Esercizi di Analisi Matematica 1, Tutoraggio n. 7, del 3/05/2016

(1) Studiare l'insieme di convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n\ln(3n^2)}\Big(\frac{x+1}{x+3}\Big)^n \,, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dire se la somma della serie è derivabile e in quale intervallo.

(2) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \ln n}{n2^n}\,, z \in \mathbb{C}.$$

Completare lo studio in $\mathbb{R}$ considerando anche eventuali punti in cui vi sia convergenza semplice ma non assoluta e dire per quali $a < 0$ risulti certamente valida l'uguaglianza

$$\int_a^0 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n2^n}\Big)\, dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}\ln n}{n(n+1)2^n}\,.$$

Inoltre dire per quali $b > 0$ risulti certamente valida l'uguaglianza

$$\int_0^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln n}{n2^n}\Big)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{n+1}\ln n}{n(n+1)2^n}\,.$$

(3) Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} z^n}{4^n(3+\ln n)}\,, z \in \mathbb{C}.$$

Completare lo studio in $\mathbb{R}$ considerando anche eventuali punti in cui vi sia convergenza semplice ma non assoluta.

Giustificare l'uguaglianza $\int_{-1}^{1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} x^n}{4^n(3+\ln n)}\Big)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{1}{n}} x^n}{4^n(3+\ln n)}\, dx$. Dalla precedente uguaglianza dedurre la seguente

$$\int_{-1}^{1} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} x^n}{4^n(3+\ln n)}\Big)\, dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2n}}}{4^{2n}(3+\ln(2n))(2n+1)}\,.$$

(4) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{R}$ e tale che $g(x) < 1\,, \forall x \in \mathbb{R}$.
Dimostrare che la serie converge totalmente in $[-a, a]$ per ogni $a \in (0, +\infty)$.
trovare un esempio verificante queste ipotesi e per il quale la serie converge totalmente in $\mathbb{R}$ e un esempio in cui invece non converge totalmente né uniformemente in $\mathbb{R}$.

(5) Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri e dove possibile calcolarli

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}dx$$

(6) Dimostrare che l'integrale di Eulero (funzione beta) definita de

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

converge per $p > 1$ e $q > 0$.

(7) Siano le funzioni *seno integrale* definita da $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ e la funzione errore definita da $\mathrm{Erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\mathrm{t}^2}\mathrm{dt}$. Dimostrare che sono sviluppabile in serie di Taylor e calcolarne lo sviluppo.