



Laurea triennale in MATEMATICA

Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESAME DEL 31.8.2021, Canale 1 (L. Bertini)

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi giustificando brevemente i passaggi svolti utilizzando al massimo tre fogli.

**Esercizio 1.** (*10 punti*) Si hanno a disposizione due mazzi da 40 carte, ogni mazzo ha 20 carte rosse e 20 carte nere. Si volta la prima carta di ogni mazzo: se entrambe le carte scoperte sono rosse ha luogo un *double rouge*. Si prosegue allo stesso modo fino a voltare tutte le 40 carte dei due mazzi.

- a) Calcolare la probabilità che la prima coppia estratta abbia dato come esito un *double rouge*.
- b) Calcolare la probabilità di non aver realizzato alcun *double rouge* nelle 40 estrazioni.
- c) Per  $k = 0, \dots, 20$ , calcolare la probabilità di aver realizzato  $k$  *double rouge* nelle 40 estrazioni.

**Esercizio 2.** (*5 punti*) Quante volte bisogna lanciare – in media – un dado equo per vedere apparire tutte le facce?

**Esercizio 3.** (*5 punti*) Siano  $X$  e  $Y$  variabili aleatorie di Poisson indipendenti rispettivamente di parametro  $\lambda$  e  $\mu$ .  
Calcolare  $\mathbb{E}(X|X+Y)$  e  $\mathbb{E}(X+Y|X)$ .

**Esercizio 4.** (*10 punti*) Si consideri una circonferenza di raggio unitario e sia  $P$  un punto fissato sulla circonferenza. Sia inoltre  $Q$  un punto scelto a caso (ovvero con distribuzione uniforme) sulla circonferenza. Sia infine  $X = \overline{PQ}$  la distanza tra  $P$  e  $Q$ .

- a) Calcolare il valore di attesa di  $X^2$ .
- b) Determinare la densità della variabile aleatoria  $X^2$ .
- c) Determinare la densità della variabile aleatoria  $X$ .