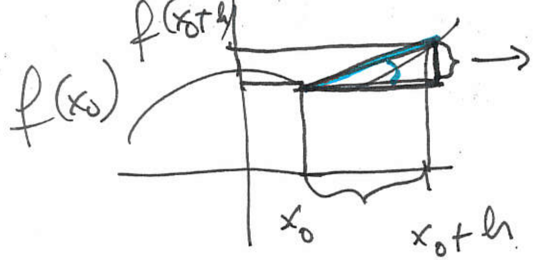
Calcolo differenziale per funzioni di + variabili $\boxed{30/10}$

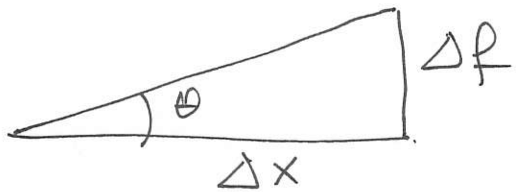
Richiamo

Funzione di 1 var.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{\underset{\uparrow}{h}} = tg\,\theta$$

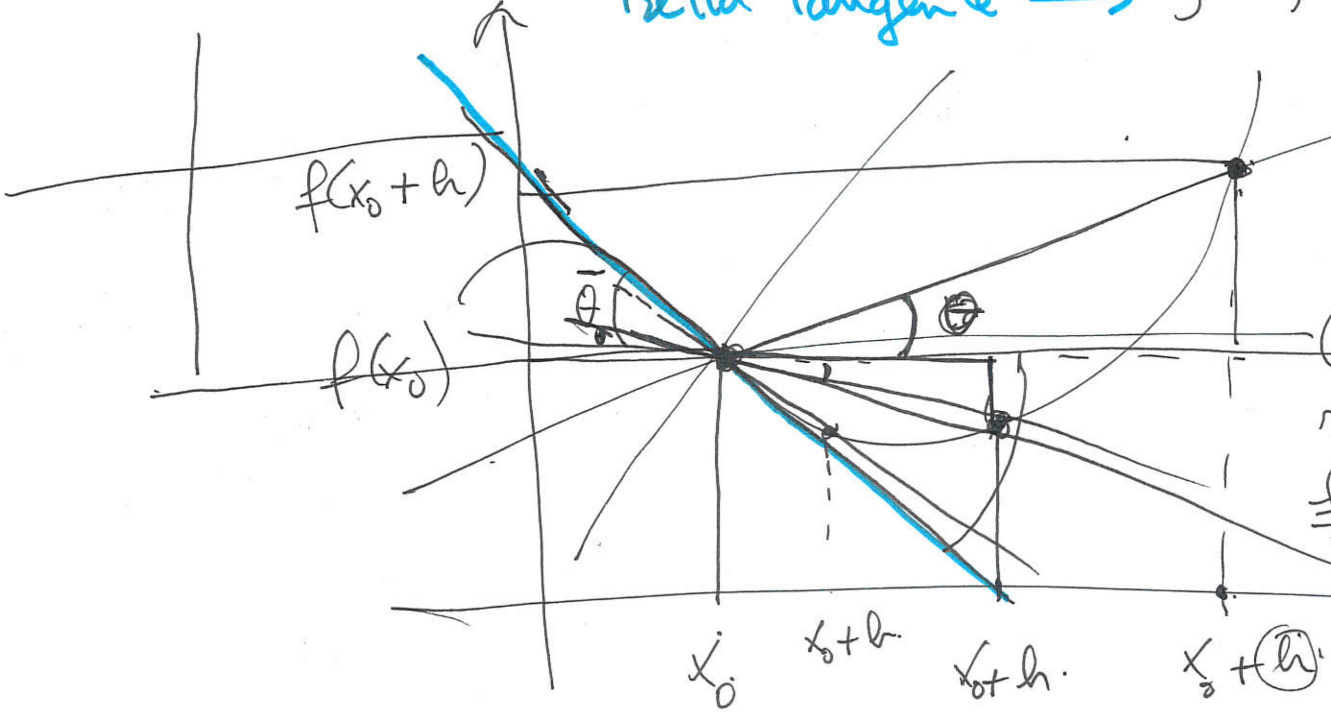
variazione della "x"





$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = tg\,\theta.$$

retta tangente $\longrightarrow$ $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$



$\boxed{r_h}$ retta che congiunge il punto $(x_0, f(x_0))$ e il punto $(x_0+h, f(x_0+h))$.

rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \boxed{tg\,\theta_h}$$

dove θ_h è l'angolo tra la retta r_h e l'asse delle x.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{DEF.}} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \theta_h = \operatorname{tg} \bar{\theta}$$

Le rette r_h si opportano fino a una retta "limite" è detta retta tangente e avrà come "pendenza" $\boxed{\operatorname{tg} \bar{\theta}} = f'(x_0)$

La retta tangente ha pendenza $\operatorname{tg} \bar{\theta} = \underline{\underline{f'(x_0)}}$ e passa per il punto $\underline{\underline{(x_0, f(x_0))}}$: equazione della <u>retta tangente</u>

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).} \quad \underline{\text{DEF.}}$$

Se considero una generica retta passante per il punto $(x_0, f(x_0)) \longrightarrow y = \underline{\underline{m}}(x - x_0) + f(x_0)$, $m \in \mathbb{R}$ /

La retta tangente è quella che "<u>approssima meglio</u>" il grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$.

30/10
3

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - [m(x-x_0) + f(x_0)] = 0 \quad \forall m$$

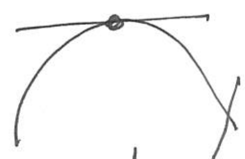
se f è continua

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [m(x-x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0 \text{ se e \underline{solo se} } \boxed{m = f'(x_0)}.$$

<u>Teor.</u>

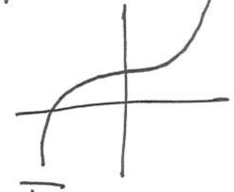
Se f è derivabile in x_0, cioè esiste la derivata allora la funzione è continua

Se f ha un massimo o un minimo <u>locale</u> in x_0 $\Longrightarrow$ $f'(x_0) = 0$

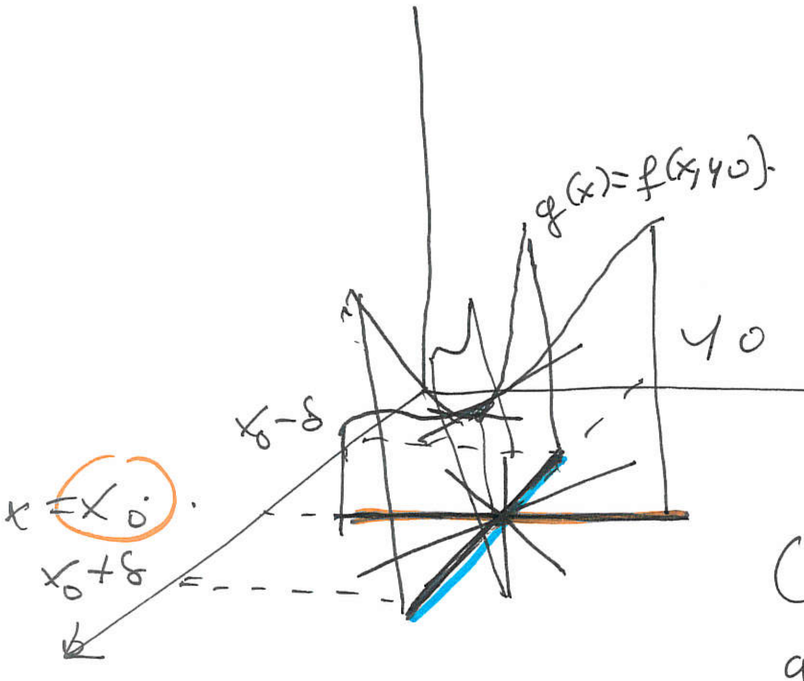


$f'(x) \geq 0$ in I $\Longrightarrow$ f è monotona crescente in I

$f'(x) \leq 0$ in I $\Longrightarrow$ f è monotona decrescente in I.



30/10
IV



Preso $(x_0,y_0) \longrightarrow$ consideriamo la retta passante per (x_0,y_0) parallela all'asse delle x cioè i punti

(x,y_0). con $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

Consideriamo la restrizione di f a questo segmento. cioè, con $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

$g(x)=f(x,y_0)$ allora per g possiamo calcolare la derivata nel punto x_0.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=g'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}}$$

rapporto incrementale della funzione f ristretta al segmento (x,y_0), $\boxed{y=y_0}$

DEFINIZIONE

"$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$" è la derivata parziale di f rispetto ad x nel punto (x_0,y_0). $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\partial_x f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=D_x f(x_0,y_0)$

30/1
V

$x = x_0$

$y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$

$k(y) = f(x_0, y)$. Possiamo calcolare la derivata di k che non è altro che la restrizione di f al segmento (x_0, y) con $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

$\cancel{k'(y_0) \neq}$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = k'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{k(y_0 + h) - k(y_0)}{h} = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

scriviamo in funzione di f.

Rapporto incrementale quando è variata la sola variabile "y".

"$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$" derivata parziale di f in (x_0, y_0) rispetto a y.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = D_y f(x_0, y_0)$$

Esempio: $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y$

Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$(x_0,y_0)=(0,0)$.

$$\boxed{f(x,y)=x^2+2xy+3y}$$

cioè calcoliamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

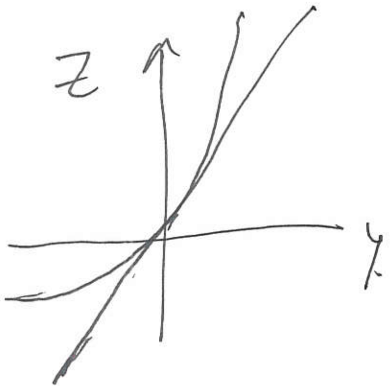
$$f(0+h,0)=f(h,0)=h^2+2h\cdot 0+0$$
$$=h^2+0=h^2$$

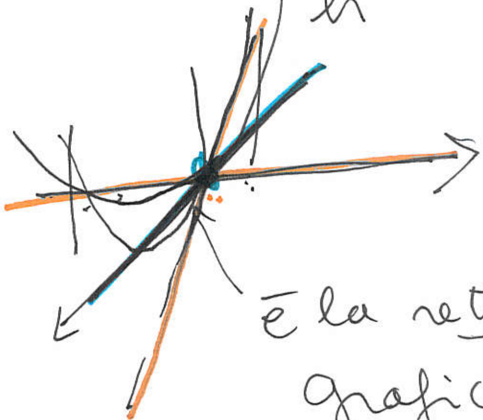
$$\boxed{f(0,0)=0}$$

$$f(0,h)=0^2+2\cdot 0\cdot h+3h=3h$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}\cancel{h}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=\boxed{3}.$$





è la retta tangente alla restrizione del grafico di f al segmento $(x,0)$.

la retta tangente alla restrizione del grafico di f al segmento $(0,y)$ $\rightarrow$ $\left.\begin{cases}\boxed{z=3y}\\ x=0\end{cases}\right\}$ retta

Per trovare $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, uso le regole di derivazione delle funzione di una variabile considerando y come una costante mentre x è la variabile

Per trove $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, uso le regole di derivazione delle funzioni di una variabile considerante x come costante mentre y è la variabile

$$f(x,y) = x\,e^{x^2 y} \qquad D = \mathbb{R}^2. \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,?$$

$$\cancel{(f\cdot g)' = f'g + f g'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\,e^{x^2y} + x\cdot e^{x^2y}\cdot(2xy) = e^{x^2y}(1+2x^2y).$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = x\,e^{x^2y}\cdot x^2 = x^3 e^{x^2y}.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = g'(x_0) \quad \text{se}$$

$$g(x) = f(x, \underline{\underline{y_0}}).$$

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,\underline{\underline{0}})$$

$$g(x) = f(x,0) = x^2 + 2x\cdot 0 + 3\cdot 0 = x^2.$$

$$g'(x) = 2x$$

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 2\cdot 0 = 0$$

$$h(y) = f(\underline{\underline{x}}, y) = x^2 + 2xy + 3y$$

$$h'(y) = 0 + 2x + 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 3$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 3.}$$

$$g(x) = f(x, \underset{\text{fissata}}{\underline{\underline{y}}}) \longrightarrow g'(x) = 2x + 2y + 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y.}$$

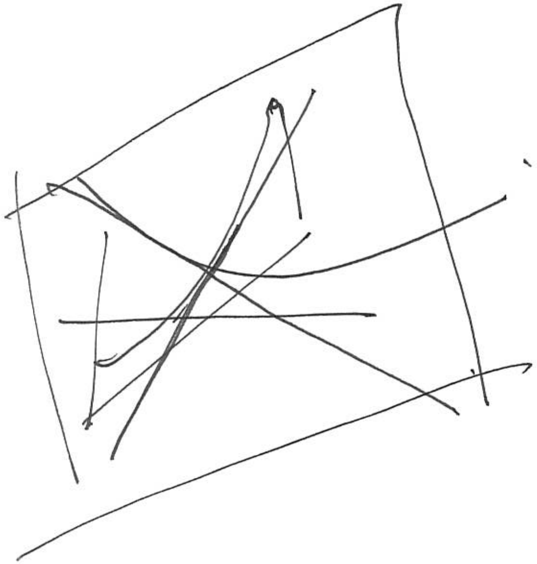
$$g(x) = x^2 + 2xy + 3y$$
$$= x^2 + \underline{\underline{(2y)x}} + \underline{\underline{3y}}.$$

$$(cx)' = c.$$

30/10
IX

Il piano che contiene le due rette tangenti alle restrizioni della funzione alle rette parallele agli assi, è il candidato ad essere il piano tangente e ha equazione:

$$\boxed{z = ax + by + c}$$



$$\boxed{z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)}$$

Piano passante $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e che contiene le rette tangenti.

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y$$

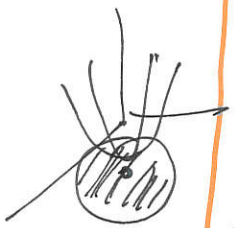
Il piano $z = 0 \cdot (x - 0) + 3(y - 0) + 0$

$$\boxed{z = 3y}$$ piano tangente

30/10
X

<u>Definizione</u>: (x_0, y_0) è un <u>punto di minimo locale</u> di f se:
$\exists\, r>0$ t.c. $\forall (x,y) \in I_r(x_0,y_0)$ $\quad f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

(x_0, y_0) è un punto di <u>massimo locale</u> di f.
se $\exists\, r>0$ t.c. $\forall (x,y) \in I_r(x_0,y_0)$, $\quad f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$



<u>Teorema di Fermat</u>:
Se (x_0, y_0) è un p.to di <u>massimo</u> o di <u>minimo</u> <u>locale</u> allora $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

I p.ti t.c. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$ si chiamano <u>punti critici</u>.

Esercizio: <u>Dimostrarlo</u>!

30/10 XI

$$f(x,y) = x\,e^{x^2 y}$$

Determinare i p.ti critici di f. Si devono annullare le due derivate parziale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2y}(1+2x^2y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2y}x^3 = 0 \end{cases} \longmapsto \begin{cases} 1+2x^2y = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases} \longmapsto \boxed{x=0}$$

$1 = 1 + 2\cdot 0\cdot y \neq 0$

f non ha punti critici

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 3xy$$

Trovare i p.ti critici

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2 + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + 3x = 0 \end{cases} \longrightarrow 3x = 2y \quad x = \frac{2}{3}y$$

$$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 2 + 3y = 0$$

$$\frac{13}{3}y = -2$$

$$y = -\frac{6}{13}$$

$$x = -\frac{12}{39}$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{13}}$$

l'unico punto critico è $\longrightarrow \boxed{P = \left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)}$

Se f dovesse avere un punto di massimo o di minimo locale sarebbe per forza $P = \left(-\frac{4}{13}, -\frac{6}{13}\right)$

Derivata direzionale:

Fissato un vettore $\boxed{\vec{v}}$ di lunghezza 1 $(|\vec{v}| = 1)$

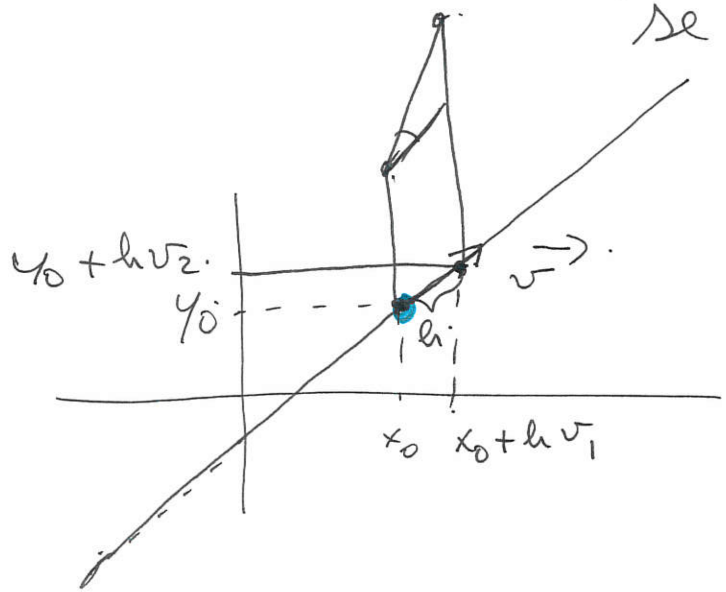
allora possiamo definire la derivata direzionale, nella direzione $\vec{v}$, della funzione f in (x_0, y_0),

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

se $\vec{v} = (1, 0) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$.

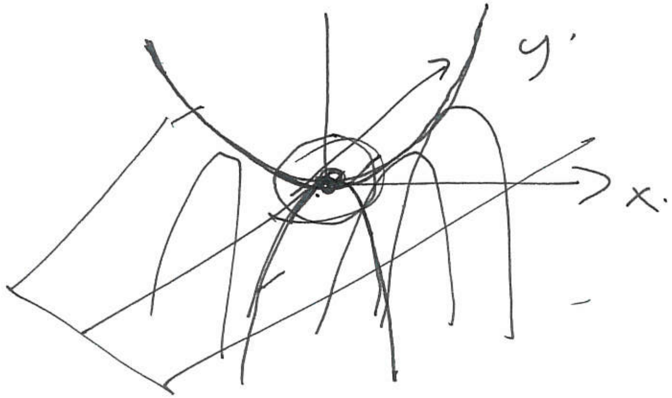
se $\vec{v} = (0, 1) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\vec{v} = (v_1, v_2) = (\cos\theta, \sin\theta)$$



30/10
XIII

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

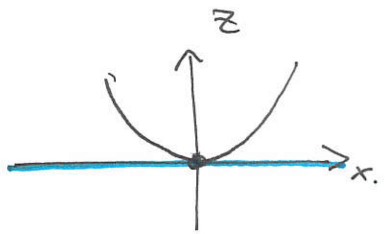
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

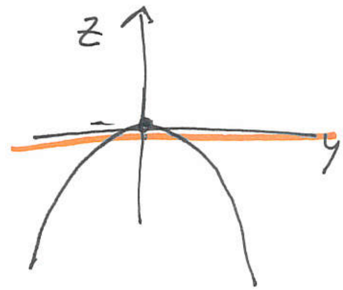
$(0,0)$ è un p.to critico

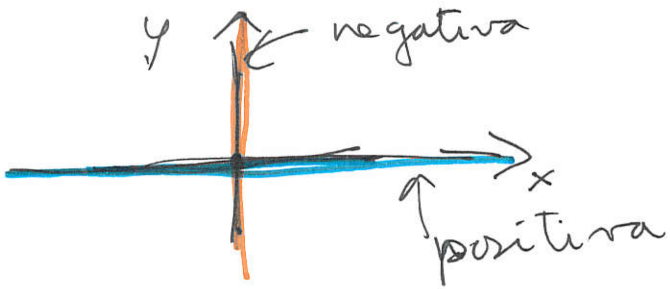
ma non è né di massimo né di minimo.



$\forall x \neq 0 \quad f(x,0) > 0 = f(0,0)$

$\forall y \neq 0 \quad f(0,y) < 0 = f(0,0)$





30/10
XIV

1). Quando il piano

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

è il piano tangente?

2). Quando $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$?

$\vec{v} = (v_1, v_2)$

Risposta:

Quando f è <u>differenziabile</u> in (x_0, y_0).

La definizione sarà data mercoledì.