in dimension two. It mainly consists of two parts. In the first part, border line for the existence and non existence of positive solutions are discussed. In the second part blow up analysis of solutions are discussed. Using this, one obtains that concentration points of the minimal energy solutions for the Dirichlet boundary condition are the critical points of the regular part of the Green's function.(If time permits I will brifely discuss the Neumann problem also).

The General Approach to the Blow-Up Problem

Stanislav Pohozaev

V. A. Steklov Institute of Mathematics
Russian Academy of Sciences, Mosca (Russia)

The general approach reduces the blow-up problem to the variational problem. So, every blow-up problem corresponds the associated functional determined on the suitable class functions, depending on some parameter. We consider the limit of this functional with respect to parameter. Vanishing of this limit ensures the blow-up of the corresponding problem.

We demonstrate this approach tio wide class of quasilinear elliptic, parabolic and hyperbolic problems, involving the systems of such equations and inequalities. Some advantage of this approach consists in the following:

1. we don't use the comparison principle and we don't use the analysis of lower (sub-)solution to the nonlinear problem;
2. simplicity and generality;
3. sharpness of results.

This approach was developed in our joint works with E. Mitidieri and A. Tesei.

Blow-up situation for a degenerate parabolic equation

Jacques Giacomoni
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

We consider the degenerate parabolic problem

$$\begin{cases} u_t + ax \cdot \nabla u - |x|^2 \Delta u = f(u), & x \in I\!R^N, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, & x \in I\!R^N, \end{cases}$$

where $a \in I\!R$ and $f : I\!R \to I\!R$ is a C^1 function. We obtain local existence results and then focus on the blow-up behavior when f is such that

$$f(u) > 0 \qquad \text{and} \qquad \int_u^\infty \frac{ds}{f(s)} < \infty \qquad \forall u > 0.$$

In particular, we describe the blow-up profile of the non-local solutions under quite general conditions. Differences with corresponding problem with uniform diffusivity (the heat equation) are stressed.

Un approccio topologico elementare alla risoluzione di equazioni nonlineari

Alfonso Vignoli

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"

Viene introdotto uno strumento che vuole generalizzare il grado topologico (Brouwer, Leray-Schauder, Nirenberg). L'aspetto più interessante di questo approccio è nel tentativo di rinunciare alla struttura vettoriale degli spazi dove agiscono gli operatori in questione. Non sono utilizzate tecniche di Topologia Algebrica. (I risultati sono stati ottenuti in collaborazione con Massimo Furi, Università di Firenze).

Nonlocal Operators and Feller Semigroups

Evgeny Galakhov
Moscow Aviation Institute / Universita' di Trieste

This communication is devoted to the joint results of A.L.Skubachevskii and the author concerning existence of a Feller (i. e. contractive and nonnegative) semigroup generated by a second-order elliptic operator with nonlocal conditions. Such problem arises in the theory of multidimensional diffusion processes, such as stochastic motion of a particle in a biological cell. It was usually considered in the case of a boundary condition containing first- or second-order terms (see [1]). The case of nonlocal perturbations of a Dirichlet condition was studied in [2].

Let $Q \subset \mathbf{R}^n$ be a bounded domain with boundary $\partial Q \in C^\infty$. We shall study a second order elliptic integro-differential operator $A : \mathcal{D}(A) \subset C(\overline{Q}) \to C(\overline{Q})$ which contains, in general, singular integral terms. Consider a nonlocal boundary condition

$$Bu(x) = -\eta(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n} + \gamma(x)u(x) + \int\limits_{\overline{Q}} [u(x) - u(y)]\mu(x, dy) = 0 \quad (x \in \partial Q),$$

where n is the inward unit normal, $\eta, \gamma \in C^{2+\sigma}(\partial Q)$ are nonnegative functions, and $\mu(x, \cdot)$ is a nonnegative Borel measure on $\overline{Q}$. If $\eta(x) > 0$ for all $x \in \partial Q$, then the measure $\mu(x, \cdot)$ can be singular. Otherwise it is supposed that it is bounded. Denote $C_B(\overline{Q}) = \{u \in C(\overline{Q}) : Bu = 0\}$. Define an operator $A_B : \mathcal{D}(A_B) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ by the formula $A_B u = Au \ \big(u \in \mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^2(Q) \cap C_B(\overline{Q}) : Au \in C_B(\overline{Q})\}\big)$. Under certain geometrical and smoothness assumptions imposed on the measure $\mu(x, \cdot)$, the following assertion holds.

Theorem. THE OPERATOR $\overline{A_B} : \mathcal{D}(\overline{A_B}) \subset C_B(\overline{Q}) \to C_B(\overline{Q})$ IS THE INFINITESIMAL GENERATOR OF A CONTRACTIVE NONNEGATIVE SEMIGROUP ON $C_B(\overline{Q})$.

The complete formulation and proof of this result are to be published in [3].

[1] Taira K., Diffusion Processes and Partial Differential Equations, New York – London, Academic Press, 1988.

[2] Galakhov E., Skubachevskii A. Matematicheskii Sbornik **189**:1(1998), 45 – 78; English translation in Math. Sb. **189**.

[3] Galakhov E., Skubachevskii A. Advances in Differential Equations (to appear in 2000).

Critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$ A sharp condition on the perturbation dividing existence and nonexistence.

S. Prashanth

Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Center
Indian Institute of Science, Bangalore (India)

In this talk we discuss a class of semilinear problems in two dimensions (with zero Dirchlet condition on the boundary) with nonlinearities behaving as a perturbation of $\exp(u^2)$. From the viewpoint of Trudinger-Moser embedding such nonlinearities have the critical growth and the standard procedures of Calculus of Variations break down. Infact, as is well understood for similar borderline problems in higher dimensions, one will expect both existence and nonexistence to occur for such nonlinearities. We show that this is indeed the case and obtain a sharp condition on the perturbation to the critical nonlinearity that determines existence or nonexistence.

Some Comparison, Symmetry and Monotonicity Results for Carnot-Carathéodory Spaces

Yuxin Ge
Université Paris XII

We consider here some elliptic differential operators arising from the so called Carnot-Carathéodory metric spaces associated with a family of vector fields $X = (X_1, \ldots, X_k)$, which include the Hörmander type as a special case. We prove some weak and strong comparison results for solutions of the relevant differential $inequalities$. Then using the generalized moving plane method, inspired by the work of Gidas-Ni-Nirenberg and Berestycki-Nirenberg, we obtain some symmetry properties of positive solutions of the semilinear elliptic partial differential equations. We will also establish some monotonicity results by the sliding method.

On the symmetry of solutions of the Ginzburg-Landau equations for small domains

Amandine Aftalion
Université Paris VI

This is a joint work with Norman Dancer (Sydney, Australia) We study the Ginzburg-Landau equations for a 2 dimensional domain which has small size. We prove that if the domain is a small disc then the solution is symmetric. And if the domain is small, then the solution in general has no zeroes, that is no vortex. The proof uses a priori estimates and the Poincaré inequality.

Stima asintotica delle norme di Sobolev per le soluzioni dell'equazione di Schrödinger

Gigliola Staffilani
Department of Mathematics
Stanford University, California (USA)

Lo scopo di questo seminario è presentare alcuni risultati recenti sul comportamento asintotico nel tempo delle norme di Sobolev per soluzioni globali di certe equazioni dispersive.

In particolare ci concentreremo sull'equazione di Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^2 u = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \qquad\qquad \phi \in H^s, \end{cases} \tag{1}$$

dove λ è un numero reale.

In 1-D il problema a valori iniziali (1) è un sistema integrabile, cioè ammette infinite leggi di conservazioni che coinvolgono tutte le norme di Sobolev e una combinazione oppurtuna di queste garantisce un controllo uniforme di tali norme nel tempo. Per il problema in dimensioni superiori tale integrabilità non vale e bisogna ricorrere a metodi alternativi.

Se partiamo dal presupposto che il problema (1) abbia una soluzione globale e che la stima a-priori [1]

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq C \tag{2}$$

sia valida. Recentemente Bourgain ha dimostrato che per $s \geq 1$:

- in 2-D vale il controllo polinomiale

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq ct^{2(s-1)} \quad t \to \infty \tag{3}$$

- in 3-D si ottiene il controllo uniforme

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq C(s). \tag{4}$$

Questo risultato sembrerebbe controintuitivo in quanto in generale il problema di esistenza e unicità della soluzione del problema (1) diventa più complesso con l'aumentare della dimensione dello spazio fisico. Ma la dimostrazione di Bourgain si basa sull'integrabilità all'infinito rispetto al tempo della stima

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{L^{\infty}*} * \leq |t|^{-n/2} * \|\phi\|_{L^1*} *, \tag{5}$$

[1] Nel caso in cui $\lambda < 0$ tale stima si può ottenere dalla legge di conservazione della Hamiltoniana.

dove $e^{it\Delta}\phi$ rappresenta la soluzione del problema lineare ed n rappresenta la dimensione. È chiaro che quando $n < 3$ tale integrabilità manca. È proprio per questa ragione che il caso $n = 2$ è considerato critico. La congettura che anche in questo caso le norme debbano essere uniformemente limitate è ancora aperta.

In un mio articolo del '97 e in uno piu' recente scritto in collaborazione con J. Colliander della University of California a Berkeley e C. Kening della University of Chicago, abbiamo osservato che alcune stime bilineari possono essere utilizzate per migliorare la stima (3) di Bourgain. Tali stime coinvolgono un nuovo tipo di spazio di Sobolev con pesi prima introdotto da Beals, poi ripreso da Bourgain per trattare il cao periodico, poi utilizzata in maniera estesa da Kenig-Ponce-Vega, da Klainerman-Mackedon e da molti altri. Riportiamo qui la definizione di tale spazio nel contesto dell'equazione di Schrödinger. Diremo che una funzione v appartiene allo spazio $X^{s,b}$, con b and s numeri reali, se

$$\|v\|_{X^{s,b}} = \left(\int |\hat{v}|^2(\xi,\tau)(1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau-|\xi|^2|)^{2b}\, d\xi d\tau \right)^{1/2} < \infty. \tag{6}$$

Il tipo di stima bilineare che usiamo può adesso essere formulata nel seguente teorema

Teorema. SE $s \in (-2/3, 0]$ ALLORA ESISTE $b > 1/2$ TALE CHE

$$\|\bar{v}\bar{u}\|_{x^{s,b-1}*} \leq c\|v\|_{X^{s,b}*} \|u\|_{X^{s,b}} \tag{7}$$

PER TUTTE LE FUNZIONI v, u CON LA NORMA FINITA NELLO SPAZIO $X^{s,b}$.

Seguendo poi un'idea di Bourgain usiamo questo teorema per ottenere la seguente stima locale per la soluzione di (1)

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u(kT)\|_{H^s} + C\|u(kT)\|_{H^s}^{1-\delta} \tag{8}$$

per tutti i numeri naturali k, dove $T = T(\|\phi\|_{H^1})$, $t \in [kT, (k+1)T]$ per tutti i numeri e $\delta = 3/2(s-1)^{-1}$. Iterando questa stima si ottiene il seguente teorema

Teorema.IN 2-D, LA SOLUZIONE GLOBALE $u(x,t)$ DEL PROBLEMA (1) SODDISFA LA STIMA ASINTOTICA

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq t^{2/3(s-1)} \quad \text{per } t \to \infty. \tag{9}$$

La dimostrazione del teorema 1 si basa su argomenti tipici di Analisi Armonica. Introduciamo una decomposizione diadica molto fine seguendo una simmetria parabolica, tipica del problema di Schrödinger. Il teorema e' “sharp” nel senso che (7) non e' piu' vera quando $s < -2/3$. Nonostante ciò non possiamo cocludere la stima polinomiale (9) sia la migliore.

Soluzioni classiche del problema di Hele-Shaw

Alessandra Lunardi
Dipartimento di Matematica
Università di Parma

Parlero' dei lavori di J. Escher e G. Simonett sull'esistenza e unicita' della soluzione classica del problema di Hele-Shaw a una e a due fasi, in dimensione qualunque, con e senza tensione superficiale. Il metodo seguito e' quello di ridurre il problema iniziale a frontiera libera ad uno a frontiera fissa, che risulta di tipo parabolico ma non locale, quasilineare nel caso di tensione superficiale non nulla, completamente nonlineare nel caso senza tensione superficiale.

Mathematical models for Ostwald Ripening: Derivation by homogenization

Barbara Niethammer

Institut für Angewandte Mathematik
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (Germania)

In the last stage of phase segregation processes one observes coarsening of the spatial distribution of two phases, which is driven by the reduction of interfacial energy and limited by diffusion. We are interested in the regime where one phase covers only a small fraction of the total volume and consists of many disconnected components ("particles"). In this situation, the energetically more advantageous large particles grow at the expense of the small ones, a phenomenon called Ostwald ripening. Lifshitz, Slyozov and Wagner (LSW) formally derived an evolution for the distribution of particle radii. Their model allows to make predictions on the long–time behavior of the coarsening particles, however, these predictions are only partly confirmed by experiments.

Thus, it is crucial to identify under which assumptions the LSW-model is strictly valid, and to derive extended versions.

This leads to the mathematical problem of homogenization of a free boundary problem, the so called Mullins-Sekerka model, where the transition between the two phases is modeled by a sharp interface. This interface is driven by the negative gradient of the chemical potential, which is harmonic in each phase and equals the mean curvature at the interface. This evolution preserves the volume fraction of each phase and decreases the interfacial area.

We are interested in the sitation which is considered by LSW, that is where one phase consists of many well separated balls with small total volume fraction. The main goal is to derive an ODE for the particle radii in this regime. Mathematically speaking, our aim is to identify the evolution of the particle radii in the homogenization limit of infinitely many particles with zero volume fraction. For that we use the fact the Mullins–Sekerka evolution has the structure of a gradient flow. This allows to exploit the Rayleigh principle, which characterizes a solution of a gradient flow system as a minimum of a quadratic functional. Hence, the analysis reduces to identifying the Γ–limit of this variational problem. In a quite general setting we otain an inhomogeneous extension of the LSW–model.

Elliptic and Parabolic Functional Differential Equations and Applications

Alexander L. Skubachevskii
Moscow "S. Ordzhonikidze" Aviation Institute
Mosca (Russia)

Elliptic and parabolic functional differential equations have many important applications: to nonlinear optics, to plazma theory, to the theory of sandwich shells and plates, to the theory of multidimensional diffusion processes and so on. On the other hand such equations have some new astonishing properties. For example, smoothness of generalized solutions can be broken inside domain even for infinitely differentiable right hand parts of equation.

We consider spectral properties of strongly elliptic functional differential operators and smoothness of generalized solutions in some subdomains. These results allow to prove solvability and smoothness of generalized solutions of parabolic functional-differential equations.

Il ruolo della capacità nello studio delle equazioni ellittiche con dati misure

Luigi Orsina
Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

In questo seminario tenterò di spiegare l'importanza della capacità nello studio delle equazioni ellittiche con dati misura. Più precisamente, dopo aver mostrato l'effetto sulla soluzione di misure concentrate su insiemi di capacità nulla, utilizzerò tale risultato per dimostrare alcuni teoremi di non esistenza di soluzioni per equazioni ellittiche con perturbazioni di ordine inferiore e dati misura.

Colloquio di Dipartimento

A problem arising from economics

Louis Nirenberg

Courant Institute of Mathematical Sciences
New York University (USA)

La trasformata di Fourier locale per iperfunzioni

Otto Liess

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

Scopo del seminario è di presentare alcuni risultati ottenuti recentemente, in parte in collaborazione con Y.Okada e N.Tose, sulla trasformata Fourier locale nell'ambito delle iperfunzioni. Comincierò con esempi legati ad operatori di tipo Fuchsiano e del tipo Mizohata, per poi esporre una teoria della trasformata Fourier locale per iperfunzioni classiche, e tempo permettendo, nonclassiche. L'interesse di questo tipo di costruzioni e risultati consiste nel fatto che permettono di unificare il punto di vista geometrico con quello analitico nella microlocalizzazione (classica o di ordine superiore) analitica. Costruzioni simili sono validi nella microlocalizzazione $\mathcal{C}^\infty$, ma sono più semplici.

About the problem of combustion of a droplet in a hot gas

Alice Simon

Département de Mathématiques
Université d'Orléans (Francia)

We consider a spherical vase full of a hot gas. In the center of the ball, a droplet of liquid is fixed. The problem is to study the evolution of the drop. The physicists assume that the droplet remains spherical, and they work in polar coordinates. The radius of the drop is given by some physical laws, that lead to a differential equation. We studied the equations for the remaining unknowns (a parabolic system) and show the existence of bounded solutions, under regularity assumptions.

Metriche Finsleriane e non ed equazioni di Hamilton-Jacobi

Antonio Siconolfi

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

Il carattere metrico dell'equazione di Hamilton-Jacobi di tipo iconale $H(x, Du) = 0$ (con $H(x, 0) < 0$ per ogni x) e' stato messo in luce già da Kruzkov, P.L. Lions ed altri nel caso l'Hamiltoniana sia convessa nel secondo argomento . La metrica associata all'equazione è di tipo Finsleriano.

Si propone una generalizzazione al caso non convesso, questo viene messo in relazione con i risultati di un vecchio articolo di Busemann e Mayer (1941) di calcolo delle variazioni. Viene poi studiata la natura non Finsleriana della distanza associata all'equazione per H non convesso e si illustra una proprietà di compatibilità tra convessificazione dell'equazione e della metrica.

I risultati vengono applicati ad un problema di tipo evolutivo e ad una estensione della formula di Lax-Oleinik . In particolare l'evoluzione dei fronti collegata viene descritta utilizzando la metrica citata.

Kinetic diffusive approximation of nonlinear degenerate parabolic-hyperbolic problems

Denise Aregba-Driollet
Università di Bordeaux

A nonlinear convection-diffusion equation with possibly strongly degenerate diffusion can be approximated by a system of semilinear hyperbolic equations where both characteristic velocities and source term become singular. This system is formally like a kinetic BGK model. In this talk we construct such models and we show how they are useful to design new numerical schemes owning interesting properties of simplicity, flexibility, stability and efficiency. This work is made in collaboration with R. Natalini (Rome) and S. Tang (Beijing).

On non-degeneracy of solutions of some class of semilinear elliptic problems and applications

P.N. Srikanth

Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Center
Indian Institute of Science, Bangalore (India)

For a special class of parameter dependent problems posed in a ball it is shown how information can be extracted from certain integrals to prove the nondegeneracy of solutions. Specific applications are in the case when the nonlinearity is the sum of a power plus a linear term or plus a constant.

Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems involving quasilinear and semilinear terms

Jean-Pierre Puel

Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Université de Versailles (Francia)

We will give some existence and nonexistence results for positive solutions of the following quasilinear elliptic problem

$$-\Delta u + g(u)\,|\nabla u|^2 = \lambda\, u^p$$

with zero Dirichlet boundary conditions, where Ω is a bounded open subset of $\mathbf{R}^N$, $N \geq 1$, $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ is a nonnegative continuous function, λ is a real number and $p > 1$.

Dinamica neurale e locomozione di Ascaris

Robert E.L. Turner
Department of Mathematics
University of Wisconsin, Madison (USA)

Cominciamo con una descrizione del lavoro classico di Hodgkin e Huxley che hanno usato il calamaro per scoprire i meccanismi del movimento degli ioni attraverso i canali nei neuroni. Gli autori hanno spiegato il fondamentale 'potentiale di azione'. Quest'ultimo modello e diventato 'standard' e loro hanno vinto il premio Nobel per il lavoro.

Lavorando con modelli simili, basati sulle equazioni differenziali, noi produciamo un modello per la cellula muscolare nel nematode Ascaris. Questo modello ha diverse proprietà che corrispondono a quelle registrate in laboratorio. Mettendo insieme catene di cellule, possiamo simulare certe onde di contrazione che si osservano nel verme.

Unicità della soluzione di equazioni ellittiche semilineari

Massimo Grossi
Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

Si considerano dei risultati di unicità della soluzione positiva per il problema

$$-\Delta u = f_\epsilon(u) \quad \text{in } \Omega \tag{1}$$

dove Ω è un dominio convesso e simmetrico. Le condizioni al bordo che si considerano sono di Dirichlet o di Neumann.

Considereremo opportune non linearità $f_\epsilon(u)$ tali che la corrispondente soluzione abbia un comportamento di blow-up in qualche punto e ne proveremo l'unicità per ϵ piccolo. Alcuni esempi che si adattano alle nostre tecniche sono dati da $f_\epsilon(u) = u^{\frac{n+2}{n-2}-\epsilon}$ con condizioni di Dirichlet oppure $f_\epsilon(u) = \frac{1}{\epsilon}(u^p - u)$ con condizioni di Neumann e $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$.

La dimostrazione di questi risultati si basa su una tecnica abbastanza generale che riconduce sostanzialmente il problema dell'unicità a quello dello studio dell'equazione linearizzata di un opportuno problema all'infinito. Tuttavia, a tale scopo, avremo bisogno di conoscere in modo accurato il comportamento asintotico delle soluzioni di (1) quando $\epsilon \to 0$.

Si accennerà infine alla possibilità di applicare queste tecniche all'equazione di Schrödinger non lineare.

Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger operators with trapping perturbations

Vesselin Petkov
Départment de Mathématiques Appliquées
Université de Bordeaux I (Francia)

In a joint work with V. Bruneau we study the semiclassical estimates for the resolvent $R_h(z) = (L(h) - z)^{-1},\ z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, of a self-adjoint Schrödinger operator $L(h) = -h^2\Delta + V(x)$ depending on the constant $h \in]0, h_0]$ with symbol $l(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$. Consider the trajectories of the Hamiltonian flow $\exp(tH_l)$ lying on the energy surface $\Sigma_\lambda = \{(x, \xi) \in \mathbf{R}^{2n} : l(x, \xi) = \lambda\}$. The case when all these trajectories are non-trapping for every energy surface $\Sigma_\lambda,\ \lambda \in J \subset\subset \mathbf{R}^+$ was treated by many authors. Following Mourre theory, they proved the estimate

$$\|R_h(\lambda + i0)\|_{-s,s} \leq Ch^{-1},\ \ \lambda \in J,\ h \in]0, h_0], \tag{10}$$

where

$$R_h(\lambda + i0) = \lim_{\epsilon \to 0,\ \epsilon > 0} R_h(\lambda + i\epsilon)$$

and $\|.\|_{-s,s}$ denotes the norm in the space of bounded operators $\mathcal{L}(H_{-s}, H_s)$, H_s being the weight spaces $H_s = L^2(\mathbf{R}^n :\ (1 + |x|^2)^{s/2}dx)$. The semiclassical estimates of the resolvent $R(\lambda{+}i0)$ are crucial in many applications concerning the spectral and scattering theory of Schrödinger type opertators. From physical point of view the non-trapping condition on the trajectories on the surfaces $\Sigma_\lambda,\ \lambda \in J$, is too restrictive. On the other hand, the only known result for trapping potential is that for a potential having the form of an "well in an island" when the estimate (1) holds with a bound $C\exp(Ch^{-1})$ at the right hand side. We treat this problem in great generality covering the case of long-range and metric perturbationsas as well as so called "black box" perturbations covering many boundary problems. Our main result says that without any condition on the geometry of the Hamiltonian trajectories we have the estimate

$$\|R_h(\lambda + i0)\|_{-s,s} \leq C\exp(Ch^{-p}),\ \ \lambda \in J,\ p \geq 1,\ h \in]0, h_0]. \tag{11}$$

The proofs are based on the idea that we can construct an operator $\tilde{L}(h)$ such that the difference $L(h) - \tilde{L}(h)$ is a compactly supported operator and, moreover, all Hamiltonian trajectories related to $\tilde{L}$ are non-trapping. Finally, some applications concerning microlocal semiclassical estimates and Weyl type asymptotics for the scattering phase are given.

Stability of viscous shock fronts

Kevin Zumbrun
Mathematics Department
Indiana University, Bloomington (USA)

We discuss recent advances in the stability theory for shock fronts taking into account viscosity. These include results for strong shocks and the first multidimensional results for systems; moreover, we considerably simplify the analysis even in the one-dimensional case.

Su una classe di equazioni ellittiche superlineari con nonlinearità di segno variabile

Michele Matzeu

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "Tor Vergata"

Si considera un problema semilineare ellittico del tipo

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda a(x)u(x) = W(x)f(u(x)), & x \in \Omega, \\ \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con Ω aperto regolare di $I\!R^N$, $N \geq 3$, a, W continue, di segno variabile su $\overline{\Omega}$, λ parametro reale, f continua su $I\!R$, a crescita superlineare nell'origine e all'infinito, ed $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)$ ds con esponente di crescita $\beta \in (2, 2^*)$ ove 2^* è l'esponente critico di Sobolev.

Sotto una particolare ipotesi sul "gap di omogeneità" di grado β di F, espresso da un termine quadratico il cui coefficiente sia controllato da un'espressione contenente β, λ, da opportuni autovalori degli operatori $-\Delta$, $-\Delta/a^+(x)$, $-\Delta/a^-(x)$ (determinati dalla posizione di λ) e dal massimo della parte negativa di $W(x)$, si verifica che il funzionale associato al problema (P) in $H_0^1(\Omega)$ soddisfa la condizione di Palais-Smale.

Si ottengono soluzioni di Passo Montano e soluzioni di linking, sempre in relazione alla posizione di λ rispetto agli autovalori di $-\Delta$, $-\Delta/a^+(x)$, $-\Delta/a^-(x)$, imponendo ulteriori condizioni di tipo integrale su $W(x)F(v(x))$, al variare di v su opportuni sottospazi finito-dimensionale di $H_0^1(\Omega)$ collegati con gli autovalori di $-\Delta/a^+(x)$ e di $-\Delta/a^-(x)$.

Si estendono, con tali risultati, alcuni ben noti risultati di Ambrosetti e Rabinowitz relativi al caso in cui a e W siano positive.

Improved Hardy-Sobolev inequalities, and applications to partial differential equations

Mythily Ramaswamy
Tata Institute of Fundamental Research (TIFR) Center
Indian Institute of Science, Bangalore (India)

The classical Hardy-Sobolev inequality

$$\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 \int\limits_\Omega \frac{u^2}{|x|}\,dx \le \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

for $u \in H_0^1(\Omega)$, Ω bounded domain in $I\!R^N$, $N \geq 3$, can be improved by adding to the lefthand side terms like $\int u^2\,dx$ or $\int u^2\,h(x)\,dx$ for different singular weights $h(x)$, having a lower order singularity at 0 than $\frac{1}{|x|^2}$. We explore the limiting singularities beyond which such an inequality cannot hold. These inequalities are used to prove that the first eigenvalues of the problem

$$\begin{cases} -\Delta\phi - \mu\frac{\phi}{|x|^2} = \lambda_{1,\mu}(h)\phi \cdot h(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

tend to some $\lambda^*(h) > 0$ as $\mu \to \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$. The failure of such an inequlity is used to show that $\lambda^*(h) = 0$ for certain singular weights.

La funzione di Green in un diedro: esistenza, unicità, stime

Maria Giovanna Garroni
Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università di Roma "La Sapienza"

Dato il problema del calore in un diedro con generali condizioni sulle facce (Dirichlet, Neumann, derivate oblique) si dimostra l'esistenza e unicità della funzione di Green e si provano stime che ne descrivano il comportamento in ogni punto singolare e la velocità di decrescenza all'infinito, ottenendo risultati analoghi a quelli noti nel caso di domini regolari.

Inverse boundary problems and continued fractions

David V. Ingerman
Department of Mathematics
Massachusettes Institute of Technology, Boston (USA)

The inverse boundary problems are problems of determining a differential equation from boundary values of its solutions. I will show examples of the inverse problems that are equivalent to representing numbers, functions or linear operators by continued fractions. The representations help to analyse the ill-posedness of the problems and to construct exponentially fast discrete approximations to restrictions of PDE solutions.

Boundary value problems at infinity for surfaces of constant mean curvature in Hyperbolic space

Joel Spruck

Department of Mathematics
Johns Hopkins University, Baltimore (USA)

In this talk, we consider the problem of finding a complete surface of constant mean curvature in Hyperbolic space with prescribed boundary at infinity. This problem can be described very nicely in the half-space model and leads to a novel and interesting (degenerate) elliptic pde problem for the height function of the surface (we seek the surface as a graph in horosphere coordinates) . We will give discuss some partial answers and many open questions.

A homology associated to a contact form on a space of dual Legendrian curves

Abbas Bahri
Department of Mathematics
Rutgers University, New Brunswick (USA)

Considering a contact form on a three- dimensional manifold, we construct variational problem on a subspace of the loop space of this manifold. We build a pseudogradient which enjoys several analytical and geometrical properties. Using the flow-lines of this pseudogradient, we define a homology the value of which is still unknown.

Mathematical Problems in Meteorology and Oceanography

Roger Temam

Laboratoire d'Analyse Numerique
Université de Paris XI (Francia)

In this lecture we recall the fundamental equations of meteorology and oceanography (primitive equations with viscosity), and show the well-posedness of these equations under a very natural assumption. The corresponding dynamical systems are also discussed.

An Impulse Control of a Stochastic Navier-Stokes Equation

José Luis Menaldi
Department of Mathematics
Wayne State University, Detroit (USA)

In this paper, in collaboration with S.S. Sritharan, we study impulse and stopping problems for stochastic Navier-Stokes equation. Exploiting a local monotonicity property of the nonlinearity, we estabilish existence and uniqueness of strong solutions in two dimensions which gives a Markov-Feller process. The variational inequality associated with the impulse control problem are resolved in a weak sense using semigroup approach.