ISTITUZIONI DI MATEMATICA II, PROF. BIRINDELLI

A.A 2017/18

Cognome	Nome	Crediti

REGOLE D'ESAME

i) Non é ammesso l'uso di libri, appunti, cellulari, etc. Si usa soltanto carta e penna!

ii) IL COMPITO DEVE ESSERE SVOLTO SU QUESTI FOGLI (UTILIZZANDO ANCHE IL RETRO), CHE SARANNO GLI UNICI AD ESSERE CONSEGNATI AL DOCENTE

Esercizio 6 Sia la superficie $\phi; D \to \mathbb{R}^3$

$$\phi(t, s) = (st, s + t, s - t)$$

con $D = \{s > 0, t > 0, s^2 + t^2 \leq 16\}$.

a)Determinare se il punto $(1, 1, 1)$ appartiene alla superficie ϕ $(1, 1, 1)$ appartiene alla superficie se esiste una soluzione in D del seguente sistema: $\begin{cases} st = 1 \\ s + t = 1, \\ s - t = 1 \end{cases}$. Le ultime due equazione sono verificato se e solo se $s = 1$ e $t = 0$, ma $1 \times 0 = 0 \neq 1$ e quindi il punto non appartiene.

b) Determinare se ϕ è una superficie regolare.

Calcoliamo $\phi_t(t, s) = (s, 1, -1)$ mentre $\phi_s(t, s) = (t, 1, 1)$. La superficie è regolare se

$$\phi_t \otimes \phi_s \neq 0, \ \phi_t \otimes \phi_s = (2, -s - t, s - t) \neq (0, 0, 0).$$

La superficie è regolare.

c) Determinare l'equazione del piano tangente a ϕ nel punto $\phi(1, 1)$.

$\phi(1, 1) = (2, 2, 0)$, il vettore ortogonale al piano tangente è $\phi_t \otimes \phi_s(1, 1) = (2, -2, 0)$. Quindi l'equazione è

$$2(x - 2) - 2(y - 2) + 0(z - 0) = 0, \text{ cioè } 2x - 2y = 0.$$

d) Calcolare l'area della superficie.

Cioè è necessario calcolare

$$\int\int_D \sqrt{4 + (s + t)^2 + (s - t)^2} ds dt, \text{ cioè } \int\int_D \sqrt{4 + 2s^2 + 2t^2} ds dt =$$

$$\sqrt{2}\int\int_D \sqrt{2+s^2+t^2}\,dsdt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \sqrt{2+r^2}\,rdrd\theta =$$
$$= \sqrt{2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{3}((2+4^2)^{\frac{3}{2}}-(2+0^2)^{\frac{3}{2}}) = \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}((18)^{\frac{3}{2}}-(2)^{\frac{3}{2}}).$$

Esercizio 7

Dato il campo vettoriale $F(x,y) = (2y + x^3, 2x + e^y)$

a) Determinarne il dominio di esistenza
F è definito tramite funzioni che sono definite in $\mathbb{R}^2$ quindi il dominio è $\mathbb{R}^2$.
b) Determinare se è irrotazionale e se è conservativo.
F è irrotazionale se $\partial_y(F_1) = \partial_x(F_2)$ cioè se $\partial_y(2y + x^3) = 2$ è uguale a $\partial_x(2x+e^y) = 2$. Quindi è irrotazionale. Siccome il campo è definito in tutto $\mathbb{R}^2$ che non ha buchi, il campo è anche conservativo.
c) Determinare il lavoro di F lungo la curva $\gamma(t) = (t^2, t^3+1)$ per $t \in [0,1]$. Posso trovare una primitiva di F se risolvo il sistema $\partial_x f = 2y + x^3$, $\partial_y f = 2x + e^y$. La prima equazione da $f(x,y) = 2xy + \frac{x^4}{4} + g(y)$, inserendola nella seconda ottengo $g'(y) = e^y$ cioè $g(y) = e^y$. Quindi il potenziale di F è $f(x,y) = 2xy + \frac{x^4}{4} + e^y$ $L(F,\gamma) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,2) - f(0,1) = 4+\frac{2^4}{4}+e^2-e$. d) Determinare il lavoro di F lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
La curva è chiusa, il campo è conservativo dunque il lavoro è nullo.

Esercizio 8 Data l'equazione $y' = \frac{y}{3x-1} + 2$

a) Determinare se la funzione $y(x) = 3x$ è soluzione dell'equazione.
Siccome $y' = 3$, devo verificare che

$$3 = \frac{y}{3x-1} + 2 = \frac{3x}{3x-1} + 2$$

che non è vero. Quindi $y = 3x$ non è soluzione. b) Determinare l'insieme delle soluzioni.

$$y(x) = C(3x-1)^{\frac{1}{3}} + (3x-1)$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.
c) Determinare la soluzione che soddisfa il dato di Cauchy $y(0) = 1$.
y è come al punto b, pertanto $y(0) = -c - 1 = 1$ per $c = -2$. Quindi $y(x) = -2(3x-1)^{\frac{1}{3}} + (3x-1)$
d) Determinare l'intervallo di esistenza della soluzione del caso c).
Intervallo di esistenza $I = (-\infty, \frac{1}{3})$.

Esercizio 9 Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e scrivere l'equazione del piano tangente in $(0,0)$.

a) $f(x,y) = x^2 - xy + 3y$ $\partial_x f = 2x - y$ mentre $\partial_y f = -x + 3$ I punti critici sono le soluzioni di $2x - y = 0$ e $-x + 3 = 0$ cioè $x = 3$ e $y = 6$. $\nabla f(0,0) = (0,3)$, $f(0,0) = 0$. L'equazione del piano tangente in (x_o, y_o) è

$$z = f(x_o, y_o) + \partial_x f(x_o, y_o)(x - x_o) + \partial_x y f(x_o, y_o)(y - y_o)$$

quindi otteniamo $z = 3y$.
b) $f(x,y) = \frac{x+y}{2x+3y+1}$
$\partial_x f = \frac{(2x+3y+1)-2(x+y)}{(2x+3y+1)^2} = \frac{y+1}{(2x+3y+1)^2}$ mentre $\partial_y f = \frac{(2x+3y+1)-3(x+y)}{(2x+3y+1)^2} = \frac{-x+1}{(2x+3y+1)^2}$.
Quindi i punti critici sono soluzioni del seguente sistema:

$$\frac{y+1}{(2x+3y+1)^2} = 0, \ \frac{-x+1}{(2x+3y+1)^2} = 0, \text{ cioè} y+1 = 0, \ -x+1 = 0, \Rightarrow y = -1, x = 1$$

L'equazione del piano tangente in $(0,0)$ è $z = x + y$.
c) $f(x,y) = ye^{x^3-y^2}$
$\partial_x f(x,y) = 3x^2 ye^{x^3-y^2}$ mentre $\partial_y f = e^{x^3-y^2}(1 - 2y \times y) = e^{x^3-y^2}(1 - 2y^2)$. Siccome l'esponenziale non si annulla mai, i punti critici sono i punti che verificano

$$3x^2 y = 0, \ (1 - 2y^2) = 0$$

La seconda equazione da $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, nei due casi la prima equazione è soddisfatta solo se $x = 0$ abbiamo quindi trovato $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ L'equazione del piano tangente in $(0,0)$ è $z = x + y$.
d)$f(x,y) = \cos(2x)\cos(4y)$
$\partial_x f(x,y) = -2\sin(2x)\cos(4y)$, $\partial_y f(x,y) = -4\cos(2x)\sin(4y)$. Siccome, come funzione della x, f è π periodica. Mentre, come funzione della y, f è $\frac{\pi}{2}$ periodica. Basterà trovare i punti critici in $[0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.
Esercizio 10

a) $\int\int_D y \, dxdy$ per $D = [0,1] \times [1,3]$
$\int\int_D y \, dxdy = \int_0^1 \int_1^3 ydydx = \int_0^1 [\frac{1}{2}y^2]_1^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (9-1)dx = 4.$
b)$\int\int_D x \, dxdy$ per $D = \{(x,y), \ 1 < x < 4, x < y < 3x\}$
$\int\int_D x \, dxdy = \int_1^4 \int_x^{3x} xdydx = \int_1^4 xy|_x^{3x} dx = \int_1^4 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3|_1^4 = \frac{2(4^3-1^3)}{3}$
c)$\int\int_D x^2 + y \, dxdy$ per $D = \{(x,y), \ x^2 \le y \le 3 - 2x\}$
Trovo i punti di intersezione tra $y = x^2$ e $y = 3 - 2x$, cioè $x^2 + 2x - 3 = 0$, i.e. $x = 1$ e $x = -3$.

$$\int\int_D x^2 + y \, dxdy = \int_{-3}^1 \int_{x^2}^{3-2x} x^2 + ydydx = \int_{-3}^1 x^2 y + \frac{y^2}{2}|_{x^2}^{3-2x} dx$$

$$= \int_{-3}^1 x^2(3-2x) + \frac{(3-2x)^2}{2} - x^4 - \frac{x^4}{2} = \int_{-3}^1 -\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 9dx =$$

$$= -\frac{3}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 3x^3 + 9x|_{-3}^{1}$$

d) Sia $B_2 \setminus B_1$ l'anello circolare centrato nell'origine, con raggio compreso tra 1 e 2. Dimostrare che

$$\frac{3}{e^4}\pi \leq \int\int_{B_2 \setminus B_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \frac{3}{e}\pi.$$

In $B_2 \setminus B_1$ si ha $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ quindi $e^{-4} \leq e^{-x^2-y^2} \leq e^{-1}$. Mentre $A(B_2 \setminus B_1) = \pi(4-1) = 3\pi$. Pertanto

$$A(B_2 \setminus B_1)e^{-4} \leq \int\int_{B_2 \setminus B_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq A(B_2 \setminus B_1)e^{-1}$$

cioè

$$\frac{3}{e^4}\pi \leq \int\int_{B_2 \setminus B_1} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \frac{3}{e}\pi.$$