Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 1

Esercizio 1. [Unicità della misura di Wiener] Sia $C([0,1])$ l'insieme delle funzioni continue sull'intervallo $[0,1]$ con la topologia (metrizzabile) indotta dalla convergenza uniforme. Sia $\mathcal{B}$ la σ-algebra dei boreliani (la σ algebra genarata dagli aperti) e $\mathcal{C}$ la σ-algebra generata dai cilindri, ovvero dagli insiemi del tipo $\{f\colon f(t_1) \in A_1, \dots, f(t_n) \in A_n\}$ per $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < \dots < t_n \le 1$ e $A_1, \dots, A_n$ boreliani di $\mathbb{R}$.

1) Verificare che $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

2) Evocare un qualche teorema di teoria della misura e concludere l'unicità della misura di Wiener (o di una qualunque probabilità nota sui cilindri).

Sia ora $C(\mathbb{R}_+)$ l'insieme delle funzioni continue sul semiasse reale. Trovare una metrica che induca la convergenza uniforme sui compatti: $f_n \to f$ sse per ogni compatto $K \subset\subset \mathbb{R}_+$ si ha che f_n converge a f uniformemente in K.

Esercizio 2. Esercizio 1.16 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.22 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.20 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 2

Esercizio 1. Esercizio 1.23 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Per $n \in \mathbb{N}$, siano X_k, $k = 1, \cdots, 2^n$ variabili aleatorie gaussiane standard i.i.d. Per ogni $\alpha > 1/2$, dimostrare che con probabilità uno

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} \max_{1 \le k \le 2^n} |X_k| = 0$$

Esercizio 3. Esercizio 1.25 del libro di Liggett. Nota. Nel punto (a) sostituire $\phi_{n,k}$ con $\psi_{n,k}$ ove $\psi_{n,k}$ è la funzione definita nell'esercizio 1.23 (ora la base è indicizzata con due indici e non uno). Nel punto (b) sostituire Esercizio 1.24 con l'esercizio precedente.

Esercizio 4. Dimostrare la completezza della base di Haar (come definita in Ex. 1.25 del libro di Liggett) in $L^2([0,1])$. In alternativa: chiedere tale dimostrazione ad un docente a scelta di un corso di analisi.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 3

Esercizio 1. Dimostrare che, con probabilità uno, il moto browniano ha variazione infinita in ogni intervallo.

Esercizio 2. Esercizio 1.53 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.82 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.83 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 4

Esercizio 1. Esercizio 1.80 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Esercizio 1.81 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.84 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 1.86 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 5

Esercizio 1. Esercizio 1.85 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Esercizio 1.110 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 1.112 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 5.16 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 6

Esercizio 1. Esercizio 5.15 del libro di Liggett.

Esercizio 2. Esercizio 5.34 del libro di Liggett.

Esercizio 3. Esercizio 5.36 del libro di Liggett.

Esercizio 4. Esercizio 5.38 del libro di Liggett.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 7

Si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t^x = -\lambda X_t^x dt + dB_t \\ X_0^x = x \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$

Esercizio 1. Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

Esercizio 2. Calcolare media e covarianza di X.

Esercizio 3. Dimostrare che $(X_t^x)_{t\geq 0} \overset{\text{Legge}}{=} \Big(e^{-\lambda t}[x + B_{S(t)}]\Big)_{t\geq 0}$ ove B è un moto browniano e $S\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione strettamente crescente (da trovare).

Esercizio 4. Trovare la densità di probabilità $q_t(x, \cdot)$ tale che

$$\mathbb{P}(X_t^x \in B) = \int_B dy\, q_t(x, y)$$

per ogni Boreliano $B \subset \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Nel caso $\lambda > 0$ trovare $\lim_{t\to\infty} \text{Legge}(X_t^x)$.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 8

Per $t \in [0,1)$, si consideri l'equazione stocastica (in $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} dX_t = -\frac{X_t}{1-t}dt + dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 1. Scrivere, via variazione delle costanti, una formula esplicita per la soluzione ed osservare che X è un processo gaussiano.

Esercizio 2. Calcolare media e covarianza di X_t, $t \in [0,1)$.

Esercizio 3. Dimostrare che $\lim_{t\uparrow 1} X_t = 0$ (in probabilità).

Esercizio 4. Sia B il moto browniano in $\mathbb{R}$. Per $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < 1$ calcolare

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathbb{P}\Big(B_{t_1} \in dx_1, \cdots, B_{t_n} \in dx_n \Big| |B_1| \le \epsilon\Big)$$

e confrontare con le distribuzioni finito dimensionali del processo X.

Esercizio 5. Dimostrare che $(X_t)_{t\in[0,1]} \overset{\text{Legge}}{=} (B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 9

Esercizio 1. Ex. 3.5 libro di Liggett

Esercizio 2. Ex. 3.13 libro di Liggett

Esercizio 3. Ex. 3.18 libro di Liggett

Esercizio 4. Ex. 3.20 libro di Liggett

Esercizio 5. Esempio 3.54 libro di Liggett

Esercizio 6. Esempio 3.55 libro di Liggett

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 10

Esercizio 1. Sia X_t il moto browniano bidimensionale e D la corona circolare tra le due circonferenze $\gamma := \{|x| = r\}$ e $\Gamma := \{|x| = R\}$, con $r < R$, e τ il tempo di prima uscita da D. Verificare che

$$\mathbb{P}_x(X_\tau \in \gamma) = \frac{\log R - \log |x|}{\log R - \log r}$$

Mediante passaggio al limite per $R \to \infty$ trovare la probabilità di colpire γ. Mediante passaggio al limite per $r \to 0$ trovare la probabilità di colpire $\{0\}$.

Esercizio 2. Sia X_t il moto browniano bidimensionale.

1) Sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ si ha $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t \in A) = 1$

2) Dimostrare che se $x \neq y$ allora $\mathbb{P}_x(\exists t\colon X_t = y) = 0$

Suggerimento. Utilizzare l'esercizio precedente.

Esercizio 3. Calcolare le stesse probabilità dell'esercizio 1 per il moto browniano tridimensionale.

Esercizio 4. Ex. 6.36 libro di Liggett

Esercizio 5. Calcolare il valore di attesa del tempo di uscita τ del moto browniano bidimensionale dall'angolo $\{(x_1, x_2) : |x_2| \leq x_1 \tan(\alpha/2)\}$.
Suggerimento. Ricavare l'equazione soddisfatta da $\mathbb{E}_x\tau$.

Corsi di Laurea Magistrale in Matematica, A.A. 2018-19
Calcolo stocastico e applicazioni (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 11

Esercizio 1. Si consideri l'equazione stocastica unidimensionale
$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t.$$
Sia m la funzione definita da
$$m(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\Big\{2\int_0^x dy \frac{b(y)}{\sigma^2(y)}\Big\}.$$
Verificare che sotto opportune condizioni (da capire) la misura $m(x)dx$ è invariante per X_t.

N.B. I prossimi esercizi sono da svolgere sequenzialmente.

Esercizio 2. Sia B_t, $t \ge 0$ il moto browniano unidimensionale con $B_0 = 0$. Per $t > 0$ sia A_t la frazione del tempo in $[0,t]$ in cui B è positivo, ovvero
$$A_t := \frac{1}{t}\int_0^t ds\, \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(B_s).$$
Dimostrare che la legge della variabile aleatoria positiva A_t non dipende da t.

Esercizio 3. Per $\beta > 0$ sia
$$u(t,x) := \mathbb{E}_x \exp\big\{-\beta t A_t\big\}$$
dove il valore di attesa è rispetto al moto browniano che parte da $x \in \mathbb{R}$. Utilizzando la formula di Fenyman-Kac (ignorando il fatto che $\mathbf{1}_{[0,+\infty)}$ non è esattamente una funzione continua) scoprire che u risolve un'equazione parabolica.

Esercizio 4. Per $\lambda > 0$ sia ora $z_\lambda(x)$ la trasformata di Laplace di $u(t,x)$, ovvero
$$z_\lambda(x) := \int_0^\infty dt\, e^{-\lambda t} u(t,x).$$
Ricavare l'equazione soddisfatta da z_λ.

Esercizio 5. Risolvere esplicitamente l'equazione ricavata nell'esercizio precedente.

Esercizio 6. Utilizzando che una probabilità su $\mathbb{R}_+$ è univocamente caratterizzata dalla sua trasformata di Laplace, concludere ricavando la *legge dell'arcoseno* per il moto Browniano:
$$\mathbb{P}_0(A_t \in dy) = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}\, dy, \quad y \in (0,1).$$