



NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) _____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Ci sono tre urne di diversa composizione:

l'urna 1 contiene 4 palline bianche e 1 rossa,

l'urna 2 contiene 1 pallina bianca e 4 rosse,

l'urna 3 contiene 2 palline bianche e 3 rosse.

Si sceglie un'urna con il seguente procedimento: si lanciano 3 monete ben equilibrate e

se Testa esce al più una volta si sceglie l'urna 1,

se Testa esce esattamente due volte si sceglie l'urna 2,

altrimenti si sceglie l'urna 3.

Una volta scelta l'urna, dall'urna scelta, si estraggono, SENZA REINSERIMENTO, due palline. Posto H_i l'evento viene scelta l'urna i , $i = 1, 2, 3$ e B_k l'evento la k -sima pallina estratta è bianca, $k = 1, 2$, **scrivere in termini di questi eventi e calcolare la probabilità** dei seguenti eventi

i) (a) la prima pallina estratta è bianca; (b) la seconda pallina estratta è bianca;

ii) almeno una delle palline estratte è bianca;

iii) le due palline estratte hanno colore diverso.

Sapendo che le due palline estratte hanno colore diverso, calcolare

iv) la probabilità condizionata che sia stata scelta l'urna 2;

v) la probabilità condizionata che non sia stata scelta l'urna 2.

Esercizio 2. Nell'harem del sultano B. ci sono 8 ragazze bionde, di cui 5 con gli occhi chiari e 3 con gli occhi scuri, e 12 ragazze castane, di cui 4 con gli occhi chiari e 8 con gli occhi scuri. Per passare una serata piacevole, B. sceglie a caso 5 ragazze dal proprio harem.

i) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte ce ne siano 3 bionde e 2 castane.

ii) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte almeno una sia bionda con gli occhi chiari.

iii) Calcolare la probabilità che tra le 5 ragazze scelte 3 siano bionde, 1 castana con gli occhi chiari e 1 castana con gli occhi scuri.

iv) Sapendo che le 5 ragazze scelte hanno tutte gli occhi chiari, calcolare la probabilità che 3 di queste siano bionde e 2 castane.

v) Sapendo che sono state scelte 3 ragazze bionde e 2 castane, calcolare la probabilità che 3 abbiano gli occhi chiari e 2 gli occhi scuri.

Esercizio 3. Si consideri il modello probabilistico relativo alla disposizione di n palline distinguibili in r scatole (probabilità uniforme sui corrispondenti r^n eventi elementari). Si assuma $n \geq r$.

i) Sia $M(n, r)$ il numero di eventi elementari tali che in ogni scatola è presente almeno una pallina. Dimostrare che $M(n, r)$ soddisfa la relazione ricorsiva

$$M(n, r + 1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} M(n - k, r)$$

ii) Concludere che la probabilità $P(n, r)$ che in ogni scatola vi sia una almeno una pallina è data da

$$P(n, r) = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \left(1 - \frac{i}{r}\right)^n$$