ANALISI MATEMATICA I, Compito d'esonero del 19/04/2016

Corso di Laurea in Matematica

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & T \\ \hline | \quad | & | \quad | & | \quad | & | \quad | & | \quad | \\ | \quad | & | \quad | & | \quad | & | \quad | & | \quad | \\ \hline \end{array} \tag{1}$$

Nelle risposte devono essere riportati anche i principali conti e le principali motivazioni.

Esercizio 1 *Dire per quali* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la funzione* $f(x) = \frac{x^\alpha}{3+x^5}$ *è uniformemente continua in* $[0, +\infty)$

f è continua in $[0, +\infty)$. Inoltre per $\alpha \leq 5$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) < +\infty$, quindi f ha un asintoto e dunque è uniformemente continua.

Per $\alpha > 6$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{3+x^5} = +\infty.$$

Dunque per ogni m e ogni q, definitivamente $f(x) \geq mx + q$, quindi f non è uniformemente continua.

Per $\alpha \in (5, 6]$. Si osservi che, per $|x| > 1$

$$|f'(x)| = \left| \frac{(\alpha-5)x^{\alpha+4} + 3\alpha x^{\alpha-1}}{(3+x^5)^2} \right| \leq \frac{|\alpha-2|x^{\alpha+4}}{x^{10}} \leq |\alpha-2|x^{\alpha-6} \leq |\alpha-2|.$$

La limitatezza della derivata, implica che la funzione è Lipschitz continua e duqnue uniformemente continua.

Esercizio 2 *a) Determinare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}\log(y+1)}{x^2+(4+\arctan x)y^2}$ *e dire se è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. Determinare se esiste il seguente limite e, in caso affermativo, calcolarlo*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{|x|^{\frac{3}{2}}\log(y+1)}{x^2+(4+\arctan x)y^2}.$$

b) Determinare se esiste il seguente limite e, in caso affermativo, calcolarlo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\log(y+1)}{2x-y}.$$

Siccome $1 < (4+\arctan x) < 3$, si ha che $x^2+(4+\arctan x)y^2 \neq 0$ per $(x,y) \neq (0,0)$. Ricordando che l'argomento del logaritmo deve essere positivo si ottiene che D l'insieme di definizione di f è

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > -1,\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

In particolare se $(x_o,y_o) \in D$ sia $r = \min\{\frac{y_o+1}{2}, \frac{\sqrt{x_o^2+y_o^2}}{2}\}$. Allora per ogni $(x,y) \in B_r((x_o,y_o))$, $y - y_o \geq -r$ i.e. $y \geq y_o + r \geq \frac{y_o-1}{2} > -1$ e analogamente $(x,y) \neq (0,0)$, se ne deduce che $B_r((x_o,y_o)) \subset D$ e quindi D è aperto.

Si ricorda che $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t} = 1$, dunque esiste δ_1 tale che se $|t| \leq \delta_1$ allora $|\frac{\log(1+t)}{t}| \leq 2$. Quindi per $|(x,y)| \leq \delta_1$, usando la stima su $4+\arctan x$ e usando la disuguaglianza di Cauchy Schwarz

$$\left|\frac{|x|^{\frac{3}{2}}\log(y+1)}{x^2+(4+\arctan x)y^2}\right| \leq 2\left|\frac{|x|^{\frac{3}{2}}|y|}{x^2+y^2)}\right| \leq |x|^{\frac{1}{2}} \leq |(x,y)|^{\frac{1}{2}}$$

Quindi per ogni $\epsilon > 0$ se scegliamo $\delta = \min\{\delta_1, \epsilon^2\}$ per ogni $|(x,y)| \leq \delta$, si ha $|f(x,y)| \leq |(x,y)|^{\frac{1}{2}} \leq \delta^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$ e dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

b) Si osservi che $\lim_{y\to0} f(y,y) = \lim_{y\to0}\frac{|y|\log(y+1)}{y} = 0$. Mentre, per $y > 0$, $f(\frac{y}{2}+y^2, y) = \frac{(\frac{y}{2}+y^2)\log(y+1)}{2y^2} = \frac{\log(y+1)}{4y} + \frac{\log(y+1)}{2}$ e dunque $\lim_{y\to0} f(\frac{y}{2}+y^2,y) = \frac{1}{4} \neq 0$. Questo dimostra che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\log(y+1)}{2x-y}$$

non esiste.

Esercizio 3 *Calcolare il limite puntuale della successione di funzioni* $f_n(x) = \frac{(3|x|)^n}{4+(3|x|)^n}$*, per ogni* $x \in \mathbb{R}$*. Studiare l'uniforme convergenza in* $\mathbb{R}$ *e in* $[1, +\infty)$*.*

Sfruttando il fatto che t^n converge a 0, 1 e $+\infty$ rispettivamente per $t \in (0, 1)$, $t = 1$ e $t > 1$. Osservando e.g. che $3|x| < 1$ se $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, si ottiene il seguente limite puntuale:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{5} & x = -\frac{1}{3}, x = \frac{1}{3} \\ 1 & x < -\frac{1}{3},\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Siccome le funzione f_n sono continue in $\mathbb{R}$ mentre il limite puntuale non lo è , si ottiene che la convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$.

In $[1, +\infty)$, il limite puntuale è la funzione identicamente uguale a 1. Calcoliamo $d_\infty(f_n, f) := \sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)|$. Si ottiene:

$$\sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[1,+\infty)} \frac{4}{4 + (3|x|)^n} = \frac{4}{4 + (3)^n}.$$

L'ultima uguaglianza sfrutta il fatto che la funzione $\frac{4}{4+(3|x|)^n}$ è decrescente in $[1, +\infty)$ e dunque il sup è raggiunto nel punto 1. Se ne deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{4 + (3)^n} = 0$$

e dunque, per definizione la successione converge uniformemente a 1 in $[1, +\infty)$.

Esercizio 4 *a) Sia* $X = (-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$*,* $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$ *definita da* $d_X(x_1, x_2) = |\frac{x_1^3}{3-x_1^4} - \frac{x_2^3}{3-x_2^4}|$*. Verificare se* (X, d_X) *è uno spazio metrico. Dire se la palla unitaria euclidea centrata in* $x_o = 0$ *è contenuta nella palla unitaria di questa metrica centrata nello stesso punto. Dire se questo spazio metrico è completo.*

b) Sia $\tilde{C}([0,1])$ *l'insieme delle funzioni continue in* $[0,1]$ *tali che* $|f(x)| < \sqrt[4]{3}$*. Dire se* $\tilde{C}([0,1])$ *munito della distanza* $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} d(f(x), g(x))$ *è uno spazio metrico completo.*

a) Sia $\phi : (-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}) \to \mathbb{R}$ definita da $\phi(t) = \frac{t^3}{3-t^4}$. L'applicazione d è definita da $d_X(x_1, x_2) = |\phi(x_1) - \phi(x_2)|$ per le proprietà del modulo si ha:

$$0 \leq d_X(x_1, x_2) = |\phi(x_1) - \phi(x_2)| = |\phi(x_2) - \phi(x_1)| = d_X(x_2, x_1);$$

$$d_X(x_1, x_2) = |\phi(x_1) - \phi(x_2)| \leq |\phi(x_1) - \phi(x_3)| + |\phi(x_3) - \phi(x_2)| = d_X(x_1, x_3) + d_X(x_3, x_2);$$

Per dimostrare che la (X, d_X) è una metrica basta verificare che $d_X(x_1, x_2) = 0$ implica che $x_1 = x_2$. Sappiamo che $d_X(x_1, x_2) = 0$ implica $\phi(x_1) = \phi(x_2)$. Quindi se ϕ è iniettiva d_X è una metrica.

Ma per $t \neq 0$, $\phi'(t) = \frac{t^6+3t^2}{(3-t^4)^2} > 0$ in $(-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$. Quindi ϕ è strettamente monotona crescente e quindi iniettiva.

Si ha immediatamente che i punti della palla unitaria nella distanza euclidea i.e. $|x| < 1$ implica $|x|^3 < 1$ e $3 - x^4 > 2$ quindi

$$d_X(x, 0) = \left| \frac{x^3}{3 - x^4} \right| < \frac{1}{2} < 1.$$

Si osservi che ϕ è suriettiva da X in $\mathbb{R}$ dato che ha asintoti verticali in $-\sqrt[4]{3}$ e in $\sqrt[4]{3}$. Se x_n è una successione di Cauchy in (X, d_X), si ha che $\phi(x_n)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Per la completezza di $\mathbb{R}$, $\phi(x_n)$ converge a $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Per la suriettività di ϕ esiste $\bar{x}$ tale che $\phi(\bar{x}) = \bar{y}$. E quindi $\phi(x_n) \to \phi(\bar{x})$. Cioè $d(x_n, \bar{x}) = |\phi(x_n) - \phi(\bar{x})| \to 0$ e dunque, la successione di Cauchy converge nella metrica a $\bar{x}$.

b)Abbiamo dimostrato il seguente teorema $C(X, Y)$*, lo spazio delle funzioni continue dallo spazio metrico* (X, d_x) *nello spazio metrico* (Y, d_y) *è completo se lo è* Y*.*

$\tilde{C}([0,1]) = C([0,1], X)$ dove $[0,1]$ è munito della metrica euclidea mentre $X = (-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3})$ è munito della metrica dalla metrica d_X della prima parte che è completo e dunque lo è $\tilde{C}([0,1])$.