CALCOLO DIFFERENZIALE

Dipartimento di Informatica

Appello del 11.01.2023 - Tema A

Voto finale

Postazione:

Cognome:

Nome:

Matricola:

Canale:

Esercizio	Punteggio
1	
2	
3	
Risp. Mult.	
Totale	

Es. 1 [8 =3+4+1 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{x+3}}$$

1. Se ne determini il dominio naturale ed il segno. Se ne calcolino i limiti e gli eventuali asintoti agli estremi del dominio.
2. Se ne calcoli la derivata prima, si studino gli intervalli di monotonia e si calcolino eventuali punti di massimo o minimo relativo e assoluto.
3. Se ne disegni il grafico.

(Non è necessario calcolare la derivata seconda e studiare la convessità.)

Es 2 [4 punti] Calcolare, giustificando i passaggi essenziali in poche parole (o formule):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x^2)}{\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x^3})}$$

Es 3 [3 punti] Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3 della funzione coseno centrato in $x_0 = \frac{\pi}{2}$:

$T^{\cos}_{3,\frac{\pi}{2}}(x) =$

Es 4 [2 o -1 punti] La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |\arctan(x+2)|$

(A) Non ha minimo, né massimo (B) Ha minimo, ma non ha massimo

(C) Ha massimo, ma non ha minimo (D) Ha minimo uguale a 0 e massimo uguale a $\frac{\pi}{2}$

Es 5 [2 o -1 punti] La retta tangente a $f(x) = 2\tan x + \cos x$ in $x = \pi$ è:

(A) $y = 2x - \pi$ (B) $y = x + \pi - 1$ (C) $y = 2(x - \pi) - 1$

(D) non esiste (E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Es 6 [2 o -1 punti] Sia $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ continua e derivabile e valgano $f(1) = 1$, $f(b) = \pi$. Allora sicuramente:

(A) f è crescente in $(1, 2)$ (B) $\exists x_o \in (1, 2)$ tale che $f'(x_o) = 0$

(C) $\exists x_o \in (1, 2)$ tale che $f'(x_o) = \pi$ (D) $\exists x_o \in (1, 2)$ tale che $f(x_o) = 2$

(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

Es 7 [2 o -1 punti] $4^{3\pi}$ è uguale a:

(A) 12^{π} (B) $e^{12\pi}$ (C) $2^{6\pi}$

(D) $3^{4\pi}$ (E) $\pi^{3\ln 4}$

Es 8 [3 o -1 punti] Il limite $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2 + 2n + \ln n^3}{(-1)^n n + 2n^3 + \sqrt{n}}$

(A) Vale 1 (B) Vale $\frac{1}{2}$ (C) Vale 2

(D) Vale 0 (E) Non esiste (F) Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Es 9 [3 o -1 punti] La funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è derivabile. Quale delle seguenti affermazioni è certamente corretta?

(A) Se $f(a) = f(b)$, allora f ha un punto di minimo *interno*

(B) $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = f(b) - f(a)$

(C) Se $f(b) > f(a)$, allora f è crescente.

(D) Se $f(b) < f(a)$, allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) < 0$.

(E) Se $f(a) = f(b)$ allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f(\xi) = 0$

Es 10 [3 o -1 punti] La funzione $f(x) = \sqrt{2x^2 + x} + \sin x$, per $x \to \infty$

(A) ha un asintoto orizzontale

(B) ha asintoto obliquo

(C) tende a $+\infty$, ma non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo

(D) non ha limite

FULLY NONLINEAR, UNIFORMLY ELLIPTIC:
$Lu = F(D^2u)$ as long as $F(tX) = tF(X)$ for $t > 0$ and uniformly elliptic i.e. for $Y \geq 0$

$$c_o \mathrm{trY} \leq \mathrm{F(X+Y) - F(X)} \leq \mathrm{C_o trY}.$$

FULLY NONLINEAR with further non linearities e.g. in the gradients, (degenerate or singular elliptic)
$Lu = F(\nabla u, D^2u)$ as long as $F(tp, tX) = t^{\alpha+1}F(p, X)$ for $t > 0$ and $\alpha > -1$ and

$$c_o|p|^\alpha \mathrm{trY} \leq \mathrm{F(p, X+Y) - F(p, X)} \leq \mathrm{C_o|p|^\alpha trY}.$$

COMPLETELY DEGENERATE ELLIPTIC
$Lu := P_k(D^2u) := \lambda_1(D^2u) + \cdots + \lambda_k(D^2u)$

Ω UNBOUNDED. $\Omega = \mathbb{R}^N$ or a half plane or a cone...

$$\lambda_1(X) = \min_{u\neq 0} \frac{< Xu, u >}{|u|^2} = \min_{u \neq 0} \frac{X_{ij}u_iu_j}{u_i^2} \qquad \lambda_1(X) = \max_{|v|=1, v>0} \min_i \frac{X_{ij}v_j}{v_i}$$