Corso di Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica, A.A. 2022-23
Elementi di calcolo delle probabilità e statistica (Docente: Bertini)
Esercizi settimanali

Settimana 8

Esercizio 1. Tre sentieri collegano i bivacchi A, B e C in modo che da ciascun bivacco si possa raggiungere uno qualunque degli altri due con un sentiero diretto. A causa di frane, ciascun sentiero può essere non percorribile. Sia $p_{AB} \in (0,1)$ (rispettivamente p_{BC}, p_{AC}) la probabilità che il sentiero che collega A con B (rispettivamente B con C, A con C) sia percorribile. Si assuma che lo stato di agibilità di ciascun sentiero sia indipendente dagli altri. Vi trovate al bivacco A.

1) Calcolare la probabilità che possiate arrivare al bivacco C.

2) Un alpinista vi ha detto che non è possibile arrivare a C per via delle frane. Calcolare la probabilità che possiate comunque arrivare a B.

Esercizio 2. Da un gruppo di 7 batterie, di cui 3 nuove, 2 usate ma funzionanti e 2 difettose, ne vengono scelte 3 a caso. Siano X e Y rispettivamente il numero di batterie nuove e usate (ma funzionanti) tra quelle scelte.

1) Determinare la distribuzione congiunta di (X, Y) e le distribuzioni marginali di X e di Y.

2) Calcolare $\mathrm{cov}(X, Y)$. Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

3) Le tre batterie scelte sono montate su di un apparecchio che funziona se nessuna di esse è difettosa. Determinare la probabilità che l'apparecchio funzioni.

Esercizio 3. I componenti elettronici prodotti in una fabbrica sono difettosi, l'uno indipendentemente dall'altro, con probabilità p e funzionanti con probabilità $1-p$, $p \in (0,1)$. Vengono sottoposti ad un controllo di qualità con la seguente modalità: ogni componente, l'uno indipendentemente dall'altro, viene ispezionato con probabilità α e non ispezionato con probabilità $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Un componente trovato difettoso viene scartato, mentre gli altri vengono messi in commercio. Si supponga di avere n componenti prodotti dalla fabbrica.

1) Calcolare la distribuzione del numero di componenti che vengono scartati dopo il controllo di qualità.

2) Sapendo che il numero di componenti scartati dopo il controllo di qualità è pari a k, $k = 0, 1, \ldots, n$, calcolare la distribuzione dei componenti difettosi tra gli $n-k$ messi in commercio.

Esercizio 4. Un dado che ha una faccia blu, due rosse e tre verdi viene lanciato due volte. Siano R il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore rossa e V il numero di volte in cui il dado esibisce la faccia superiore verde.

1) Costruire la tabella della distribuzione congiunta di (R, V).

2) Determinare la distribuzione di $Z = \max\{R, V\}$ e calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $\mathbb{V}(Z)$.

Esercizio 5. Siano X, Y due variabili aleatorie di Bernoulli di parametro p e indipendenti. Siano inoltre

$$Z = X(1-Y) \quad \text{e} \quad W = 1 - XY.$$

1) Qual è la distribzione congiunta di (Z, W)?

2) Quali sono le distribuzioni marginali di Z e W?

3) Per quali valori di p le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti?

Esercizio 6. A e B giocano al seguente gioco: A scrive 1 o 2 su un foglio e B deve indovinare il numero scritto da A Se A ha scritto $i \in \{1, 2\}$ e B indovina allora A paga i euro a B. Se invece B non indovina allora B paga 0.75 euro ad A.

Si supponga che B adotti una strategia casuale dichiarando 1 con probabilità p e 2 con probabilità $1 - p$.

1) Supponendo che A abbia scritto 1 determinare il guadagno medio di B

2) Supponendo che A abbia scritto 2 determinare il guadagno medio di B

3) determinare il valore di p che massimizza il minimo tra i 2 guadagni medi precedenti.

Si supponga che A adotti una strategia casuale scrivendo 1 con probabilità q e 2 con probabilità $1 - q$.

4) Supponendo che B dichiari 1 determinare la perdita media di A.

5) Supponendo che B dichiari 2 determinare la perdita media di A.

6) determinare il valore di q che minimizza la massima tra le 2 perdite medie precedenti.

Confrontare le risposte ai punti 3 e 6.