

SEMINARIO DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A.A.
2003/04

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA G. CASTELNUOVO
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

Lunedì 29 settembre 2003

Jack K. Hale

GEORGIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, ATLANTA

Stability and gradient systems

Sunto. We give a brief survey of the basic problem in the qualitative theory of infinite dimensional systems with particular emphasis on gradient systems.

Lunedì 6 ottobre 2003

Carlos ROCHA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, LISBOA

Global Attractors for Semilinear Parabolic Equations on the Circle

Sunto. We present recent results on the characterization of the global semiflow generated by scalar semilinear parabolic equations of the form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \\ x \in S^1, t \geq 0 \end{cases},$$

with periodic boundary conditions. Due to the S^1 -equivariance property provided by the nonlinearity $f = f(u, u_x)$, the global attractor consists only of constant equilibria, standing waves, rotating waves and heteroclinic orbits connecting them. Moreover, when all the critical elements are hyperbolic, the global attractor has the Morse-Smale property. This fact provides a braid type characterization of the global attractor allowing the determination of all the heteroclinic connections occurring in the attractor.

Lunedì 13 ottobre 2003

Lars GRUENE

UNIVERSITÀ DI BAYREUTH

PDE characterizations of control Lyapunov functions

Abstract. We give a survey on recent results on control Lyapunov functions and their representations as (sub-/super-) solutions of suitable PDEs. In particular we will discuss the relation between regularity of these PDE solutions and corresponding properties of the underlying stabilization problem (finite dimensional) stabilization problems.

Lunedì 20 ottobre 2003

Milan KUCERA

CZECH ACADEMY OF SCIENCES, PRAGA

Implicit function theorem and bifurcation for variational inequalities

Abstract. The implicit function theorem can be used in a certain non-direct way for the obtaining of smooth bifurcation branches and a smooth dependence of solutions on parameters for variational inequalities. The abstract results are applicable to partial differential equations with unilateral boundary conditions and to a model of a unilaterally supported beam.

Lunedì 27 ottobre 2003

Liliane MAIA

UNIVERSITY OF BRASILIA

On some elliptic problems in R^n

Sunto. It is established, via variational methods, the existence and multiplicity of solutions for a class of semilinear elliptic equations in R^n . The condition on the potential implies that the associated linear problem possesses a sequence of positive eigenvalues. This fact is used to study double resonant problems under a local nonquadraticity condition at infinity and pointwise limits. For the existence of solution the nonlinearity may satisfy a critical growth condition.

Lunedì 3 Novembre 2003

Khalil EL MEHDI
NOUAKCHOTT UNIVERSITY

On a Biharmonic Equation Involving Nearly Critical Exponent

Abstract. In this lecture we are concerned with the following biharmonic equation

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = u^q(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (P_\epsilon)$$

where $q = \epsilon + (n + 4)/(n - 4)$, Ω is a smooth bounded domain in \mathbb{R}^n ($n \geq 5$), and ϵ is a real number. We study the asymptotic behaviour of solution of (P_ϵ) which are minimizing for the Sobolev quotient as ϵ is negative and goes to zero. We show that such solutions concentrate around a point $p \in \Omega$, moreover p is a critical point of the Robin's function. Conversely, we show that for any nondegenerate critical point p of the Robin's function there exists solutions of (P_ϵ) concentrating around p . Finally we prove that, in contrast with what happened in the above case, the supercritical problem (that is (P_ϵ) with $\epsilon > 0$) has no solutions which concentrate around a point of Ω .

Lunedì 10 novembre 2003

Andrea DALL'AGLIO
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

Esistenza e blow-up per equazioni paraboliche legate ad alcune disuguaglianze di tipo Hardy con peso

Sunto. Presentiamo i risultati di una ricerca svolta con Daniela Giachetti (Roma) e Ireneo Peral (Madrid). Consideriamo delle equazioni paraboliche (con condizioni di Cauchy-Dirichlet in un aperto limitato di \mathbb{R}^n) in cui sia la parte principale che il termine di reazione presentano dei pesi, che sono tra loro legati da una disuguaglianza di tipo Hardy. Nel caso lineare l'equazione è stata studiata da Baras e Goldstein del 1984, in cui si prova che può aversi esistenza globale oppure blow-up completo ed istantaneo della soluzione, a seconda del valore di un parametro di tipo spettrale. Mostriamo che nel caso di operatori non lineari (del tipo p-laplaciano con peso) la situazione può essere piuttosto diversa, e possono aver luogo comportamenti più vari. Inoltre verranno presentati risultati di estinzione e di non-estinzione della soluzione.

Lunedì 24 novembre 2003

Amandine Aftalion
UNIVERSITÉ PARIS VI

Vortices for Bose-Einstein condensates

Sunto. Since the first experimental achievement of Bose Einstein condensates in 1995, and more recently the Nobel prizes in 2001 and this year, a lot of properties of these systems are studied experimentally and theoretically. A mathematical approach consists in studying the setady states which minimize and energy called the Gross-Pitaevskii energy.

In this talk, I will present rigorous results obtained related to two different experiments: existence of vortex free solutions based on Pohozaev identity and constrained minimization and special vortex configurations exhibiting bending.

Lunedì 1 dicembre 2003

Carlo PAGANI
POLITECNICO DI MILANO

Sul problema della resistenza d'onda per corpi semisommersi

Sunto. Si considera il problema di determinare il flusso stazionario generato da un corpo rigido semisommerso in un fluido pesante, non viscoso e incomprimibile, che avanza con moto rettilineo uniforme sulla superficie libera del fluido stesso. Si illustrano i risultati teorici ottenuti recentemente e si confrontano con i risultati numerici noti sia per flusso supercritico che per flusso sottocritico.

Lunedì 15 dicembre 2003

Antonio DE SIMONE
S.I.S.S.A. TRIESTE

Analisi di fenomeni multiscala nei materiali: l'esempio delle microstrutture ferromagnetiche

Sunto. La teoria del micromagnetismo descrive lo stato locale di magnetizzazione di un solido ferromagnetico attraverso un campo vettoriale di lunghezza unitaria. Le configurazioni di equilibrio sono ottenute minimizzando un funzionale non convesso e non locale, ma dalla struttura abbastanza semplice. La teoria è ampiamente utilizzata, ed ha trovato innumerevoli conferme grazie al confronto tra simulazioni numeriche ed osservazioni sperimentali.

Contemporaneamente, si tratta di una teoria molto ricca (di risultati, ma anche di problemi aperti) che produce una enorme varietà di configurazioni al variare della geometria del corpo e dei parametri costitutivi del materiali. Tipiche configurazioni di equilibrio sono

spazialmente non uniformi (a domini). Esse coinvolgono molte lunghezze caratteristiche: da quelle delle singolarità del vettore magnetizzazione (vortici, il cui nucleo ha dimensioni di alcuni nm) a quelle delle pareti di dominio, e dei domini magnetici (questi ultimi, anche di dimensioni paragonabili a quelli dell'intero corpo). Nonostante la loro variabilità e complessità, queste configurazioni vengono ben rappresentate dai punti di minimo di un unico funzionale.

Non è perciò sorprendente che, nell'ultimo decennio, lo studio del funzionale del micromagnetismo abbia assunto un ruolo paradigmatico nell'analisi matematica di fenomeni multiscala. Dopo una introduzione di carattere generale, verranno illustrati alcuni risultati riguardanti la deduzione per Γ -convergenza di un modello bidimensionale per film sottili di materiali ferromagnetico dolce ottenuti in collaborazione con R.V. Kohn, S. Mueller e F. Otto. Verranno illustrati inoltre alcuni problemi aperti, alcuni dei quali motivati dal confronto tra i vortici ferromagnetici e quelli tipici di modelli variazionali simili (e.g. alla Ginzburg-Landau).

Lunedì Lunedì 26 gennaio 2004

Susanna TERRACINI

UNIVERSITÀ DI MILANO-BICOCCA

Orbite periodiche equivarianti per il problema degli n -corpi

Sunto. Verrà esposto un criterio di esistenza di soluzioni del problema periodico per l'equazione Newtoniana degli n -corpi classici, con potenziali alfa-omogenei, che minimizzano l'azione lagrangiana con opportuni vincoli di simmetria. Più precisamente, in relazione ad una classificazione di tutte le possibili simmetrie nello spazio-tempo, si introduce un criterio (la *rotating circle property*) che garantisce la non-collisione delle orbite minimizzanti l'azione Lagrangiana. Nel caso dei tre corpi, inoltre, è possibile una più estesa classificazione delle orbite e delle simmetrie della Lagrangiana che ad esse conducono, dimostrando il teorema di non-collisione: per i tre corpi le orbite minimizzanti l'azione Lagrangiana non presentano collisioni. Questo mostra l'esistenza di classi di nuove soluzioni periodiche (alcune delle quali erano note numericamente). Referenze: D.L. Ferrario e S. Terracini, *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical n -body problem*, *Inventiones Mathematicae* **155**, 305-362, 2004.

Lunedì 2 febbraio 2004

Shoshana KAMIN
TEL AVIV UNIVERSITY

Large Metastable Behavior of Premixed Gas Flames in Large Rectangular Channels

Sunto. A two-dimensional model for the upward propagating flame in a vertical square channel is explored. It is proved that under certain special initial conditions the point where the flame interface attains its maximum stays off the boundary (channel's wall) an exponentially long time. The proof is an extension of the analysis developed previously for the one-dimensional version of the problem.

Lunedì 9 febbraio 2004

Luca RONDI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Instabilità per problemi inversi al bordo di tipo ellittico e parabolico

Sunto. Ci occupiamo di alcuni problemi inversi che modellano la determinazione di imperfezioni o difetti all'interno di un corpo tramite metodi non invasivi, ad esempio tramite misurazioni effettuate all'esterno, o più precisamente sul bordo, del corpo stesso.

Scegliamo come modelli due particolari problemi di questo tipo: la determinazione di cavità tramite misure di tipo elettrostatico (problema ellittico) oppure tramite misure di tipo termico (problema parabolico).

Tali problemi inversi sono generalmente mal posti. Ne analizziamo quindi le proprietà di stabilità, sotto opportune ipotesi a priori sulle cavità incognite. Poniamo particolare attenzione al carattere di instabilità di questi problemi e mostriamo come sia nel caso ellittico che in quello parabolico questa sia di tipo esponenziale.

Lunedì 23 febbraio 2004

Martino BARDI
UNIVERSITÀ DI PADOVA

Alcuni problemi asintotici per equazioni paraboliche nonlineari

Lunedì 1 marzo 2004

Alessandro FIGÀ-TALAMANCA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

L'analogia tra alberi e spazi iperbolici: un esempio concreto

Sunto. Si considera un operatore differenziale del secondo ordine, L definito sul semipiano $Im(z) > 0$ che commuta con l'azione del

gruppo delle trasformazioni affini che mandano z in $(az + b)$, con $a > 0$, ed il processo di diffusione ad esso associato. Un caso particolare è l'operatore di Laplace Beltrami $y^2\Delta$.

Usando l'invarianza di L si trovano esplicitamente le distribuzioni di arrivo, sulla retta reale, dei processi associati ad L al variare dei suoi coefficienti. Queste distribuzioni a loro volta nel dominio di attrazione delle distribuzioni stabili sulla retta reale, e le loro funzioni caratteristiche (trasformate di Fourier) si esprimono in termini delle funzioni ipergeometriche confluenti Ψ di Tricomi.

Lo scopo della conferenza è di mostrare (negli ultimi dieci minuti) come i problemi che hanno dato luogo a questi risultati di analisi classica (nella formulazione e nei metodi) siano nati dal tentativo di definire coerentemente un processo di diffusione in un campo locale (ad esempio il campo p -adico) a partire dal sistema gerarchico (albero) dei suoi dischi metrici.

Lunedì 15 marzo 2004

Rinaldo M. COLOMBO
UNIVERSITÀ DI BRESCIA

Traffico Stradale: Recenti Risultati Analitici e Modellistici

Sunto. A partire dagli anni '90 sono stati ottenuti diversi risultati nella teoria base delle leggi di conservazione. Tra le conseguenze di questi risultati vi è la possibilità di formulare e studiare nuovi modelli per il traffico veicolare.

Nello stesso periodo, dure critiche apparse nella letteratura specializzata e la necessità di gestire in modo sempre più efficiente i flussi di traffico hanno posto nuovi problemi analitici e modellistici.

In questo seminario verranno presentati alcuni modelli per il traffico veicolare recentemente introdotti e le loro principali proprietà analitiche. Verranno inoltre presentati alcuni risultati introduttivi alla gestione ottimale dei flussi veicolari.

Lunedì 15 marzo 2004

Jean-Pierre PUEL
UNIVERSITÉ VERSAILLES/SAINT QUENTIN-EN-YVELINES

Exact controllability to trajectories and data assimilation problems

Sunto. We will explain the notion of exact controllability to trajectories and the main mathematical difficulties which are closely related (without going into technical details); We will give some recent results obtained in this direction for equations of fluid mechanics. An interesting point is the relation of this concept to a non standard approach of a data assimilation problem: if you know the (value of the) solution y of an evolution problem on a (small) subdomain Ω' during

a period of time $(0, T)$ can you determine the value of $y(t_0)$ on the whole domain Ω ? The usual question is set for $t_0 = 0$ and this gives an ill-posed problem while we show (for some important examples) that for any $t_0 > 0$, it corresponds to a well-posed problem. This is of major importance for many applications, for example for simulation of meteorological models.

Lunedì 22 marzo 2004

Lucio DAMASCELLI

Regolarità e proprietà qualitative delle soluzioni positive di equazioni con il m -Laplaciano

Sunto. Presenterò alcuni recenti risultati, ottenuti in collaborazione con B. Sciunzi, sulla regolarità e le proprietà qualitative delle soluzioni deboli di classe $C^1(\overline{\Omega})$ positive del problema di Dirichlet relativo all'equazione $-\Delta_m(u) = f(u)$ in un dominio limitato regolare Ω di \mathbb{R}^N , dove $1 < m < \infty$ e f è positiva e localmente Lipschitziana.

In particolare dimostriamo proprietà di sommabilità della funzione $1/|Du|$, l'inverso del modulo del gradiente di una soluzione u , e disuguaglianze di tipo Sobolev e Poincaré in spazi di Sobolev con peso $|Du|^{m-2}$. Il punto di vista che consiste nel considerare $|Du|^{m-2}$ come un peso è particolarmente utile nello studio delle proprietà qualitative di una fissata soluzione u , e utilizzando questi risultati di regolarità possiamo dimostrare un principio di confronto debole per le soluzioni e, con l'aiuto del metodo di spostamento di piani di Alexandrov-Serrin, un risultato di monotonia (e simmetria) per le soluzioni in domini limitati (e simmetrici in una direzione) nel caso in cui $f(s) > 0$ per $s > 0$ e $m > 2$. Precedentemente un risultato di questo tipo era stato dimostrato nel caso in cui $1 < m < 2$.

Dimostriamo anche una disuguaglianza di tipo Harnack per le soluzioni dell'operatore linearizzato in una fissata soluzione, e una disuguaglianza di tipo Harnack di confronto per coppie di soluzioni e come conseguenza un principio di confronto forte per le soluzioni, e un principio di massimo forte per le soluzioni del linearizzato. Utilizzando tutti questi risultati dimostriamo alcune proprietà dell'insieme critico di una soluzione. Come caso particolare otteniamo che in un dominio convesso e simmetrico in N direzioni ortogonali in \mathbb{R}^N il gradiente si annulla solo nel centro di simmetria 0 , i.e. $Z \equiv \{x \in \Omega \mid D(u)(x) = 0\} = \{0\}$.

Ciò è cruciale nello studio dell'operatore m -Laplaciano, perché Z è esattamente l'insieme dove la stretta ellitticità viene a mancare. Come corollario la soluzione $u \in C^2(\Omega \setminus \{0\})$ nel caso di simmetria considerato.

Lunedì 29 marzo 2004

Mary Beth RUSKAI
TUFTS UNIVERSITY (MA), USA

Additivity Conjectures in Quantum Information Theory

Abstract. The general question of *When can entanglement be used to enhance noisy quantum communication* leads to a number of related conjectures about the additivity of quantities like the capacity and minimal entropy associated with a quantum channel. These will be explained and shown to be related to a conjecture about p -norms. Some recent progress will be summarized.

Lunedì 19 aprile 2004

Andrea CORLI
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA

Il problema di Riemann per flussi di fluidi metastabili a tre fasi

Abstract. La prima parte del seminario mostrerà in maniera succinta alcuni modelli matematici di transizione di fase, basati su sistemi iperbolici di leggi di conservazione, in una dimensione spaziale. Verranno quindi esposti alcuni risultati recentemente ottenuti (soluzioni del problema di Riemann, esistenza globale di soluzioni deboli) per modelli a due fasi.

Nella seconda parte del seminario verrà presentato un modello iperbolico per transizioni a tre fasi: liquido, vapore, e una miscela di liquido e vapore. Regioni metastabili sono presenti sia nella fase liquida che in quella di vapore del modello. Si esamina dapprima l'esistenza di travelling waves per un sistema esteso comprendente effetti di rilassamento, viscosità e diffusione di fase. Partendo da questi risultati si studia il problema di Riemann per il modello iperbolico e si ottengono risultati di esistenza globale e unicità. Le soluzioni ottenute presentano onde d'urto non classiche (onde di liquefazione/evaporazione).

Lunedì 26 aprile 2004

Patrick GÉRARD
UNIVERSITÉ PARIS-SUD

On wellposedness properties of the nonlinear Schroedinger equation on compact surfaces

Abstract. I shall survey recent wellposedness results for the Cauchy problem of *NLS* on compact surfaces, with some emphasis on the role played by the geometry of the surface. The case of the sphere, where a new instability phenomenon occurs, will be discussed in

detail, in connection with bilinear estimates on spherical harmonics.

Lunedì 3 maggio 2004

ADIMURTHI

TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH, BANGALORE

Conservation law with discontinuous coefficient

Abstract. Let $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ and H be the Heaviside function. Consider the scalar conservation law

$$u_t + F(x, u) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

for $x \in \mathbb{R}, t > 0$ and $F(x, u) = H(x)f(u) + (1 - H(x))g(u)$. Since the flux F is discontinuous at $x = 0$, the general method of Kruskov is not applicable in order to obtain a solution. Using the Hamilton-Jacobi theory we obtain a unique solution satisfying the *interphase entropy condition* at the interphase $x = 0$.

Lunedì 10 maggio 2004

Catherine BANDLE

UNIVERSITÄT BASEL

The Brezis-Nirenberg problem in spaces with constant curvature

Abstract. The study of the Brezis-Nirenberg problem in domains on the sphere leads to new concentration phenomena which appear for small parameters. For domains in the hyperbolic space the situation is similar as in the Euclidean space. The picture in balls is fairly well understood. It turns out that the curvature enters into play. In this talk we give a survey of the present state of affairs and show some numerical results of new solutions.

Lunedì 17 maggio 2004

Vieri BENCI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Problemi ellittici relativi ad equazioni di campo a massa nulla

Sunto. Si cercano soluzioni di energia finita per equazioni del tipo $-\Delta u = f(u)$ ove u vive in un dominio illimitato di \mathbb{R}^n ed f diverge al divergere del suo argomento.

Si dice che un'equazione di questo tipo è un'equazione di campo a massa nulla se $f'(0) = 0$. Dopo il lavoro pionieristico di H. Berestycki e P.L. Lions, equazioni di questo tipo non sono state molto considerate. Infatti non si prestano ad essere studiate negli spazi di Sobolev. In questo seminario mostreremo come questo tipo di problemi possano essere studiati con successo riformulando la teoria dei punti critici negli spazi di Orlicz.

Lunedì 24 maggio 2004

Fabiana LEONI

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

Risultati di esistenza e non esistenza per equazioni ellittiche con non linearità esponenziali e dati misura

Sunto. Verrà preso in esame il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione

$$-\Delta u + \exp(u) = \mu$$

posta in un dominio limitato di \mathbb{R}^n , con $n \geq 2$, dove μ è una misura di Radon concentrata, nel caso modello, su un insieme $(n - 2)$ -dimensionale, dando condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzione distribuzionale. L'ingrediente fondamentale sarà una stima ottimale della sommabilità esponenziale per le soluzioni di

$$-\Delta v = \mu.$$

Questo recente risultato estende al caso multidimensionale il lavoro di J.L Vazquez, *On a semilinear equation in \mathbb{R}^2 involving bounded measures*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 95A (1983), e risponde alla questione posta come problema aperto in H. Brezis, M. Marcus, A.C. Ponce, *Nonlinear elliptic equations with measures revisited*, preprint 2004.

Lunedì 7 giugno 2004

Laurent VÉRON

UNIVERSITÉ FRANÇOIS RABELAIS, TOURS FRANCE

Capacitary estimates of positive solutions of semilinear elliptic equations with absorption

Abstract. Let Ω be a bounded domain of class C^2 in \mathbb{R}^n . If u is a positive solution of $-\Delta u + u^q = 0$ in Ω with $q > 1$ it admits a boundary trace $\nu = Tr_{\partial\Omega}(u)$ in the class $\mathcal{B}_{reg}^+(\partial\Omega)$ of outer regular Borel measures on $\partial\Omega$, not necessarily locally bounded. It is known that the correspondence $u \leftrightarrow Tr_{\partial\Omega}(u)$ is one to one if $1 < q < q_c = (N + 1)/(N - 1)$, which is no longer the case if $q \geq q_c$. One of the key problems raised by Dynkin is to prove that, for any compact set $K \subset \partial\Omega$, the maximal solution U_K of this equation which vanishes on K^c is σ -moderate, that is an increasing limit of solutions with boundary data belonging to the space of positive Radon measures. By means of boundary Bessel capacity estimates we describe the precise asymptotic behavior of U_K at points $\sigma \in K$. The Dynkin conjecture follows from these estimates.

Lunedì 14 giugno 2004

Georg DOLZMANN

UNIVERSITY OF MARYLAND COLLEGE PARK

Regularity for nonconvex variational problems

Abstract. We discuss regularity and uniqueness questions for variational problems under minimal structural assumptions. The only assumption is that the integrand is close to the p -Dirichlet integrand at infinity. In particular no convexity is required, and our framework includes therefore variational problems modeling materials undergoing phase transformations. This a joint work with J. Kristensen and K. Zhang.

Lunedì 21 giugno 2004

Luc TARTAR

CARNEGIE-MELLON UNIVERSITY, PITTSBURGH

Regularity of solutions of partial differential equations in Lorentz spaces

Abstract. I look at improving the L^p regularity results of Stampacchia for solutions of a scalar elliptic equation with discontinuous coefficients, by using my approach of Sobolev imbedding theorem in Lorentz spaces, which gives the improved version of Jack Peetre, and in the limiting case the improved versions of Trudinger or of Brezis and Wainger.

Lunedì 28 giugno 2004

Maria Giovanna MORA

S.I.S.S.A., TRIESTE

Derivation of rod theories from three-dimensional nonlinear elasticity by Gamma-convergence

Abstract. Using a variational approach we rigorously deduce some one-dimensional models for rods from three-dimensional nonlinear elasticity, passing to the limit as the diameter of the rod goes to zero. In particular we consider different scalings of the elastic energy in terms of the diameter of the rod and we show that they lead at the limit to different rod models.

Lunedì 5 luglio 2004

Michiel BERTSCH

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA TOR VERGATA

Flussi in rocce diatomitiche

Abstract. Rocce diatomitiche sono caratterizzate da bassa permeabilità e alta porosità. Si trovano per esempio in California, dove contengono petrolio di alta qualità. Da vari decenni gli ingegneri utalizzano

la cosiddetta tecnica di *hydraulic fracturing* per aumentare la permeabilità della roccia e nel seminario si discute un primo tentativo di un modello matematico per descrivere questo processo. I risultati sono stati ottenuti in collaborazione con G.I. Barenblatt, R. Dal Passo e C. Nitsch.

Lunedì 12 luglio 2004

J.J. Kohn

PRINCETON UNIVERSITY

Hypoellipticity and loss of derivatives

Abstract. We study hypoellipticity, in the sense of C^∞ local hypoellipticity, which is defined as follows. If E is a partial differential operator on \mathbb{R}^n , if $P \in \mathbb{R}^n$, then E is hypoelliptic at P if whenever u is a distribution such that the restriction of u to U is in $C^\infty(U)$ then the restriction of Eu to U is in $C^\infty(U)$. We say that E gains s_1 derivatives in the Sobolev at P if for every distribution u with the property that $Eu|_U \in H_{loc}^s(U)$ we have $u|_U \in H_{loc}^{s+s_1}$. Thus an elliptic operator of order m gains m derivatives in the Sobolev norm. In this paper we give an examples of second order hypoelliptic lose derivatives. To analyze these examples we introduce a technique involving subelliptic multipliers which can be adapted to study hypoellipticity in various different situations.

We are concerned with second order partial differential equations with complex coefficients of the type

$$Eu = X_1^* X_1 u + X_2^* X_2 u,$$

where the $\{X_1, \dots, X_m\}$ are complex vectorfields in \mathbb{R}^n whose Lie algebra spans all vector fields. We prove that if these vectorfields and their commutators of order one span then the form $\sum \|X_i u\|^2 = (Eu, u)$ satisfies a subelliptic estimate. We give an example in \mathbb{R}^3 of pairs vectorfields, X_{k1} and X_{k2} , such that

$$\{X_{k2}, [X_{k1}, X_{k2}], [[X_{k1}, X_{k2}], X_{k2}], [\dots [X_{k1}, X_{k2}], \dots], X_{k2}\}$$

span but for $k \geq 1$ a subelliptic estimate does not hold and furthermore that, in these examples when $k \geq 1$, the operators

$$E_k u = X_{k1}^* X_{k1} u + X_{k2}^* X_{k2} u,$$

lose $k - 1$ derivatives but nevertheless are hypoelliptic.