

SEMINARIO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI  
ANNO ACCADEMICO 2007/08

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA G. CASTELNUOVO  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Lunedì 24 Settembre 2007

**Norimichi HIRANO**

YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY

*Existence and Multiplicity of Solutions of Coupled Schrödinger equations*

**Abstract.** In this talk, we consider multiple existence of nonradial solutions of coupled Schrödinger equations

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu_1 u = u^3 + \beta uv^2 & \text{in } \mathbb{R}^3 \\ -\Delta v + \mu_2 v = v^3 + \beta u^2 v & \text{in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

where  $\mu_1, \mu_2 > 0$  and  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Coupled nonlinear Schrödinger equations are models of some physical phenomena. We will consider the existence and multiplicity of solutions of this problem by using a variational method.

Lunedì 1 Ottobre 2007

**Shigeaki KOIKE**

SAITAMA UNIVERSITY

*The maximum principle for fully nonlinear PDEs with unbounded coefficients*

**Abstract.** I would like to discuss on the ABP type maximum principle of  $L^p$ -viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs:

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du| = f(x) \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

where  $\mathcal{P}^+(D^2u) := \max\{-\text{trace}(AX) \mid \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$ ,  $\mu \in L^q(\Omega)$  and  $f \in L^p(\Omega)$ . It is well-known that  $L^n$ -strong solutions of (1) admit the ABP maximum principle when  $f, \mu \in L^n(\Omega)$ . However, to show the ABP maximum principle for  $L^n$ -viscosity solutions, we need a recent result by Świech and myself.

In this talk, we also give the weak Harnack inequality for non-negative  $L^p$ -viscosity supersolutions of the above PDE when  $f \in L^p(\Omega)$  and  $\mu \in L^q(\Omega)$  for  $q \geq n$  and  $q \geq p > p_0$  (under some restriction), where  $p_0 \in [n/2, n)$  is the so-called Escoriaza constant. We then give a strong maximum principle, a verification result (i.e. " $L^p$ -strong solutions are indeed  $L^p$ -viscosity solutions") which has never been mentioned if we have unbounded  $\mu$ , the boundary weak Harnack inequality, etc. This is a joint work with A. Świech.

Lunedì 8 Ottobre 2007

**José M. MAZON**  
UNIVERSITAT DE VALENCIA

*The limit as  $p \rightarrow \infty$  in a nonlocal  $p$ -Laplacian evolution equation. A nonlocal approximation of a model for sandpiles*

**Abstract.** We study the nonlocal  $\infty$ -Laplacian type diffusion equation, obtained as the limit as  $p \rightarrow \infty$  of solutions to the nonlocal analogous to the  $p$ -Laplacian evolution,

$$u_t(t, x) = \int_{\mathbb{R}^N} J(x - y) |u(t, y) - u(t, x)|^{p-2} (u(t, y) - u(t, x)) dy.$$

We prove existence and uniqueness of a limit solution that verifies an equation governed by the subdifferential of a convex energy functional associated to the indicator function of the set  $K = \{u : |u(x) - u(y)| \leq 1, \text{ when } x - y \in \text{supp}(J)\}$ . We also find some explicit examples of solutions to the limit equation.

If the kernel  $J$  is rescaled in an appropriate way, we show that the solutions to the corresponding nonlocal problems converge strongly in  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  to the limit solution of the local evolutions of the  $p$ -laplacian,  $v_t = \Delta_p v$ . This last limit problem has been proposed as a model to describe the formation of a sandpile. Moreover, we also analyze the collapse of the initial condition when it does not belong to  $K$  by means of a suitable rescale of the solution that describes the initial layer that appears for  $p$  large.

Finally, we give an interpretation of the limit problem in terms of Monge-Kantorovich mass transport theory.

Lunedì 15 Ottobre 2007

**Neil S. TRUDINGER**  
AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY

*On regularity in optimal transportation*

**Abstract.** In this talk I report on recent work with Xu-jia Wang concerning conditions for diffeomorphism solutions of optimal transportation problems.

Lunedì 22 Ottobre 2007

**Patrick BERNARD**  
CEREMADE, PARIS-DAUPHINE

*$C^{1,1}$  solutions of the Hamilton-Jacobi equation*

**Abstract.** I will prove the existence of a  $C^{1,1}$  solution to the Hamilton-Jacobi equation in the context of weak KAM theory.

Lunedì 29 Ottobre 2007

**Juan CASADO-DIAZ**  
UNIVERSITY OF SEVILLA

*Uniform convergence for the solutions of elliptic problems with unbounded coefficients in two dimensions. Applications.*

**Abstract.** For a sequence of second members sufficiently smooth, we prove the compactness in  $C^0$  of the solutions of linear elliptic problems with unbounded coefficients in two dimensions. We show that these results do not generalize to higher dimensions. As an application we realize the homogenization of this type of problems.

Lunedì 12 Novembre 2007

**Filomena PACELLA**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Risultati di simmetria per soluzioni di equazioni ellittiche semilineari.*

**Abstract.**

Nello studio delle proprietà di simmetria di soluzioni di equazioni differenziali non lineari è ormai classico il risultato di Gidas, Ni e Nirenberg del 1979, ottenuto mediante il metodo di spostamento di iperpiani paralleli. Tale teorema assicura, in ipotesi abbastanza generali, che "tutta" la simmetria del dominio viene trasmessa a tutte le soluzioni positive di alcuni problemi di Dirichlet, in particolare se il dominio è una palla le soluzioni positive sono radiali. D'altra parte è facile esibire semplici controesempi in cui il teorema di Gidas, Ni e Nirenberg non è applicabile ed infatti esistono soluzioni che non rispecchiano la simmetria del dominio. Tuttavia per alcuni tipi di equazioni e per alcune soluzioni, in particolare quelle ottenute mediante metodi variazionali, sia simulazioni numeriche, sia considerazioni di tipo "energetico" inducono a pensare che almeno una parte della simmetria del dominio debba essere trasmessa alle soluzioni. Nel seminario verranno illustrati alcuni recenti risultati in questa direzione ottenuti mediante il principio del massimo ed utilizzando informazioni sull'indice di Morse delle soluzioni.

Lunedì 19 Novembre 2007

**Andrea DAVINI**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Omogeneizzazione di equazioni di Hamilton-Jacobi: dal caso periodico a quello stazionario ergodico.*

**Abstract.**

I principali risultati di omogeneizzazione per Hamiltoniane periodiche vengono stabiliti nel 1987 in un celebre lavoro mai pubblicato a firma di Lions, Papanicolaou e Varadhan. Più recentemente, tali risultati sono stati estesi da Arisawa e da Ishii al caso quasi-periodico e almost-periodic, e da Rezakhanlou e Tarver e da Souganidis al caso stazionario ergodico. Nei casi periodico e almost-periodic il passo cruciale è quello di mostrare l'esistenza di correttori esatti o approssimati a crescita sublineare all'infinito. Nel caso stazionario ergodico l'esistenza di correttori approssimati non è garantita. In questo caso, la dimostrazione si basa sulla

rappresentazione variazionale delle soluzioni tramite la formula di Lax-Oleinik e sull'uso teorema subadditivo ergodico per passare al limite. In questo seminario, si vuole introdurre il problema relativo all'esistenza di correttori e quasi-correttori nel caso stazionario ergodico, evidenziando il suo collegamento con l'omogeneizzazione e le principali differenze con i casi precedenti. Si illustreranno infine alcuni risultati recentemente ottenuti sull'argomento in collaborazione con Antonio Siconolfi.

Lunedì 26 Novembre 2007

**Marcello PONSIGLIONE**  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Metodi variazionali per modelli statici dei difetti nei cristalli.*

**Abstract.**

Un cristallo ideale è un oggetto caratterizzato da una disposizione periodica di atomi (o ioni o molecole) che si ripete indefinitamente, detta reticolo cristallino. Tutti i cristalli reali risultano imperfetti: numerosi atomi occupano posizioni non corrette o sono vacanti nei siti reticolari che dovrebbero occupare. Questi "difetti" influenzano le proprietà fisiche del cristallo, e sono alla base del fenomeno di plasticizzazione dei cristalli. Ogni difetto provoca una "deformazione interna" nel cristallo, alla quale si può associare una energia elastica. In questo seminario descriverò alcuni metodi variazionali per modellizzare l'energia elastica indotta da una classe di difetti chiamati dislocazioni, e descriverò un lavoro in collaborazione con Adriana Garroni e Giovanni Leoni, in cui studiamo il passaggio dal discreto al continuo in tali modelli, in termini di Gamma-convergenza dei corrispondenti funzionali dell'energia elastica. I punti di minimo di tali funzionali sono funzioni a valori matrici (che rappresentano il gradiente di deformazione), che risolvono un'equazione lineare in forma di divergenza, e che hanno rotore concentrato in un piccolo intorno delle zone dislocate. Quando la distanza atomica tende a zero, il rotore di tali campi tende a concentrarsi; questo produce un corrispondente fenomeno di concentrazione dell'energia simile a quanto avviene per i funzionali di tipo "Ginzburg Landau" in problemi di vorticità.

Lunedì 3 Dicembre 2007

**Italo CAPUZZO DOLCETTA**  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Alcune proprietà locali e globali di soluzioni viscosità di equazioni ellittiche.*

**Abstract.** Parlerò di alcuni risultati recenti, in collaborazione con F. Leoni e A. Vitolo (Università di Salerno), che riguardano le soluzioni viscosità di equazioni del tipo  $F(x, u, Du, D^2u) = 0$  in condizioni di ellitticità per  $F$ . Gli argomenti riguardano la validità di Principii di Massimo e di Phragmen-Lindelof in domini illimitati generali e stime quantitative del gradiente per soluzioni positive.

Lunedì 10 Dicembre 2007

**Corrado MASCIA**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Sistemi iperbolici di rilassamento: la condizione di Shizuta-Kawashima. E oltre.*

**Abstract.** La quasi totalità dei lavori di stabilità asintotica nell'ambito dei sistemi iperbolici di rilassamento si basa sulla condizione di Shizuta-Kawashima, che, in sostanza, è una richiesta di decadimento delle perturbazioni di stati di equilibrio omogenei.

Dopo aver presentato la condizione di Shizuta-Kawashima nelle sue molteplici manifestazioni analitiche, intendo mostrare quali panorami possano comparire nel caso in cui tale condizione non sia soddisfatta, con particolare attenzione alla questione della stabilità di stati di equilibrio omogenei e non.

I risultati originali sono ottenuti in collaborazione con R.Natalini.

Lunedì 17 Dicembre 2007

**Carlo SINISTRARI**

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

*Moto per curvatura media e applicazioni topologiche.*

**Abstract.** È noto che le superfici che si evolvono per curvatura media sviluppano in generale singolarità in tempo finito. In un recente lavoro con G. Huisken abbiamo introdotto un'evoluzione generalizzata per tempi successivi alla formazione di singolarità basata su una procedura di chirurgia. Tale procedura è ispirata alla costruzione di Hamilton e Perelman per il flusso di Ricci. Rispetto alle nozioni di soluzione debole esistenti in letteratura, il flusso con chirurgia ha la caratteristica di consentire una classificazione topologica delle superfici in esame. Nel seminario si descriveranno i passaggi principali del procedimento e le applicazioni topologiche, discutendo le analogie e differenze con il caso del flusso di Ricci.

Lunedì 21 Gennaio 2008

**Luis VEGA**

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO, BILBAO

*Hardy's Uncertainty Principle, Convexity and Schrödinger Evolutions .*

**Abstract.** We prove the logarithmic convexity of certain quantities, which measure the quadratic exponential decay at infinity and within two characteristic hyperplanes of solutions of Schrödinger evolutions. As a consequence we obtain some uniqueness results that generalize (a weak form of) Hardy's version of the uncertainty principle.

Lunedì 28 Gennaio 2008

**Daniele BARTOLUCCI**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Un risultato di unicità per equazioni di campo medio con dati singolari.*

**Abstract.**

Discuteremo un risultato di unicità per equazioni di campo medio, di tipo Liouville in dimensione 2, con dati delta di Dirac su domini limitati e semplicemente connessi recentemente ottenuto in collaborazione con C.S. Lin.

Lunedì 4 Febbraio 2008

**Manuel DEL PINO**  
UNIVERSIDAD DE CHILE

*Bubbling near boundary geodesics for nonlinear elliptic problems: the role of the second critical exponent.*

**Abstract.**

This talk deals with the classical elliptic problem  $\Delta u + u^p = 0$ ,  $u > 0$ , under zero Dirichlet boundary conditions in a bounded domain in  $\mathbb{R}^N$ , when  $p > 1$  is above Sobolev's critical exponent  $\frac{N+2}{N-2}$ . We show that, if  $p = \frac{N+1}{N-3} - \varepsilon$ , with  $\varepsilon > 0$ , there is a solution  $u_\varepsilon$  concentrating as  $\varepsilon \rightarrow 0$  near a given geodesic of the boundary with negative curvature when measured with respect to the outer normal. This is joint work with Monica Musso and Frank Pacard.

Lunedì 11 Febbraio 2008

**Luca FANELLI**  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Identità del viriale magnetica e stime dispersive*

**Abstract.**

L'intento del seminario è di presentare alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con L. Vega, riguardanti una classe di equazioni dispersive in presenza di campi magnetici esterni. Verrà introdotta una versione evolutiva magnetica dell'identità del viriale per le equazioni di Schroedinger e delle onde, che estende la ben nota identità di convessità per la dinamica libera e per alcune equazioni nonlineari. Si mostreranno infine alcune applicazioni riguardanti stime di tipo dispersivo (Morawetz e smoothing) per le suddette equazioni.

Lunedì 18 Febbraio 2008

**Michael PLUM**  
UNIVERSITÄT FRIDERICIANA (TH) KARLSRUHE

*Existence and Multiplicity Proofs for Semilinear Elliptic Boundary Value Problems by Computer Assistance*

**Abstract.**

Many boundary value problems for semilinear elliptic partial differential equations allow very stable numerical computations of approximate solutions, but are still lacking analytical existence proofs. In this lecture, a method will be proposed which exploits the knowledge of a "good" numerical approximate solution, in order to provide a rigorous proof of an exact solution close to the approximate one. This goal is achieved by a fixed-point argument which takes all numerical errors

into account, and thus gives a mathematical proof which is not “worse” than any purely analytical one. The method is used to prove existence and multiplicity statements for some specific examples, including cases where purely analytical methods had not been successful.

Lunedì 25 Febbraio 2008

**Andrea DALL’AGLIO**  
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Due problemi parabolici non lineari*

**Abstract.**

In questo seminario illustrerò alcune recenti ricerche in collaborazione con B. Abdellaoui, D. Giachetti, I. Peral e S. Segura, riguardanti, da un lato, equazioni paraboliche semilineari con termini di sorgente a crescita leggermente superlineare e dati misura; dall’altro, problemi parabolici con termini del primo ordine a crescita quadratica nel gradiente. I due problemi risultano fortemente collegati tra loro mediante un cambio di funzione incognita. Il risultato di esistenza per il primo problema si traduce in un risultato di forte non unicità per il secondo. Lo studio di questo tipo di equazioni fa uso in modo essenziale di una classe di disuguaglianze logaritmiche di Sobolev.

Lunedì 3 Marzo 2008

**Miguel ESCOBEDO**  
UNIVERSITÀ DI BILBAO

*Selfsimilar solutions for the coagulation equation.*

**Abstract.**

I shall consider the Smoluchowski coagulation and give some brief physical motivation. Then I will present our existence result of self similar solutions for several coagulation kernels. I will finally present a brief description of the proof and some extensions of the result to coagulation fragmentation equations.

Lunedì 10 Marzo 2008

**Giuseppe SAVARE**  
UNIVERSITÀ DI PAVIA

*Flussi gradiente: dagli spazi di Hilbert agli spazi metrici. .*

**Abstract.**

Il seminario intende mostrare come alcuni importanti risultati della teoria dei flussi gradiente generati da funzionali convessi negli spazi di Hilbert non dipendono dalla struttura lineare dello spazio ambiente e possono quindi essere estesi a spazi metrici più generali.

Il punto fondamentale della teoria è la costruzione di un semigruppato di contrazioni mediante uno schema variazionale di approssimazione. Come nel classico risultato di Crandall-Liggett, la convergenza dello schema non dipende da

argomenti di compattezza ma da opportune stime dell'errore che, in ambito metrico, sono influenzate da due proprietà dello spazio: la semi-concavità della distanza e una compatibilità locale degli angoli formati dalle geodetiche.

Combinando questi risultati con alcuni argomenti di trasporto ottimo e teoria della misura, è possibile costruire anche in spazi metrici privi di una struttura differenziabile regolare un semigruppato di diffusione lineare con proprietà analoghe al semigruppato del calore.

Lunedì 17 Marzo 2008

**Alberto TESEI**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Transizioni di fase, entropia e isteresi.*

**Abstract.**

Scopo del seminario è presentare alcuni recenti risultati, relativi ad una equazione parabolica quasilineare "forward-backward". Equazioni di questo tipo descrivono transizioni di fase, fenomeni di aggregazione di popolazioni, flussi gradiente associati a funzionali non convessi.

Fra le varie regolarizzazioni proposte per l'equazione, quella pseudoparabolica trattata nel seminario dà luogo ad una famiglia di disuguaglianze di entropia che selezionano le direzioni di propagazione ammissibili dell'interfaccia. La dinamica di transizione tra fasi diverse descrive fenomeni di isteresi tipici delle transizioni di fase del primo ordine.

Il limite di viscosità evanescente delle soluzioni regolarizzate di problemi di valori iniziali porta a considerare soluzioni entropiche a valori misure di Young, la cui unicità non è nota. Nel seminario saranno presentati recenti risultati, ottenuti in collaborazione con C. Mascia e A. Terracina, di buona posizione del problema di Cauchy in una classe più ristretta di soluzioni entropiche.

Lunedì 31 Marzo 2008

**Graziano CRASTA**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*La funzione distanza dal bordo: proprietà e applicazioni.*

**Abstract.**

Descriverò alcune proprietà della funzione distanza dal bordo di un dominio regolare nel caso isotropo (metrica Euclidea) e anisotropo (metrica Minkowskiana). Illustrerò alcune applicazioni a problemi di minimo del calcolo delle variazioni e a problemi legati al trasporto ottimale di massa.

Lunedì 7 Aprile 2008

**Albert FATHI**

ENS LYON

*Denjoy-Schwartz and Hamilton-Jacobi or Why Dynamics matters.*

**Abstract.**



Given a  $C^2$  Hamiltonian  $H(x, p)$ ,  $C^2$ -strictly convex in the moment variable, it has been shown by Patrick Bernard one can always find  $C^1$  strict subsolutions with locally Lipschitz derivative of the Hamilton-Jacobi equation. After explaining the general background for the non-specialist, the talk will concentrate on the constraints imposed on smoother critical subsolutions by the implications of the classical Denjoy-Schwartz theory of Dynamical Systems on the circle or the 2-dimensional torus.

Lunedì 14 Aprile 2008

**Enrico VALDINOCI**

UNIVERSITÀ DI ROMA "TOR VERGATA"

*Un approccio geometrico alle equazioni quasilineari .*

**Abstract.** Discuteremo alcune formule di tipo Poincaré che stimano curvatures e gradienti tangenziali degli insiemi di livello delle soluzioni di equazioni ellittiche. Da ciò , otterremo in alcuni casi particolari la simmetria unidimensionale delle soluzioni.

Lunedì 28 Aprile 2008

**Adriano PISANTE**

SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

*Simmetria per soluzioni intere delle equazioni di Ginzburg-Landau in dimensione tre.*

**Abstract.** Discutiamo proprietà di simmetria e di simmetria asintotica per le soluzioni intere non costanti delle equazioni di Ginzburg-Landau per mappe dallo spazio tridimensionale in sé . Nel caso di minimi locali del funzionale energia corrispondente otteniamo una classificazione completa in termini di soluzioni equivarianti rispetto all'azione naturale del gruppo ortogonale.

Lunedì 12 Maggio 2008

**Jungcheng WEI**

CHINESE UNIVERSITY OF HONG KONG

*Infinitely many positive solutions for nonlinear problems with critical exponents.*

**Abstract.** For some nonlinear elliptic problems with critical exponents (prescribed scalar curvature problem on  $S^N$ , Lazer-McKenna conjecture, nonlinear Schrodinger equations in  $R^N$ ), we prove the existence of infinitely many positive solutions. Joint work with Yan.

Lunedì 26 Maggio 2008

**Nabile BOUSSAID**

UNIVERSITÉ DE BESANCON

*Limiting absorption principle for some long range perturbations of Dirac systems at threshold energies.*

**Abstract.** We establish a limiting absorption principle for some long range perturbations of the Dirac systems at threshold energies. We cover coulombic interaction with small coupling constants. Our analysis is reduced to do the study a non-self-adjoint operator and our technique is based on a positive commutator theory for non-self-adjoint operator.

Lunedì 26 Maggio 2008

**Thomas BARTSCH**

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

*Multiple layer solutions for singularly perturbed elliptic equations.*

**Abstract.** In this talk we consider the singularly perturbed equation

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = K(x)u^{p-1}, \quad u > 0$$

on a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  which may be bounded or unbounded. We present results (obtained jointly with S. Peng) on the existence of layered solutions  $u \in H_0^1(\Omega)$  which concentrate on certain high-dimensional subsets of  $\Omega$ .

Lunedì 9 Giugno 2008

**Neil TRUDINGER**

AUSTRALIAN NATIONAL UNIVERSITY

*On Monge-Ampere type equations with supplementary ellipticity.*

**Abstract.**

We present a selection of recent results pertaining to Hessian and Monge-Ampere equations, where the Hessian matrix is augmented by a matrix valued lower order operator. Equations of this type arise in conformal geometry, geometric optics and optimal transportation. In particular we will discuss structure conditions, due to Ma, Wang and myself, which imply the regularity of solutions. These conditions are a refinement of a condition used originally by Pogorelev for general equations of Monge-Ampere type in two variables and called strong ellipticity by him.

Lunedì 16 Giugno 2008

**Ireneo PERAL**

AUTONOMOUS UNIVERSITY OF MADRID

*Zero Order Perturbations to Fully Nonlinear equations: Comparison, existence and uniqueness.*

**Abstract.**

We study existence and uniqueness of solutions to

$$\begin{cases} F(\nabla u_\lambda, D^2 u_\lambda) = f(\lambda, u_\lambda), & \text{in } \Omega, \\ u_\lambda > 0 & \text{in } \Omega, \quad u_\lambda = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $F$  is elliptic and homogeneous of degree  $m$ , and either  $f(\lambda, u_\lambda) = \lambda u^q$  or  $f(\lambda, u_\lambda) = \lambda u^q + u^r$ , for  $0 < q < m < r$ ,  $\lambda > 0$ . The main tool is a comparison result

up to the boundary. Several examples, including uniformly elliptic operators and the infinity laplacian are considered. This is a joint paper with Fernando Charro.

Lunedì 23 Giugno 2008

**Alberto FARINA**

UNIVERSITÉ DE PICARDIE

*Problemi ellittici sovradeterminati: un approccio geometrico.*

**Abstract.**

Presenterò alcuni risultati di simmetria per problemi ellittici sovradeterminati in domini limitati e non limitati. I risultati sono ottenuti mediante due approcci geometrici (superfici isoparametriche e formula geometrica di tipo Poincaré). Il risultato sui domini limitati è stato ottenuto in collaborazione con B. Kawohl, mentre quello sui domini non limitati è il frutto di una collaborazione con E. Valdinoci.