Derivate Parziali

DEF

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

Calcolo

$g(x) = f(x,y)$ (y è fissata) è costante

$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

$h(y) = f(x,y)$ (x è fissata, è una costante)

$h'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto (x_0, y_0)

$P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ La generica eq. del piano per P_0

$$z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Piano tangente $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

$$\boxed{z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0)}$$

dovrebbe essere il piano che approssima meglio il grafico della funzione nel punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0) + f(x_0,y_0)\right]}{d((x,y),(x_0,y_0))} = 0}$$

Questa uguaglianza non è sempre vera

1) Se è vero allora si dice che la funzione è differenziabile in (x_0,y_0)

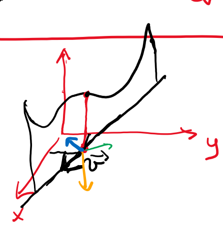
Il piano è effettivamente il piano tangente

2) $d((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

Teorema: 1) Se f è differenziabile in (x_0,y_0) allora è continua

$\vec{v} = (v_1, v_2)$, $|\vec{v}|$ DEFINIZIONE

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv_1, y+hv_2) - f(x,y)}{h}$$



2) Se f è differenziabile in (x_0,y_0) allora

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\, v_2} \quad \boxed{++}$$

Se conosco le derivate parziali rispetto a "x" e "y" allora conosco le derivate direzionali per qualsiasi direzione $\vec{v}$.

NOTAZIONE: $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

"gradiente di f" allora

$$(++) \implies \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle = \boxed{\nabla f \cdot \vec{v}}$$

Ricordate: $\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$
$= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta$ — θ è l'angolo tra i vettori

Per definizione di derivata direzionale, il vettore $|\vec{v}|=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f\cdot\vec{v} = |\nabla f|\cdot|\vec{v}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

Qual è il $\max\limits_{\vec{v}} \frac{\partial f}{\partial v}$? Per $\theta = 0$!

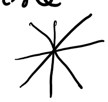
cioè $\vec{v}$ stessa direzione del vettore ∇f.

Conclusione: Il gradiente di v punta nella direzione della massima pendenza.

Esempio: $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Def. $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$



Prendiamo: $\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}}$ NON È CONTINUA

1°) Domanda $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$? $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

2°) Se esistono, sarà vero che il piano tangente è $z = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + f(0,0)$?

cioè la funzione, è differenziabile?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f(0+h,0) = f(h,0) = 0 = f(0,h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

a) $\exists$ le derivate parziali in $(0,0)$ anche se la funzione non è continua

b) Il candidato il piano tangente $z=0$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-[0]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \ ?$$

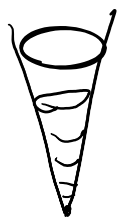
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Longrightarrow \text{NON ESISTE}$$

f non è differenziabile in $(0,0)$.

La nozione di <u>differenziabilità</u> per funzioni di più variabili è equivalente alla nozione di derivabilità per funzioni reali di una variabile.

"Meta teorema" le funzioni elementari sono differenziabili nel loro insieme definizione"

f differenziabile $\longrightarrow$ $\exists$ il <u>piano tangente</u> ed è quello della differenziabilità



$\longrightarrow$ la funzione è <u>continua</u>

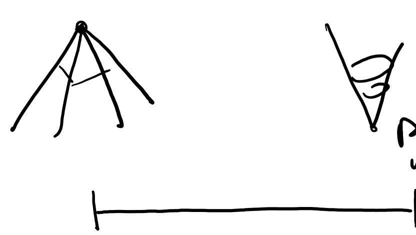
$\longrightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle$

Es. di funzione <u>non</u> differenziabile in $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Teorema</u> Se f ha un P p.to di massimo o di minimo <u>locale</u> allora $\nabla f(P) = (0,0)$ cioè <u>punto critico</u>

<u>Corollario</u> Nei punti di max o minimo locale, se la funzione è differenziabile, allora il piano tangente $z = f(x_0, y_0)$ e quindi è orizzontale!

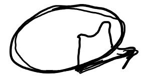


piano tangente non esiste

Legame tra curve di livello e gradiente

OSS Il gradiente "punta" verso la massima pendenza.
Viceversa le curve di livello sono le curva dove il grafico non cambia "altezza"

Ci si aspetta che la direzione della massima pendenza sia ortogonale alla curva di livello cioè ortogonale al vettore tangente alla curva di livello.



$f(x,y)=cte \longrightarrow$ curva $(x(t),y(t))$ di livello parametrizzata! $t \to (x(t),y(t))$

$g(t)=f(x(t),y(t))=$ costante

$g'(t)=0$

Esprimere $g'(t)$ in termini di f e delle derivate di f.

oss. il vettore tangente alla curva è il vettore $(x'(t),y'(t))$

Si può dimostrare

$g'(t)=$ "la derivata di f nella direzione del vettore tangente alla curva!"

$= \langle \nabla f(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t)) \rangle$

$$\boxed{g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t)} \quad (*)$$

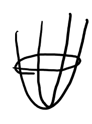
Vero per tutte le curve regolari $(x(t),y(t))$ e per tutte le funzioni f differenziabili

$g(t)=f(x(t),y(t)) \Longrightarrow (*)$

Se la curva è una curva di livello allora

$g(t)=cte \Longrightarrow g'(t)=0 \Longrightarrow \langle \nabla f(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t)) \rangle = 0$

Quindi $\boxed{\nabla f(x(t),y(t)) \perp (x'(t),y'(t))}$

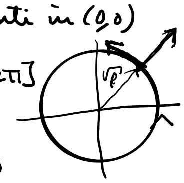


$f(x,y) = x^2+y^2$ $\left(\underline{ES} \;\; f(x,y)=e^{x^2+y^2} \right)$

Curve di livello $x^2+y^2=cte=\ell$

cerchi di raggio $\sqrt{\ell}$ centrati in $(0,0)$

$$\begin{cases} x=\sqrt{\ell}\cos t \\ y=\sqrt{\ell}\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$



$$\begin{cases} x'=-\sqrt{\ell}\sin t = -y \\ y'=\sqrt{\ell}\cos t = x \end{cases}$$

$\vec{v}=(-y,x)$
$=(-\sqrt{\ell}\sin t, \sqrt{\ell}\cos t)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x,2y) = 2(x,y)$

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (\ldots$ [illegible] $) \perp$

$\vec{v} = (-y, x)$

a) $f(x,y) = y^2 - xy + 3x$ $\qquad f(1,-1)$ trovare i pti critici

$f(1,-1) = (-1)^2 - 1\cdot(-1) + 3\cdot 1$

$= 1 + 1 + 3 = 5$

$\nabla f(x,y) = 0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$\nabla f(x,y) = (-y+3,\ 2y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} -y+3=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}$

cioè $\begin{cases} y=3 \\ 6-x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

$P=(6,3)$ è l'unico punto critico

b) $f(x,y) = \dfrac{y^2-x}{3x+2y}$ $\qquad f(1,-1)$, pti critici

$f(1,-1) = \dfrac{(-1)^2-1}{3+2(-1)} = \dfrac{0}{1} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{(-1)(3x+2y) - (y^2-x)\cdot 3}{(3x+2y)^2} = \dfrac{-3y^2-2y}{(3x+2y)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y(3x+2y) - (y^2-x)2}{(3x+2y)^2} = \dfrac{2y^2+6xy+2x}{(3x+2y)^2} = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} -3y^2-2y=0 \\ 2y^2+6xy+2x=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -y(3y+2)=0 \\ 2y^2+6xy+2x=0 \end{cases}$

$y=0$ $\qquad y=-\frac{2}{3}$

$\downarrow$ $\qquad \downarrow$

$x=0$ $\qquad 2\cdot\frac{4}{9} - 4x + 2x = 0$

$2x = \frac{8}{9} \qquad x = \frac{4}{9}$

$P_0 = (0,0)$ $\notin \text{Dom} f$ non è pto critico

$P_1 = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right) \notin \text{Dom} f$

$3\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$

non è pto critico !!

f NON HA PUNTI CRITICI

c) $f(x,y) = xy\,e^{3x+y}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y e^{3x+y} + xy e^{3x+y}\cdot 3 = y e^{3x+y}(1+3x) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x e^{3x+y} + xy e^{3x+y}\cdot 1 = x e^{3x+y}(1+y) = 0 \end{cases}$$

$e^{3x+y} > 0 \Longrightarrow \begin{cases} y(1+3x)=0 \\ x(1+y)=0 \end{cases} \Longrightarrow y=0 \,/\, x=-\frac{1}{3}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x=0 \qquad y=-1$

$P_0 = (0,0), \quad P = \left(-\frac{1}{3}, -1\right)$