Lauree magistrali in MATEMATICA, Corso di **CALCOLO STOCASTICO**
Esame del 16.9.2020 (Prof. L. Bertini)

Esercizio 1. Si consideri l'equazione stocastica in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} dX_t = -\lambda X_t dt + \sqrt{1+X_t^2}\, dB_t \\ X_0 = x, \end{cases}$$

ove B è un moto browniano unidimensionale, il dato iniziale $x \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare il valore di attesa di X_t, $t \geq 0$.

ii) Calcolare la varianza di X_t, $t \geq 0$. [Sugg. Usare la formula di Ito]

iii) Calcolare la covarianza tra X_t e $X_{t'}$, $t, t' \geq 0$. [Sugg. Usare la proprietà di Markov]

iv) Dire se X è un processo gaussiano.

v) Determinare per quali valori di λ il processo X ammette una probabilità invariante. [N.B. È richiesta una probabilità invariante, non una misura invariante solo σ-finita]

vi) Detta μ_λ la probabilità invariante del punto *(v)*, determinare per quali valori di λ il valore di attesa (risp. la varianza) di X_t converge per $t \to \infty$ al primo momento (risp. alla varianza) di μ_λ.

vii) Per i valori di λ per cui esiste la probabilità invariante μ_λ, si assuma la validità del teorema ergodico, Legge$(X_t) \to \mu_\lambda$ per $t \to \infty$. Dire se i risultati ottenuti nel punto *(vi)* si possano ricavare come conseguenza di tale teorema.