Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica, A.A. 2022-23
Elementi di calcolo delle probabilità e statistica (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

SETTIMANA 6

Esercizio 1. (VARIABILE ALEATORIA IPERGEOMETRICA) Si consideri un'urna con b palline bianche ed n palline nere. Si effettuano k estrazioni senza rimpiazzo ($k \leq b + n$). Sia X_i, $i = 1, \ldots, k$ la variabile aleatorie che vale 1 se l'i-ma pallina estratta è bianca e 0 se nera. Sia inoltre X il numero totale di palline bianche estratte.

1) Trovare la distribuzione di X.

2) Calcolare il valore di attesa di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello a partire dal valore di attesa di X_i.)

3) Calcolare la covarianza tra X_i e X_j, $i, j = 1, \ldots, k$.

4) Calcolare la varianza di X.
(È richiesto sia il calcolo diretto a partire dalla distribuzione di X sia quello svolto scrivendo $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ ed usando la risposta alla domanda precedente.)

Esercizio 2. Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto. Calcolare il valore di attesa del numero di transistor esaminati.

Esercizio 3. (INDIPENDENZA DI VARIABILI ALEATORIE) Siano X e Y due variabili aleatorie.

1) Dimostrare che se X è una variabile aleatoria certa, ovvero $X = c$ per un qualche $c \in \mathbb{R}$, allora X e Y sono indipendenti.

2) Dimostrare che nel caso in cui X e Y sono binarie, ovvero $\big|\mathrm{Im}(X)\big| = \big|\mathrm{Im}(Y)\big| = 2$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti se e solo se $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$.

3) Costruire un esempio in cui $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ ma X e Y non sono indipendenti.

Esercizio 4. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

1) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

2) Calcolare la distribuzione di T.

3) Calcolare la distribuzione di X.

4) Dire, giustificando la risposta, se sono variabili aleatorie T e X sono indipendenti.

Esercizio 5. Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le faccie?
SUGG. Utilizzando variabili aleatorie geometriche si trova la soluzione senza necessità di calcoli.

Esercizio 6. Siano X_i, $i = 1, 2$ variabili aleatorie indipendenti uniformi in $\{1, \ldots, n\}$.

1) Calcolare la distribuzione di $X_1 + X_2$.

2) Calcolare il valore di attesa di $X_1 + X_2$.

3) Calcolare la varianza di $X_1 + X_2$.